Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 65–75

УДК **517.958, 517.986.7**

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Х. Г. Умаров

Разрешимость задачи Коши для для уравнения Аллера в пространстве непрерывных ограниченных функций сводится к разрешимости абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве непрерывных ограниченных функций на всей оси.

Ключевые слова: уравнение Аллера, сильно непрерывные полугруппы операторов.

Введение

Одномерное движение влаги в капиллярно-пористых средах, к каковым относятся почвы с фрактальной структурой, моделируется [1, с. 137] в области $\big\{(x,t) : x \in \mathbb{R} = \,]-\infty, +\infty\,[,\ t > 0\big\}$ уравнением Аллера

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[d(w)\frac{\partial w}{\partial x} + a\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right], \tag{1}$$

где a — варьируемый параметр, $d(w)$ — коэффициент диффузитивности, являющийся функцией искомой влажности w.

Уравнение Аллера исследовалось многими авторами [1–5] при различных допущениях относительно коэффициента диффузитивности $d(w)$, например, в [2] рассмотрены случаи линейной функции: $d(w) = \beta + \gamma w$, где β, γ — физические параметры характеризующие почву, и экспоненциальной функции: $d(w) = \beta \exp(\gamma w)$ — для почв типа Гарднера. Мы будем предполагать, что варьируемый параметр $a = \mathrm{const} > 0$ и рассмотрим последовательно три случая: постоянного коэффициента диффузитивности $d(w) = \beta$, степенной функции $d(w) = \beta + \gamma w^\sigma$, и непрерывной зависимости коэффициента диффузитивности от влажности w.

Будем предполагать, что начальное условие φ задачи Коши:

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и искомое классическое решение $w = w(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, уравнения (1) для всех значений t по переменной x принадлежат банахову пространству $C[-\infty, +\infty] \equiv C[\mathbb{R}]$ непрерывных функций $\psi = \psi(x)$, для которых существуют пределы при $x \to \pm\infty$ и норма которого определяется по формуле

$$\|\psi(x)\|_{C[\mathbb{R}]} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|.$$

В банаховом пространстве $C[\mathbb{R}]$ дифференциальный оператор d^2/dx^2 с областью определения $\mathscr{D}(d^2/dx^2) = \big\{\psi(x) \in C\big[\mathbb{R}\big] : \ \psi'(x), \psi''(x) \in C\big[\mathbb{R}\big]\big\}$ порождает [6, с. 682], [7, с. 58] сильно непрерывную полугруппу $U(t; d^2/dx^2)$ класса C_0, представляющуюся сингулярным интегралом:

$$U\biggl(t; \frac{d^2}{dx^2}\biggr)\ \psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\biggl(-\frac{\xi^2}{4t}\biggr)\psi(x+\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Положительная полуось $\lambda > 0$ принадлежит [6, с. 681] резольвентному множеству дифференциального оператора d^2/dx^2 и для резольвенты $(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}$, где I — тождественный оператор, справедлива оценка $\lambda\|(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}\| \leqslant 1$.

Наша цель — для случая постоянного коэффициента диффузитивности найти явный вид решения задачи Коши для уравнения Аллера в пространстве $C[\mathbb{R}]$, а в случае переменного коэффициента диффузитивности найти отрезок существования классического решения задачи Коши и оценить норму этого решения.

1. Задача Коши для уравнения Аллера с постоянным коэффициентом диффузитивности

Пусть в уравнении (1) $d(w) = \beta$. Тогда это уравнение перепишется в виде

$$w_t - aw_{xxt} = \beta w_{xx}. \tag{4}$$

Наличие в точке $\lambda > 0$ резольвенты $(\lambda I - d^2/dx^2)^{-1}$ позволяет существенно преобразовать уравнение (4), разрешив его относительно производной по времени. Именно, пусть $w(x,t)$ — решение задачи Коши (4), (2), для которого частные производные по переменной x первого и второго порядков непрерывны при $t \geqslant 0$. Введем новую неизвестную функцию

$$v = w - aw_{xx}. \tag{5}$$

Из замены (5) можно единственным образом определить значение $v|_{t=0} = w(x,0) - aw_{xx}(x,0) = \varphi(x) - a\varphi''(x)$ при условии, что производные $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ принадлежат пространству $C[\mathbb{R}]$, и выразить решение $w(x,t)$ задачи Коши (4), (2) через новую неизвестную функцию $v(x,t)$:

$$w = \biggl(I - a\frac{d^2}{dx^2}\biggr)^{-1} v. \tag{6}$$

В результате подстановки (6) приходим к эквивалентному [8, с. 52] уравнению

$$v_t = \beta\frac{d^2}{dx^2}\biggl(I - a\frac{d^2}{dx^2}\biggr)^{-1} v. \tag{7}$$

