Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 19–29

УДК **517.956**

О ЗНАКЕ ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[1]

Р. Ч. Кулаев

В работе рассматривается краевая задача для уравнения четвертого порядка на графе, моделирующая упругие деформации плоской стержневой системы с условиями жесткого соединения в узлах. Исследуются свойства функции Грина краевой задачи. Доказываются ее существование, непрерывность, симметричность и неотрицательность.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение на графе, функция Грина задачи на графе.

В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение четвертого порядка на сети (геометрическом графе), являющееся моделью стержневой конструкции. Первые работы по дифференциальным уравнениям на сетях появились в начале 80-х годов XX века и связаны были главным образом с исследованием задачи Штурма — Лиувилля (см. [1, 2]). Уравнения четвертого порядка на сетях стали рассматриваться только в 90-х годах [3–9]. В них исследовались, как правило, различные системы стержней, описываемых уравнениями на ребрах и различными условиями шарнирного и упруго-шарнирного закрепления. Несмотря на кажущуюся простоту формулировок, даже модели физического происхождения оказываются очень трудными для анализа [6, 9]. На сегодняшний день изучены некоторые вопросы связанные с методами граничного и внутреннего управления [3–5, 7]. Эти результаты получены методами функционального анализа для которых безразлична структура графа. Также получен ряд общих результатов, касающихся уравнений произвольного порядка, для которых вид краевых условий и условий связи в узлах не играет ключевой роли. Здесь можно отметить такие вопросы из теории функции Грина как существование, построение, непрерывность [1, 2].

Что касается качественных свойств дифференциальных уравнений четвертого порядка на графах, то здесь, также, основные результаты относятся к моделям стержней с условиями шарнирного и упруго-шарнирного сочленения. Получены условия разрешимости, установлен принцип максимума, на основе которого доказана положительная обратимость краевой задачи и положительность ее функции Грина [1, 6, 8, 9].

В центре внимания настоящей работы модель сетки из стержней с условиями жесткого сочленения. На сегодняшний день для таких задач исследовались некоторые вопросы из спектральной теории (структура и асимптотика спектра, базисность корневых функций [3, 10]) и вопросы граничного и внутреннего управления [6, 9]. В случае условий жесткого сочленения стержней принцип максимума уже не выполняется и методы работ [1, 6, 8, 9] не применимы. Более того, соответствующая краевая задача не является положительно обратимой.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8210.

В данной статье нас будут интересовать условия, при которых функции Грина сохраняет знак. Этот вопрос уже изучался в работе [11], где рассмотрена краевая задача, заданная на графе–пучке, состоящем из трех ребер. Была доказана положительность функции Грина на диагональных квадратах и сформулировано достаточное условие положительности функции Грина. В настоящей работе мы рассматриваем более общий случай. Точнее, рассматривается задача на графе, каждый узел которого образован тремя ребрами. Будет показано, что функция Грина непрерывна и симметрична. Также будет установлено достаточное условие неотрицательности, а в случае графа-дерева условие строгой положительности функции Грина.

1. Постановка задачи

Под геометрическим графом в настоящей работе понимается связное множество, обозначаемое через Γ, имеющее структуру сети и вложенное в $\mathbb{R}^N$. Ребро графа — это интервал в $\mathbb{R}^N$, а вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. При этом ребра графа занумерованы и обозначаются через γ_i, а вершины — через a, b или a_j, b_j (при этом предполагается, что нумерация вершин независима от нумерации ребер).

Обозначим через $J(\Gamma)$ — множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем внутренними. Вершины графа не принадлежащие $J(\Gamma)$ будем называть граничными и обозначать их множество через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a обозначим $I(a)$. Множество, получаемое удалением из графа всех его вершин, обозначим через $\overset{\circ}{\Gamma}$. Подграфом графа Γ назовем любое связное подмножество графа Γ.