Операторный коэффициент в (7): $d^2/dx^2(I - ad^2/dx^2)^{-1} = (I - ad^2/dx^2)^{-1} d^2/dx^2$ определен на всюду плотном в $C[\mathbb{R}]$ множестве $\mathscr{D}(d^2/dx^2)$ и его можно продолжить до линейного ограниченного оператора

$$A = \frac{1}{a}\biggl[\biggl(I - a\frac{d^2}{dx^2}\biggr)^{-1} - I\biggr],$$

определенного на всем пространстве $C[\mathbb{R}]$ и, значит, являющегося производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы, более того — группы, $U(t;A)$ класса C_0:

$$U(t;A) = \exp\Big(-\frac{t}{a}\Big)U\Big(\frac{t}{a};\Big(I - a\frac{d^2}{dx^2}\Big)^{-1}\Big) = \exp\Big(-\frac{t}{a}\Big)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!a^k}\Big(I - a\frac{d^2}{dx^2}\Big)^{-k},$$

$$\|U(t;A)\| \leqslant 1, \quad t \geqslant 0.$$

На открытом множестве регулярных точек λ производящего оператора B сильно непрерывной полугруппы $U(t;B)$ справедлива формула [6, с. 664] для степеней резольвенты

$$(\lambda I - B)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^{+\infty} s^{k-1}\exp(-\lambda s)U(s;B)\,ds, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Используя эти равенства для произвольного элемента $\psi = \psi(x)$ пространства $C[\mathbb{R}]$, получаем представление полугруппы $U(t;A)$ через полугруппу (3):

$$U(t;A)\psi = \exp\Big(-\frac{t}{a}\Big)\Big[\psi + \sqrt{\frac{t}{a}}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-s)\,\mathrm{I}_1\Big(2\sqrt{\frac{t}{a}s}\Big)U\Big(as;\frac{d^2}{dx^2}\Big)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\Big], \tag{8}$$

в котором $I_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ — модифицированная функция Бесселя.

Таким образом, приходим к абстрактному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, обобщающему уравнение (7) в банаховом пространстве $C[\mathbb{R}]$,

$$V_t = \beta A\mathrm{V}, \tag{9}$$

где $\mathrm{V} = \mathrm{V}(t) : t \to v(x,t)$ — искомая абстрактная функция, определенная для $t \geqslant 0$ и со значениями в банаховом пространстве $C[\mathbb{R}]$, и в котором ограниченный операторный коэффициент βA порождает сжимающую группу $U(t;\beta A) = U(\beta t;A)$, для которой на любом элементе $\psi \in C[\mathbb{R}]$ справедливы представления: если $\beta > 0$, то

$$U(t;\beta A)\psi = \exp\Big(-\frac{\beta}{a}t\Big)\Big[\psi + \sqrt{\frac{\beta}{a}t}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-s)\,I_1\Big(2\sqrt{\frac{\beta}{a}ts}\Big)U\Big(as;\frac{d^2}{dx^2}\Big)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\Big],$$

и если $\beta < 0$, то

$$U(t;\beta A)\psi = \exp\Big(-\frac{\beta}{a}t\Big)\Big[\psi - \sqrt{\frac{|\beta|}{a}t}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-s)\,J_1\Big(2\sqrt{\frac{|\beta|}{a}ts}\Big)U\Big(as;\frac{d^2}{dx^2}\Big)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\Big],$$

где $J_1(z) = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!(i+1)!}(z/2)^{2i+1}$ — функция Бесселя. Вводя обозначение

$$G_{J_1}^{I_1}(\beta,a,s,t) = \begin{cases} I_1\Big(2\sqrt{\frac{|\beta|}{a}st}\Big), & \beta \geqslant 0,\\ -J_1\Big(2\sqrt{\frac{|\beta|}{a}st}\Big), & \beta < 0,\end{cases} \tag{10}$$