Под функцией на графе понимается отображение $u : \overset{\circ}{\Gamma} \to \mathbb{R}$. Через $u_i(x)$ будем обозначать сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i. Если a — граничная вершина графа Γ, то под $u(a)$ понимается $\lim_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, $i \in I(a)$. Во внутренних вершинах графа функцию мы не определяем. Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ. Для таких функций в каждой вершине $a \in J(\Gamma)$ при $i \in I(a)$ существует предел $\lim_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, который мы также обозначаем через $u_i(a)$. При этом величины $u_k(a)$ и $u_i(a)$ не обязаны совпадать при $k \neq i$ ($k, i \in I(a)$). Выделим в пространстве $C[\Gamma]$ подпространство функций, для которых $u_k(a) = u_i(a)$ при любой $a \in J(\Gamma)$ и любых $k, i \in I(a)$. Множество всех таких функций обозначим через $C(\Gamma)$ и назовем их непрерывными на графе. Такое определение вполне естественно, так как мы можем доопределить их по непрерывности на весь граф.

Введем понятие производной функции, заданной на графе. Для этого введем в рассмотрение функцию $\tau(x) \in C[\Gamma]$, взаимно однозначно отображающую каждое ребро γ_i на некоторый интервал $(0, l_i)$ при $l_i > 0$. Функцию $\tau(x)$ будем называть *метрической*, а величину l_i — *длиной ребра* γ_i. Для сужения функции $\tau(x)$ на ребро γ_i существует обратное отображение $x(\tau)$ интервала $(0, l_i)$ на ребро γ_i. Метрическая функция определяет на каждом ребре графа ориентацию. Функцию $u(x)$ назовем *дифференцируемой на графе* Γ, если для каждого ребра γ_i дифференцируема по переменной τ суперпозиция $u(x(\tau))$. При этом полагаем $u'(x) = \frac{du(x(\tau))}{d\tau}$. Подчеркнем, что производные нечетных порядков зависят от направления ориентации ребер графа, т. е. определяются с точностью до знака. Эта двойственность не сказывается на производных четного порядка. Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$, производные которых до порядка n

включительно существуют и принадлежат пространству $C[\Gamma]$, а через $C^n(\Gamma)$ обозначаем $C^n[\Gamma]\bigcap C(\Gamma)$.

Дифференциальное уравнение на графе — это совокупность дифференциальных уравнений на ребрах графа. Под интегралом функции $u(x)\in C[\Gamma]$ по графу Γ, понимаем сумму интегралов по всем ребрам графа. При этом интеграл вдоль ребра $\gamma\in\Gamma$ определяется с помощью метрической функции через интеграл Римана — Стильтьеса: если $\gamma=(a,b)$ некоторое ребро графа и $\tau(x)$ — метрическая функция, причем $\lim_{\gamma\ni x\to a}\tau(x)=0$, $\lim_{\gamma\ni x\to b}\tau(x)=l$, то, полагая $\tau(a)=0$ и $\tau(b)=l$, строим разбиение $x_0,x_1,\ldots,x_n$ отрезка $[a,b]$ такое, что $\tau(a)=\tau(x_0)<\tau(x_1)<\ldots<\tau(x_n)=\tau(b)$, выбираем произвольные точки $\xi_i\in\gamma$, для которых $\tau(x_{i-1})\leqslant\tau(\xi_i)\leqslant\tau(x_i)$, и вводим обозначения $\Delta\tau_i=\tau(x_{i+1})-\tau(x_i)$, $\lambda=\max_i\Delta\tau_i$. Тогда интеграл определяется по формуле

$$\int\limits_\gamma u(x)\,dx:=\lim_{\lambda\to0}\sum_i u(x(\xi_i))\Delta\tau_i=\int\limits_0^l u(x(\tau))\,d\tau.$$

Нами будет рассматриваться дифференциальное уравнение

$$Lu\equiv(p(x)u'')''=f(x),\quad x\in\Gamma,\tag{1}$$

заданное на геометрическом графе Γ.

В каждой граничной вершине a графа Γ решение уравнения должно удовлетворять условиям

$$u(a)=0,\tag{2}$$

$$u''(a)=0,\quad a\in\partial\Gamma.\tag{3}$$

А в каждой внутренней вершине a на решение уравнения (1) накладываются условия непрерывности

$$u_i(a)=u_j(a),\quad i,j\in I(a),$$

условия гладкого согласования

$$u'_{i_1}(a)+\alpha_2(a)u'_{i_2}(a)+\alpha_3(a)u'_{i_3}(a)=0,\quad i_j\in I(a),\tag{4}$$

и условия на старшие производные

$$\begin{gathered}\alpha_2(a)p_{i_1}(a)u''_{i_1}(a)-p_{i_2}(a)u''_{i_2}(a)=0,\quad \alpha_3(a)p_{i_1}(a)u''_{i_1}(a)-p_{i_3}(a)u''_{i_3}(a)=0,\\ \sum_{i\in I(a)}(p_i(a)u''_i(a))'=0,\quad a\in J(\Gamma).\end{gathered}\tag{5}$$

В условиях (4), (5) производные считаются в направлении к вершине графа.