представление для полугруппы, порождаемой оператором βA, можно записать в виде

$$U(t;\beta A)\psi(x) = \exp\left(-\frac{\beta}{a}t\right)$$
$$\times\left[\psi(x) + \sqrt{\frac{|\beta|}{a}t}\int_0^{+\infty}\exp(-s)G_{J_1}^{I_1}(\beta,a,s,t)U\left(as;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right].$$

Начальное условие для уравнения (9) в $C[\mathbb{R}]$ запишется в виде

$$\mathrm{V}|_{t=0} = \Phi, \tag{11}$$

где $\Phi = (I - ad^2/dx^2)\,\varphi(x)$ — элемент пространства $C[\mathbb{R}]$.

Задача Коши для абстрактного уравнения (9) с ограниченным операторным коэффициентом ($\|A\| \leqslant 2|\beta|/a$) разрешима [7, с. 64] при любом начальном условии (11), дается формулой

$$V = U(\beta t;A)\Phi, \quad t \geqslant 0, \tag{12}$$

и для него справедлива оценка $\|V\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \|\Phi\|_{C[\mathbb{R}]}$, $t \geqslant 0$.

Из формулы (6), используя перестановочность резольвенты $(I - ad^2/dx^2)^{-1}$ с полугруппой $U(\beta t;A)$, находим решение уравнения (4):

$$w = \left(I - a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}U(\beta t;A)\left(I - a\frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi = U(\beta t;A)\,\varphi, \tag{13}$$

при условии $\varphi \in \mathscr{D}(d^2/dx^2)$, и оценку нормы

$$\|w\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \|\varphi\|_{C[\mathbb{R}]}, \quad t \geqslant 0. \tag{14}$$

Наконец, используя представление полугруппы (3), порождаемой оператором d^2/dx^2, находим явный вид решения задачи Коши (4), (2):

$$w(x,t) = \exp\left(-\frac{\beta}{a}t\right)$$
$$\times\left[\varphi(x) + \sqrt{\frac{|\beta|t}{\pi a}}\int_0^{+\infty}\exp(-s)\,G_{J_1}^{I_1}(\beta,a,s,t)\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\xi^2)\,\varphi(x+2\xi\sqrt{as})\,d\xi\right]. \tag{15}$$

Из формул (6), (12), (13) и свойств решения абстрактной задачи Коши (9), (11) следует, что значения решения уравнения (4) принадлежат множеству $\mathscr{D}(d^2/dx^2)$ для всех значений $t \geqslant 0$, и значит, у функции $w(x,t)$, $t \geqslant 0$, по переменной x существуют частные производные до второго порядка включительно при условии, что производные $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ принадлежат пространству $C[\mathbb{R}]$, причем по временной переменной t это решение бесконечно дифференцируемо.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Для начального условия $\varphi(x) \in C[\mathbb{R}] : \varphi'(x)$, $\varphi''(x) \in C[\mathbb{R}]$, существует классическое решение $w(x,t)$ задачи Коши* (4), (2) *в пространстве $C[\mathbb{R}]$, представляемое в явном виде формулой* (15) *и для которого справедлива оценка* (14).

Замечание 1. Решение (15) задачи Коши (4), (2) по временной переменной t удовлетворяет полугрупповому свойству, дважды непрерывно дифференцируемо по пространственной переменной x при $t \geqslant 0$ и бесконечно дифференцируемо по временной переменной $t \geqslant 0$.

Замечание 2. Отметим, что из оценки (14) следует непрерывная зависимость решения от начального условия, а из формулы (13), в силу ограниченности оператора A, и значит, того, что $U(\beta t; A)$ — группа, возможность «восстановления прошлого» в случае постоянного коэффициента диффузитивности, а именно, возможность по начальному условию (2) определения влажности $w(x, -t)$ в момент «отрицательного» времени $-t$.

2. Задача Коши для уравнения Аллера со степенным коэффициентом диффузитивности

Пусть в уравнении (1) $d(w) = \beta + \gamma w^\sigma$. Тогда это уравнение перепишется в виде

$$\left(I - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial t} = \beta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\sigma+1}\frac{\partial^2 w^{\sigma+1}}{\partial x^2}. \tag{16}$$

Применим к обеим частям уравнения (16) линейный ограниченный оператор $(I - ad^2/dx^2)^{-1}$. Тогда полученное эквивалентное [8, с. 36] уравнение можно записать в виде абстрактного полулинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с операторным коэффициентом $\beta A = \beta a^{-1}[(I - ad^2/dx^2)^{-1} - I]$:

$$W_t = \beta AW + F(W), \tag{17}$$

где $W = W(t) : t \to w(x, t)$ — искомая абстрактная функция, определенная для $t \geqslant 0$ и со значениями в пространстве $C[\mathbb{R}]$, $F(W)$ — заданный нелинейный оператор, действующий в $C[\mathbb{R}]$. Начальное условие для уравнения (17) в $C[\mathbb{R}]$ перепишется в виде

$$W|_{t=0} = \Phi, \tag{18}$$

здесь $\Phi = \varphi(x)$ — элемент пространства $C[\mathbb{R}]$.

Для $f(s) = s^{\sigma+1}/(\sigma+1)$ очевидно, что $f(\psi) \in C[\mathbb{R}]$, если $\psi \in C[\mathbb{R}]$, поэтому нелинейный оператор $F(\psi)$ из правой части уравнения (17) представляется в виде $F(\psi) = \gamma A\mathscr{F}(\psi) = \gamma a^{-1}[(I - ad^2/dx^2)^{-1} - I]\mathscr{F}(\psi)$, где $\mathscr{F}$ — оператор суперпозиции, действующий в пространстве $C[\mathbb{R}] : \mathscr{F}(\psi) = f(\psi(x))$. Отметим, что:

1) так как функции $f(s)$ и $f'(s)$ непрерывны, то [9, с. 406] оператор суперпозиции $\mathscr{F}$ непрерывно дифференцируем и его производная Фреше в точке $\psi_0(x) \in C[\mathbb{R}]$ определяется равенством $\mathscr{F}'(\psi_0) = \psi_0^\sigma(x)$;

2) из непрерывной дифференцируемости нелинейного оператора $\mathscr{F}$ и ограниченности линейного оператора A следует [10, с. 200] непрерывная дифференцируемость нелинейного оператора F в пространстве $C[\mathbb{R}]$ и формула $F'(\psi_0) = \gamma A\mathscr{F}'(\psi_0)$.

Из непрерывной дифференцируемости отображения $F(\cdot)$ следует, что $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица: для любого числа $r > 0$ и для всех функций $\psi_i = \psi_i\ (x)$ из $C[\mathbb{R}]$ таких, что $\|\psi_i\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant r$, $i = 1, 2$, существует постоянная $L_r = \sup_{\|\psi\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant r} \|F'(\psi)\|_{C[\mathbb{R}]} = 2|\gamma|a^{-1}r^\sigma$, для которой

$$\|F(\psi_2) - F(\psi_1)\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant L_r\|\psi_2 - \psi_1\|_{C[\mathbb{R}]}.$$

Поэтому [9, с. 469], [11, с. 185] для любого элемента Φ пространства $C[\mathbb{R}]$ существует промежуток $[0,t^{**}[\subseteq \overline{R}^1_+$ такой, что задача Коши для абстрактного уравнения (17) с начальным данным Φ имеет единственное обобщенное решение в промежутке $[0,t^{**}[$, т. е. единственное непрерывное решение $W=W(t)$ интегрального уравнения

$$W(t)=U(t;\beta A)\Phi+\int\limits_0^t U(t-\tau;\beta A)F(W(\tau))\,d\tau, \tag{19}$$

при этом, если $t^{**}<+\infty$, то $\lim_{t\to t^{**}}\|W(t)\|_{C[\mathbb{R}]}=\infty$. Это решение может быть получено как предел последовательности

$$W_{i+1}(t)=W_0(t)+\int\limits_0^t U(t-\tau;\beta A)F(W_i(\tau))\,d\tau,$$

$$W_0(t)=U(t;\beta A)\Phi,\quad i=0,1,\ldots,\ t\in[0,t^*]\subset[0,t^{**}[,$$

сходящейся в банаховом пространстве $C([0,t^*];C[\mathbb{R}])$ к обобщенному решению задачи Коши (17), (18) при $i\to+\infty$. Принимая $W(t^*)$ за новое начальное условие, обобщенное решение с отрезка $[0,t^*]$ продолжается до $W(t)$, $t\in[0,t^*+\delta]\subset[0,t^{**}[$, где величина δ зависит только от нормы начального условия Φ и параметров a, β, γ, σ уравнения Аллера (17).