При исследовании задачи (1)–(5) мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

• $p\in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma}p(x)>0$, $f\in C[\Gamma]$;

• $\partial\Gamma\neq\varnothing$;

• к каждой внутренней вершине a примыкает ровно три ребра.

Иногда, для аналогии, нам будет удобно считать, что в условии (4) при $u'_{i_1}(a)$ стоит сомножитель $\alpha_1(a)=1$.

Рассматриваемая задача имеет естественную физическую интерпретацию [10, 12]. Она моделирует деформации плоской стержневой системы, все элементы которой прямолинейны и лежат в одной плоскости. При этом полагается, что вся система закреплена в каждой граничной точке и все стержни жестко сочленены в каждой их общей вершине. В этом случае условия (2)–(5) можно трактовать следующим образом:

1) Условия (3) означают условие шарнирного закрепления.

2) Условия (4) описывают компланарность троек касательных векторов $u'_{i_j}(a)$, $i_j \in I(a)$: если θ_{ks} — угол между осевыми линиями i_k-го и i_s-го стержней, примыкающих к вершине $a \in J(\Gamma)$, то $\alpha_2(a) = \frac{\sin\theta_{31}}{\sin\theta_{23}}$, $\alpha_3(a) = \frac{\sin\theta_{12}}{\sin\theta_{23}}$, причем фиксированные индексы i_2 и i_3 выбираются так, чтобы $0 < \theta_{23} < \pi$.

3) Условия на вторые производные в (5) определяют баланс изгибающих моментов.

4) Ну и наконец, последнее из равенств (5) — условие баланса сил.

2. Невырожденность задачи (1)–(5)

В первую очередь установим достаточное условие, при котором рассматриваемая задача невырождена.

Краевую задачу (1)–(5) называем *невырожденной*, если соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Очевидно, что задача (1)–(5) однозначно разрешима для любой правой части $f \in C[\Gamma]$ тогда и только тогда, когда она невырождена. Следовательно, невырожденность задачи гарантирует существование функции Грина [1, гл. 3].

Теорема 1. *Если* $\alpha_2(a) > 0$ *и* $\alpha_3(a) > 0$ *для каждой вершины* $a \in J(\Gamma)$, *то задача* (1)–(5) *невырождена.*

$\lhd$ Пусть u — некоторое решение однородного уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее условиям (2)–(5). Умножим функцию u на Lu и проинтегрируем по всему графу Γ.

$$0 = \int\limits_\Gamma Lu \cdot u\,dx = \int\limits_\Gamma (pu'')''u\,dx.$$

Проинтегрируем в правой части первое слагаемое по частям два раза, а второе слагаемое — один раз. Тогда, привлекая условия (2)–(5), имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma Lu \cdot u\,dx = -\sum_{a\in\partial\Gamma}\Big[(pu'')u' - (pu'')'u\Big]_{x=a}\\ -\sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)}\Big[(p_iu_i'')u_i' - (p_iu_i'')'u_i\Big]_{x=a} + \int\limits_\Gamma p(u'')^2\,dx = -\sum_{a\in\partial\Gamma} p(a)u''(a)u'(a)\\ -\sum_{a\in J(\Gamma)}\Big[p_{i_1}(a)u''_{i_1}(a)\big[-\alpha_2(a)u'_{i_2}(a) - \alpha_3(a)u'_{i_3}(a)\big] + p_{i_2}(a)u''_{i_2}(a)u'_{i_2}(a)\\ +p_{i_3}(a)u''_{i_3}(a)u'_{i_3}(a)\Big] + \sum_{a\in J(\Gamma)}u(a)\sum_{i\in I(a)}(p_iu_i'')'(a) + \int\limits_\Gamma p(u'')^2\,dx\\ = \sum_{a\in J(\Gamma)}u'_{i_2}(a)\Big[\alpha_2(a)p_{i_1}(a)u''_{i_1}(a) - p_{i_2}u''_{i_2}(a)\Big]\\ +\sum_{a\in J(\Gamma)}u'_{i_3}(a)\Big[\alpha_3(a)p_{i_1}(a)u''_{i_1}(a) - p_{i_3}u''_{i_3}(a)\Big] + \int\limits_\Gamma p(u'')^2\,dx = \int\limits_\Gamma p(u'')^2\,dx = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Из условия $\inf_{x\in\Gamma} p(x) > 0$ следует, что $u'' \equiv 0$ на Γ, т. е. u — линейная функция на каждом ребре графа. Из линейности функции u на каждом ребре графа следует, что максимальное значение $|u(x)|$ достигается в $J(\Gamma)$.