Используя оценку полугруппы $U(t;\beta A)$, из интегрального уравнения (19) выводим интегральное неравенство[1]

$$\|W(t)\|_{C[\mathbb{R}]}\leqslant\|\Phi\|_{C[\mathbb{R}]}+\frac{2|\gamma|}{(\sigma+1)a}\int\limits_0^t\|W(\tau)\|^{\sigma+1}_{C[\mathbb{R}]}\,d\tau. \tag{20}$$

Откуда, в зависимости от показателя степени σ, следуют [13, с. 22–23] оценки нормы:

1) при $-1<\sigma<0$

$$\|W(t)\|_{C[\mathbb{R}]}\leqslant\left\{\|\Phi\|^{-\sigma}_{C[\mathbb{R}]}-\frac{2|\gamma|\sigma}{(\sigma+1)\,a}\,t\right\}^{-1/\sigma};$$

2) при $\sigma=0$

$$\|W(t)\|_{C[\mathbb{R}]}\leqslant\|\Phi\|_{C[\mathbb{R}]}\exp\left(\frac{2|\gamma|}{a}t\right);$$

3) при $\sigma>0$ предположим дополнительно, что

$$\|\Phi\|_{C[\mathbb{R}]}<\left\{\frac{2|\gamma|\sigma}{(\sigma+1)a}t_*\right\}^{-1/\sigma}.$$

Тогда на отрезке $[0,t_*]\subset[0,t^{**}[$, имеем

$$\|W(t)\|_{C[\mathbb{R}]}\leqslant\|\Phi\|_{C[\mathbb{R}]}\left\{1-\|\Phi\|^{\sigma}_{C[\mathbb{R}]}\frac{2|\gamma|\sigma}{(\sigma+1)a}t\right\}^{-1/\sigma}.$$

[1] Для элементов банахова пространства $C[\mathbb{R}]$ справедлива оценка $\|\psi\varphi\|_{C[\mathbb{R}]}\leqslant\|\psi\|_{C[\mathbb{R}]}\|\varphi\|_{C[\mathbb{R}]}$, в силу чего с ним можно работать как с алгеброй [12, с. 120].

Обобщенное решение $W(t)$, $t \in [0, t_*]$, будет классическим решением [11, с. 127], [9, с. 462] задачи Коши (17), (18), если оно непрерывно дифференцируемо в полуинтервале $]0, t_*]$. Для обобщенного решения $W(t)$, $t \in [0, t_*]$, значения производной Фреше $F'(W(t)) = \gamma A \mathscr{F}'(W(t))$ на отрезке $[0, t_*]$, есть семейство линейных ограниченных операторов, действующих из $C[\mathbb{R}]$ в $C[\mathbb{R}]$, причем

$$\|F'(W(t))\| \leqslant L_* = \frac{2|\gamma|}{a} W_*^{\sigma}, \quad t \in [0, t_*], \tag{21}$$

где $W_* = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R},\\ t\in[0,t_*]}} |w(x,t)|$. По определению производной Фреше, обозначая

$$H_h(t) = W(t+h) - W(t), \quad t \in [0, t_*],$$

имеем

$$F(W(t+h)) - F(W(t)) = F(W(t) + H_h(t)) - F(W(t)) = F'(W(t))H_h(t) + \omega(W(t), H_h(t)),$$

где

$$\lim_{\|H_h(t)\|_{C[\mathbb{R}]}\to 0} \frac{\|\omega(W(t), H_h(t))\|_{C[\mathbb{R}]}}{\|H_h(t)\|_{C[\mathbb{R}]}} = 0, \quad t \in [0, t_*].$$

Так как обобщенное решение $W(t)$ непрерывно в каждой точке t отрезка $[0, t_*]$, то $H_h(t) \to 0$ при $h \to 0$, следовательно, для достаточно малого $h > 0$ существует постоянная $\Omega > 0$:

$$\|\omega(W(t), H_h(t))\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \Omega \|H_h(t)\|_{C[\mathbb{R}]}, \quad t \in [0, t_*]. \tag{22}$$