Пусть $a \in J(\Gamma)$ такая, что $|u(a)| = \max_{x\in\Gamma}|u(x)|$. Можно считать, что a — точка максимума функции u. Тогда функция u возрастает к вершине a по всем примыкающим ребрам, что влечет $u_i'(a) \geqslant 0$, $i \in I(a)$. По условию теоремы $\alpha_2(a) > 0$ и $\alpha_3(a) > 0$. Выписывая соответствующее условие компланарности (4), получим равенство

$$u_{i_1}'(a) + \alpha_2 u_{i_2}'(a) + \alpha_3 u_{i_3}'(a) = 0,$$

в котором все слагаемые неотрицательны. Отсюда следуют равенства $u_{i_s}'(a) = 0$, $s \in I(a)$, из которых, в свою очередь, следует, что $u_{i_s}'(x) = 0$ для всех индексов $i_s \in I(a)$. Значит функция u принимает свое максимальное значение во всех вершинах смежных с a. Если среди них есть хотя бы одна граничная вершина, то, учитывая условия (2), получим, что $\max_{x\in\Gamma}|u(x)| = 0$. Если же среди вершин смежных с a нет граничных, то повторяем предыдущие рассуждения для каждой из них.

Доказательство теоремы сразу следует из вышеизложенного и того, что Γ — конечный граф с непустой границей. $\rhd$

Следствие. *Задача* (1)–(5) *остается невырожденной, если в некоторых граничных вершинах графа* Γ *условие* (3) *заменить на условие* $u'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$.

$\lhd$ Если в каждой граничной вершине a графа выполнено одно из условий $u'(a) = 0$ или $u''(a) = 0$, то в (6) сумма, отвечающая граничным вершинам, все равно остается равной нулю. Поэтому формула (6) и все последующие рассуждения также остаются справедливыми. $\rhd$

3. Функция Грина задачи (1)–(5)

Этот параграф посвящен анализу функции Грина задачи (1)–(5), а точнее вопросу о положительности последней. Поскольку мы рассматриваем дифференциальное уравнение на графе как единое целое, то и функцию Грина мы понимаем как обобщенное решение уравнения на графе.

Определение. *Функцией Грина* невырожденной краевой задачи назовем функцию $G(x,s)$ такую, что решение задачи может быть представлено в виде

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} G(x,s) f(s)\, ds.$$

Из результатов монографии [1] следует, что если краевая задача (1)–(5) невырождена, то функция Грина существует и обладает следующими свойствами:

1) функция $G(x,s)$ вместе со своими производными по x до четвертого порядка непрерывна по совокупности переменных вплоть до границы на каждом из прямоугольников $\gamma_i \times \gamma_j$ $(i \neq j)$ и на каждом из треугольников, на которые диагональю $x = s$ разбивается квадрат $\gamma_i \times \gamma_i$;

2) при каждом фиксированном s, являющемся внутренней точкой некоторого ребра γ, функция $G(x,s)$ по x удовлетворяет однородному уравнению

$$(p_i(x) u_i'')'' = 0$$

при $x \in \gamma_i \neq \gamma$ и при $x \in \gamma$, $x \neq s$;

3) при каждом фиксированном s, являющемся внутренней точкой некоторого ребра $\gamma \in \Gamma$, функция $G(x,s)$ по x удовлетворяет условиям (2)–(5);

4) функция $G(x,s)$ на диагонали $x=s$ удовлетворяет условиям непрерывности вместе со своими производными $\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}$ и условию скачка третьей производной по x

$$\frac{\partial^3 G(s+0,s)}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 G(s-0,s)}{\partial x^3}=\frac{1}{p(s)},$$

где ориентация предельного перехода $s\pm 0$ и направление дифференцирования определяются заданной на графе метрической функцией;

5) при $s=a\in J(\Gamma)$ функция $G(x,a)$ является решениям однородного уравнения (1) на Γ, удовлетворяет всем однородным краевым условиям (2)–(4) за исключением условия на третьи производные, которое заменяется на неоднородное условие $\sum_{i\in I(a)}(p_i(a)u_i''(a)'=-1$;

6) функция $G(x,s)$ условиями 1)—4) определяется однозначно.