Пусть t — произвольная точка полуинтервала $]0, t_*]$. Для того чтобы установить дифференцируемость обобщенного решения $W(t)$ в точке t, покажем существование предела $\frac{1}{h}H_h(t) = \frac{1}{h}[W(t+h) - W(t)]$ при $h \to 0$. Имеем

$$H_h(t) = U(t;\beta A)\big[U(h;\beta A)\Phi - \Phi\big] + \int\limits_0^h U(t+h-\tau;\beta A)F(W(\tau))\,d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t U(t-\tau;\beta A)\omega(W(\tau), H_h(\tau))\,d\tau + \int\limits_0^t U(t-\tau;\beta A)F'(W(\tau))H_h(\tau)\,d\tau.$$

Оценивая норму $H_h(t)$, получаем интегральное неравенство

$$\|H_h(t)\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \|U(h;\beta A)\Phi - \Phi\|_{C[\mathbb{R}]} + \int\limits_0^h \|F(W(\tau))\|_{C[\mathbb{R}]}\,d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \|\omega(W(\tau), H_h(\tau))\|_{C[\mathbb{R}]}\,d\tau + \int\limits_0^t \|F'(W(\tau))H_h(\tau)\|_{C[\mathbb{R}]}\,d\tau.$$

Полагая $h > 0$ достаточно малым и учитывая оценки (20), (21), из последнего неравенства выводим

$$\|H_h(t)\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \|U(h;\beta A)\Phi - \Phi\|_{C[\mathbb{R}]} + \int\limits_0^h \|F(W(\tau))\|_{C[\mathbb{R}]}\,d\tau$$
$$+\left(\Omega + \frac{2|\gamma|}{a} W_*\right) \int\limits_0^t \|H_h(\tau)\|_{C[\mathbb{R}]}\,d\tau.$$

Откуда следует [13, с. 22] оценка нормы

$$\left\| \frac{1}{h}\Big[W(t+h) - W(t)\Big] \right\|_{C[\mathbb{R}]}$$

$$\leqslant \left\{ \left\| \frac{1}{h}\Big[U(h;\beta A)\Phi - \Phi\Big] \right\|_{C[\mathbb{R}]} + \frac{1}{h}\int\limits_0^h \|F(W(\tau))\|_{C[\mathbb{R}]}\,d\tau \right\} \exp\left\{ \left(\Omega + \frac{2|\gamma|}{a}W_*\right) t \right\}. \tag{23}$$

Так как для любого $\Phi \in C[\mathbb{R}]$ следует, что

$$\lim_{h\to 0}\left\| \frac{1}{h}\Big[U(h;\beta A)\Phi - \Phi\Big] \right\|_{C[\mathbb{R}]} = \|\beta A\Phi\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant 2|\beta|a^{-1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|,$$

а из непрерывности абстрактной функции $F(W(t))$, $t \in [0, t_*]$, вытекает предельное равенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_0^h \|F(W(\tau))\|_{C[\mathbb{R}]}\,d\tau = \|F(\Phi)\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \frac{2|\gamma|\sigma}{(\sigma+1)\,a}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi^{\sigma+1}(x)|,$$

то, переходя в неравенстве (23) к пределу при $h \to 0$, получим

$$\|W'(t)\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \Big[\|A\Phi\|_{C[\mathbb{R}]} + \|F(\Phi)\|_{C[\mathbb{R}]}\Big]\exp\left\{ \left(\Omega + \frac{2|\gamma|}{a}W_*\right) t \right\}. \tag{24}$$

Значит, обобщенное решение $W(t)$ дифференцируемо в полуинтервале $]0, t_*]$. Более того, для его нормы справедлива оценка (24).

Подводя итог, имеем

Теорема 2. *Пусть в задаче Коши* (16), (2) *начальное данное* $\varphi(x)$ *принадлежит пространству* $C[\mathbb{R}]$. *Тогда для* $t \in [0, t_*]$, *где*

$$\begin{cases} t_* < +\infty, & -1 < \sigma \leqslant 0, \\ t_* < \frac{(\sigma+1)a}{2|\gamma|\sigma}\sup_{x\in\mathbb{R}}(|\varphi(x)|)^{-\sigma}, & \sigma > 0, \end{cases}$$

существует единственное классическое решение $w = w(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,t_*]$, *этой задачи в пространстве* $C[\mathbb{R}]$, *которое может быть получено методом последовательных приближений:*

$$w_0(x,t) = \exp\left(-\frac{\beta}{a}\,t\right)$$

$$\times\left[\varphi(x) + \sqrt{\frac{|\beta|}{\pi a}}t\int\limits_0^{+\infty}\exp(-s)G_{J_1}^{I_1}(\beta,a,s,t)\frac{ds}{\sqrt{s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\xi^2)\varphi(x+2\sqrt{s}\xi)\,d\xi\right],$$

$$w_{i+1}(x,t) = w_0(x,t) + \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{\beta}{a}\tau\right)d\tau\Bigg\{F(w_i(x,t-\tau))$$

$$+\sqrt{\frac{|\beta|}{a\pi}}\tau\int\limits_0^{+\infty}\exp(-s)\,G_{J_1}^{I_1}(\beta,a,s,t)\frac{ds}{\sqrt{s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\big(-\xi^2\big)F\big(w_i(x+2\sqrt{s}\xi,t-\tau)\big)\,d\xi\Bigg\},\quad i\to+\infty,$$

где функция $G_{J_1}^{I_1}(\beta, a, s, t)$ *определяется формулой* (10), *а*

$$F(w_i(x,t)) = \frac{\gamma}{(\sigma+1)a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \exp(-s)\, ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2)\, w_i^{\sigma+1}(x + 2\sqrt{as}\xi, t)\, d\xi - \frac{\gamma w_i^{\sigma+1}(x,t)}{(\sigma+1)\, a}.$$

Для решения $w(x,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, t_*]$, *справедлива оценка*

$$\begin{cases} \sup_{x\in\mathbb{R}} |w(x,t)| \leqslant \left\{ (\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|)^{-\sigma} - \frac{2|\gamma|\sigma}{(\sigma+1)a}\, t \right\}^{-1/\sigma}, & -1 < \sigma < 0, \\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |v(x,t)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \exp\left(\frac{2|\gamma|}{a} t \right), & \sigma = 0, \\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |v(x,t)| \leqslant \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|}{\left\{ 1 - \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \right)^{\sigma} \frac{2|\gamma|\sigma}{(\sigma+1)a} t \right\}^{1/\sigma}}, & \sigma > 0. \end{cases} \tag{25}$$

3. Задача Коши для уравнения Аллера в случае непрерывной зависимости коэффициента диффузитивности от влажности

В уравнении Аллера (1) в общем случае [1, с. 137] коэффициент диффузитивности равен $d(w) = K\partial\psi/\partial w$, где K — коэффициент влагопроводности, а ψ — сумма капиллярного потенциала влажности. Предположим, что коэффициент диффузитивности

$$d(w) = \Psi'(w) = \frac{d\Psi(w)}{dw}, \tag{26}$$

где $\Psi(w)$ — некоторая заданная положительнозначная неубывающая непрерывно дифференцируемая функция. Тогда уравнение Аллера (1) примет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, \Psi(w). \tag{27}$$

В пространстве $C[\mathbb{R}]$ уравнение (27) можно переписать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$W_t = \widetilde{\Psi}(W), \tag{28}$$

где $W = W(t) : t \to w(x,t)$ — искомая абстрактная функция, определенная для $t \geqslant 0$ и со значениями в пространстве $C[\mathbb{R}]$, а

$$\widetilde{\Psi}(W) = \frac{1}{a} \left[\left(I - a\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} - I \right] \Psi(W) \tag{29}$$

— непрерывно дифференцируемое по Фреше отображение из $C[\mathbb{R}]$ в $C[\mathbb{R}]$.

Предположим, что функция $\Psi(w)$ в пространстве $C[\mathbb{R}]$ удовлетворяет условию

$$\|\Psi(w)\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \Psi\Big(\|w\|_{C[\mathbb{R}]} \Big). \tag{30}$$

Заметим, что и в случае степенной зависимости коэффициента диффузитивности от влажности и в случае почв типа Гарднера условие (30) выполняется.