Используя сформулированные общие свойства функции Грина, мы теперь можем доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $\alpha_2(a)>0$, $\alpha_3(a)>0$ для каждой вершины $a\in J(\Gamma)$, то функция Грина задачи* (1)–(5) *существует, непрерывна по совокупности переменных на $\Gamma\times\Gamma$ и удовлетворяет свойству симметричности $G(x,s)=G(s,x)$.*

$\lhd$ Существование функции Грина следует из теоремы 1. Непрерывность внутри каждого прямоугольника $\gamma_i\times\gamma_j$ следует из свойств 1), 4). Что же касается непрерывности на $\Gamma\times\big(\partial\Gamma\cup J(\Gamma)\big)$, то она сразу следует из свойства 5).

Докажем симметричность. Для этого, очевидно, достаточно показать самосопряженность дифференциального оператора L, порожденного соотношениями (1)–(5).

Пусть u, w — функции из области определения оператора L, т. е. функции класса $C^4(\Gamma)$, удовлетворяющие условиям (2)–(5). Умножим функцию v на Lu и проинтегрируем по всему графу Γ. Интегрируя в правой части по частям первое слагаемое два раза, а второе слагаемое один раз, имеем

$$\int\limits_\Gamma Lu\cdot w\,dx=-\sum_{a\in\partial\Gamma}\Big[(pu'')w'-(pu'')'w\Big]_{x=a}$$
$$-\sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)}\Big[(p_iu_i'')w_i'-(p_iu_i'')'w_i\Big]_{x=a}+\int\limits_\Gamma pu''w''\,dx.$$

Привлекая условия (2)–(5) для правой части последнего равенства, получим

$$-\sum_{a\in\partial\Gamma}(pu'')w'|_{x=a}-\sum_{a\in J(\Gamma)}w(a)\sum_{i\in I(a)}(pu'')'(a)+\int\limits_\Gamma pu''w''\,dx$$
$$-\sum_{a\in J(\Gamma)}\Big[p_{i_1}(a)u_{i_1}''(a)\big[\alpha_2(a)w_{i_2}'(a)+\alpha_3(a)w_{i_3}'(a)\big]-p_{i_2}(a)w_{i_2}''(a)u_{i_2}'(a)$$
$$-p_{i_3}(a)u_{i_3}''(a)w_{i_3}'(a)\Big]=-\sum_{a\in J(\Gamma)}w_{i_2}'(a)\Big[\alpha_2(a)p_{i_1}(a)u_{i_1}''(a)-p_{i_2}u_{i_2}''(a)\Big]$$
$$-\sum_{a\in J(\Gamma)}w_{i_3}'(a)\big[\alpha_3(a)p_{i_1}(a)u_{i_1}''(a)-p_{i_3}u_{i_3}''(a)\big]+\int\limits_\Gamma pu''w''\,dx=\int\limits_\Gamma pw''u''\,dx.$$

В последнем интеграле еще раз интегрируем по частям два раза, а затем аналогичными преобразованиями, с заменой местами u и w, получаем

$$\int\limits_{\Gamma} Lu \cdot w\,dx = \int\limits_{\Gamma} Lw \cdot u\,dx. \ \triangleright$$

Лемма 1. *Функция Грина $G(x,s)$ строго положительна на диагонали $x = s$, $x, s \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$.*

$\triangleleft$ Пусть s_0 — произвольная точка графа Γ. Покажем, что $G(s_0, s_0) > 0$. Обозначим через $g_{s_0}(x)$ срезку $G(x, s_0)$ функции Грина. Умножим обе части тождества $Lg_{s_0}(x) = 0$, $x \in \Gamma \setminus \{s_0\}$, на функцию $g_{s_0}(x)$ и проинтегрируем. Тогда, используя свойства 1)–5) функции Грина для случая $s_0 \in \overset{\circ}{\Gamma}$, получаем

$$\begin{aligned}
0 = {} & \int\limits_{\Gamma} Lg_{s_0} \cdot g_{s_0}\,dx \\
= {} & -\sum_{a\in\partial\Gamma} \Big[(pg''_{s_0})g'_{s_0} - (pg''_{s_0})'g_{s_0}\Big]_{x=a} + \Big[(pg''_{s_0})g'_{s_0} - (pg''_{s_0})'g_{s_0}\Big]_{x=s_0+0}^{x=s_0-0} \\
& + \sum_{a\in J(\Gamma)} \sum_{i\in I(a)} \Big[(p_i g''_{s_0 i})g'_{s_0 i} - (p_i g''_{s_0 i})'g_{s_0 i}\Big]_{x=a} + \int\limits_{\Gamma} p(g''_{s_0})^2\,dx \\
= {} & \sum_{a\in J(\Gamma)} g'_{s_0}(a) \sum_{i\in I(a)} \Big[\alpha_2(a)p_{i_1}(a)g''_{s_0 i_1}(a) + p_{i_2}(a)g''_{s_0 i_2}(a)\Big] \\
& + \sum_{a\in J(\Gamma)} g'_{s_0}(a) \sum_{i\in I(a)} \Big[\alpha_3(a)p_{i_1}(a)g''_{s_0 i_1}(a) + p_{i_3}(a)g''_{s_0 i_3}(a)\Big] - g_{s_0}(s_0) \\
& + \int\limits_{\Gamma} p(g''_{s_0})^2\,dx = \int\limits_{\Gamma} p(g''_{s_0})^2\,dx\,dx - g_{s_0}(s_0).
\end{aligned}$$

Так как $g_{s_0}(x) \not\equiv 0$, интеграл величина строго положительная, поэтому справедливо неравенство $g(s_0) = G(s_0, s_0) > 0$.

Случай $s_0 \in J(\Gamma)$ рассматривается аналогично. $\triangleright$

Перейдем теперь к доказательству положительности функции Грина. Для этого представим задачу (1)–(5) в виде суперпозиции двух самостоятельных краевых задач для уравнений второго порядка:

задача 1.

$$\begin{gathered}
L_* u \equiv -u'' = \frac{v(x)}{p(x)}, \quad u \in C^2(\Gamma), \\
u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad \sum_{i\in I(a)} \alpha_i(a)u'_i(a) = 0;
\end{gathered} \tag{$*$}$$

задача 2.

$$\begin{gathered}
L_{**} v \equiv -v'' = f(x), \quad v \in C^2[\Gamma], \\
v|_{\partial\Gamma} = 0, \quad \widetilde{\alpha}_i(a)v_1(a) = v_i(a), \quad \widetilde{\alpha}_i(a) = \frac{\alpha_i(a)}{\alpha_1(a)}, \quad i = 1, 2, \\
\sum_{i\in I(a)} v'_i(a) = 0.
\end{gathered} \tag{$**$}$$

Лемма 2. *Задача* $(*)$ *является сопряженной для задачи* $(**)$.

$\lhd$ Пусть $u(x)$ — функция из области определения оператора L_*, порождающего задачу $(*)$, а $v(x)$ — функция из области определения оператора L_{**}, порождающего задачу $(**)$. Умножим выражение L_*u на функцию v и проинтегрируем. Тогда учитывая условия, которым удовлетворяют функции $u(x)$ и $v(x)$ в вершинах графа, и считая $\alpha_1(a) = 1$, для всех $a \in J(\Gamma)$, получим:

$$\int\limits_\Gamma L_*u \cdot v\,dx = \sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)} v_i(a)u_i'(a) + \sum_{a\in\partial\Gamma} v(a)u'(a) - \int\limits_\Gamma u'v'\,dx$$

$$= \sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)} \frac{v_i(a)}{\alpha_i(a)}\alpha_i(a)u_i'(a) - \sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)} v_i'(a)u_i(a) - \sum_{a\in\partial\Gamma} v'(a)u(a) + \int\limits_\Gamma u\cdot v''\,dx$$

$$= \sum_{a\in J(\Gamma)} v_1(a)\sum_{i\in I(a)}\alpha_i(a)u_i'(a) - \sum_{a\in J(\Gamma)} u(a)\sum_{i\in I(a)} v_i'(a) + \int\limits_\Gamma u\cdot L_{**}v\,dx = \int\limits_\Gamma u\cdot L_{**}v\,dx. \rhd$$

Задача $(*)$ достаточно хорошо изучена. В работе [12] (см. также [1, § 2.4]) доказана ее невырожденность и неотрицательность ее функции Грина. Если обозначить через $G_*(x,s)$ функцию Грина задачи $(*)$, то, следуя результатам [13, 14], можно записать неравенство $G_*(x,s) \geqslant 0$, справедливое на $\Gamma\times\Gamma$.