Переходя от абстрактной задачи Коши (28), (18) к эквивалентной задаче нахождения непрерывного решения интегрального уравнения

$$W(t) = \Phi + \int_0^t \widetilde{\Psi}(W(\tau))\,d\tau \tag{31}$$

и используя локальное условие Липшица для оператора $\widetilde{\Psi}(W)$, согласно принципу сжимающих отображений в некотором шаре

$$S_r(\Phi) = \Big\{W(t) \in C\big([0,t^*], C[\mathbb{R}]\big) : \|W(t) - \Phi\| \leqslant r\Big\},$$

где $C\big([0,t^*], C[\mathbb{R}]\big)$ — банахово пространство непрерывных на $[0,t^*]$ абстрактных функций $W(t)$ со значениями в $C[\mathbb{R}]$ и с нормой $\|W(t)\|_C = \max_{t\in[0,t^*]} \|W(t)\|_{C[\mathbb{R}]}$, существует единственное решение интегрального уравнения (31), а значит и задачи Коши (28), (18). Это решение может быть получено как предел последовательности

$$W_0(t) = \Phi, \quad W_{i+1}(t) = \Phi + \int_0^t \widetilde{\Psi}(W_i(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0,t^*],\ \ i = 0,1,\ldots$$

Используя явный вид (29) нелинейного оператора $\widetilde{\Psi}(W(\tau))$ и предположение (30), из интегрального уравнения (31) выводим интегральное неравенство

$$\|W(t)\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \|\Phi\|_{C[\mathbb{R}]} + \frac{2}{a}\int_0^t \Psi\Big(\|W(\tau)\|_{C[\mathbb{R}]}\Big)\,d\tau, \quad t \in [0,t^*],$$

откуда следует [13, с. 24–26] оценка

$$\|W(t)\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant G^{-1}\Big(G\Big(\|\Phi\|_{C[\mathbb{R}]}\Big) + \frac{2}{a}\,t\Big),$$

где $G(\eta) = \int_\xi^\eta \frac{ds}{\Psi(s)}$, $\xi > 0$, $\eta > 0$, для всех $t \in [0,t_*] \subset [0,t^*]$, для которых геометрическое множество точек $\big\{G(\|\Phi\|_{C[\mathbb{R}]}) + \frac{2}{a}\,t\big\}\big|_{t\in[0,t_*]}$ принадлежит области существования обратной функции G^{-1}.

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Пусть для коэффициента диффузитивности $d(w)$ в уравнении Аллера (1) справедливо представление (26): $d(w) = \Psi'(w) = d\Psi(w)/dw$, где $\Psi(w)$ — заданная положительнозначная неубывающая непрерывно дифференцируемая функция, которая в пространстве $C[\mathbb{R}]$ удовлетворяет условию $\|\Psi(w)\|_{C[\mathbb{R}]} \leqslant \Psi(\|w\|_{C[\mathbb{R}]})$. Тогда для решения задачи Коши для уравнения Аллера (27) в пространстве $C[\mathbb{R}]$ справедлива оценка нормы*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |w(x,t)| \leqslant G^{-1}\Big(G\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|\Big) + \frac{2}{a}\,t\Big),$$

где

$$G(\eta) = \int_\xi^\eta \frac{ds}{\Psi(s)}, \quad \xi > 0,\ \ \eta>0,$$

для всех значений t, для которых значения функции

$$\eta(t) = G\biggl(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\biggr) + \frac{2}{a}\,t$$

принадлежат области определения обратной функции $G^{-1}(\eta)$.

Литература

1. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.—352 с.
2. *Нахушев А. М.* О некоторых способах линеаризации уравнений движения грунтовых вод и почвенной влаги // Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики.—Нальчик: КБГУ, 1979.—Вып. 2.—С. 173–183.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.
4. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР.—1987.—Т. 297, № 3.—С. 547–552.
5. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Диф. уравнения.—2004.—Т. 40, № 6.—С. 763–774.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.—895 с.
7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1967.—464 с.
8. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1971.—104 с.
9. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа.—М.: Высш. школа, 1982.—271 с.
11. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.—N. Y.: Springer-Verlag, 1983.—279 p.—(Appl. Math. Sci. Vol. 44).
12. *Appell J., Zabreiko P. P.* Nonlinear Superposition Operators.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.—320 p.
13. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1976.—152 с.

Статья поступила 12 октября 2012 г.

Умаров Хасан Галсанович
Чеченский государственный университет,
доцент кафедры дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 364907, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: umarov50@mail.ru

SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE ALLER EQUATION IN SPACE OF BOUNDED CONTINUOUS FUNCTIONS

Umarov Kh. G.

Solvability of the Cauchy problem for Aller differential equation is reduced to the abstract Cauchy problem in Banach space of bounded continuous functions on the real axis.

Key words: Aller equation, strongly continuous semi-groups of operators.