Пусть $G_{**}(x,s)$ — функция Грина задачи $(**)$. Тогда из леммы 2 следует соотношение

$$G_*(x,s) = G_{**}(s,x) \geqslant 0. \tag{7}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_i(a) > 0$ *для каждой вершины* $a \in J(\Gamma)$. *Тогда функция Грина* $G(x,s)$ *задачи* (1)–(5) *неотрицательна на* $\Gamma\times\Gamma$ *и допускает представление*

$$G(x,s) = \int\limits_\Gamma G_*(x,\xi)G_*(s,\xi)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}.$$

$\lhd$ Из определения функции Грина следует, что решение $g(x)$ задачи $(**)$ можно представить в виде

$$v(x) = \int\limits_\Gamma G_{**}(x,s)f(s)\,ds, \tag{8}$$

а решение $u(x)$ задачи $(*)$ — в виде

$$u(x) = \int\limits_\Gamma G_*(x,\xi)\frac{v(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi. \tag{9}$$

Из этих равенств и (7) получаем

$$u(x) = \int\limits_\Gamma G_*(x,\xi)\frac{v(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi = \int\limits_\Gamma G_*(x,\xi)\int\limits_\Gamma G_{**}(\xi,s)f(s)\,ds\,\frac{d\xi}{p(\xi)}$$

$$= \int\limits_\Gamma G_*(x,\xi)\int\limits_\Gamma G_*(s,\xi)f(s)\,ds\,\frac{d\xi}{p(\xi)} = \int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma G_*(x,\xi)G_*(s,\xi)\frac{d\xi}{p(\xi)}\,f(s)\,ds = \int\limits_\Gamma G(x,s)f(s)\,ds.$$

Покажем, что полученное представление функции $u(x)$ действительно дает решение задачи (1)–(5).

Выполнение равенства (1) следует из (8), (9) и равенств

$$Lu = L_{**}pL_*u = L_{**}v = f.$$

Выполнение условий (2), (4) и условий непрерывности во внутренних вершинах графа следует из (9) и определения функции Грина $G_*(x,s)$ задачи $(*)$. А выполнение условий (3), (5) следует из равенств

$$p(x)u(x)'' = p(x)\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_\Gamma G_*(x,\xi)\int\limits_\Gamma G_{**}(\xi,s)f(s)\,ds\,\frac{d\xi}{p(\xi)} = -\int\limits_\Gamma G_{**}(x,s)f(s)\,ds,$$

и определения функции Грина $G_{**}(x,s)$ задачи $(**)$. $\triangleright$

В случае, когда граф Γ не имеет циклов, функция Грина оказывается строго положительной.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha_i(a) > 0$ *для каждой вершины* $a \in J(\Gamma)$ *и граф* Γ *является деревом. Тогда функция Грина* $G(x,s)$ *задачи* (1)–(5) *строго положительна внутри* $\Gamma\times\Gamma$.

$\triangleleft$ Предположим противное. Тогда, с учетом теоремы 3, найдется точка (x_0,s_0), $x_0,s_0 \in \Gamma\setminus\partial\Gamma$, такая, что $G(x_0,s_0)=0$, причем, как следует из леммы 1, $x_0\neq s_0$.

Рассмотрим срезку $g(x) = G(x,s_0)$, $x\in\Gamma$. Из теоремы 3 следует, что функция g имеет в точке x_0 минимум.

Рассмотрим сначала случай когда x_0 — внутренняя вершина графа. Из условия (3) в вершине $x_0\in J(\Gamma)$ и неравенств $\alpha_i(a)>0$ следуют равенства $g(x_0)=g_i'(x_0)=0$ для всех $i\in I(x_0)$. Удалим из графа Γ вершину x_0. Он распадется на три компоненты связности $\Gamma_i(x_0)$, $i\in I(x_0)$. Обозначим через i_0 индекс одного из трех подграфов $\Gamma_i(x_0)$, который содержит точку s_0. Через $g_{\Gamma_i(x_0)}$ обозначим сужения функции g на $\Gamma_i(x_0)$, $i\in I(x_0)$. Тогда при $i\neq i_0$ каждая из функций $g_{\Gamma_i(x_0)}$ является на $\Gamma_i(x_0)$ решением однородного уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям $g_{\Gamma_i(x_0)}(x_0)=0$, $g'_{\Gamma_i(x_0)}(x_0)=0$ в вершине $x_0\in\partial\Gamma_i(x_0)$ и однородным условиям (2)–(5) во всех остальных вершинах графа $\Gamma_i(x_0)$. В силу следствия теоремы 1 $g_{\Gamma_i(x_0)}(x)\equiv 0$ при $i\neq i_0$, т. е. функция g равна тождественно нулю на двух из трех ребер, примыкающих к вершине x_0.

Предположим, что точка s_0 принадлежит замыканию ребра γ_{i_0}. Тогда функция g является решением однородного уравнения (1) на (s_0,x_0). В силу тождеств $g_i\equiv 0$ при $i\neq i_0$, $i\in I(x_0)$, и условий (3)–(5) в вершине $x_0\in J(\Gamma)$, функция g удовлетворяет в точке x_0 условиям $g_i^{(k)}(x_0)=0$ для $k=0,1,2,3$ и всех $i\in I(x_0)$. Отсюда сразу следует $g(x)\equiv 0$ при $x\in(x_0,s_0)$ и $g(s_0)=G(s_0,s_0)=0$, что противоречит утверждению леммы 1.

Следовательно, точка s_0 не может принадлежать замыканию ребра γ_{i_0}. Тогда из тех же соображений следует, что $g(x)\equiv 0$ на всем ребре γ_{i_0}. Обозначим через a конец ребра γ_{i_0}, отличный от x_0. Удалим из графа Γ вершину a. Он распадется на три компоненты связности $\Gamma_j(a)$, $j\in I(a)$. Как и выше, вводим обозначения $g_{\Gamma_j(a)}$ для сужений функции g на $\Gamma_j(a)$, $j\in I(a)$, и обозначаем через j_0 индекс того из трех подграфов $\Gamma_j(a)$, который содержит точку s_0. Так как $g\equiv 0$ на ребре $\gamma_{i_0}=(x_0,a)$, то при $j\neq j_0$ каждая из функций $g_{\Gamma_j(a)}$ является на $\Gamma_j(a)$ решением однородного уравнения (1) и, как следует из условий непрерывности и (5), удовлетворяет граничным условиям $g_{\Gamma_j(a)}(a)=0$, $g''_{\Gamma_j(a)}(a)=0$ в вершине $a\in\partial\Gamma_j(a)$ и однородным условиям (2)–(5) во всех остальных вершинах графа $\Gamma_j(a)$. Из теоремы 1 следует, что $g_{\Gamma_j(a)}(x)\equiv 0$ при $j\neq j_0$. Далее повторяются рассуждения, проведенные для вершины x_0.

Теперь утверждение теоремы для случая $x_0 \in J(\Gamma)$ следует из того, что граф Γ состоит из конечного числа ребер.

Рассмотрим теперь случай, когда x_0 — внутренняя точка некоторого ребра γ_{i_0} графа. Из леммы 1 следует, что g дифференцируема в точке x_0 и $g(x_0) = g'(x_0) = 0$. Удалим из графа Γ точку x_0. Он распадется на две компоненты связности Γ_1 и Γ_2. Если $s_0 \in \Gamma_1$, то, как показывает следствие теоремы 1, $g(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma_2$ и, следовательно, $g(x) \equiv 0$ на всем ребре γ_{i_0}. Дальнейшие рассуждения не отличаются от проведенных выше. Теорема полностью доказана. $\triangleright$

Литература

1. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.—М.: Физматлит, 2009.—192 с.
2. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.
3. *Dekoninck B., Nicase S.* The eigenvalue problem for network of beams // Generalized Functions, Operator Theory and Dimnamical Systems, Chapman and Hall Research in Math.—1999.—P. 335–344.
4. *Dekoninck B., Nicase S.* Control of network of Euler–Bernoulli beams // ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations.—1999.—Vol. 4.—P. 57–82.
5. *Lagnese J. E., Leugering G., Schmidt E. J. P. G* . Control of planar networks of Timoshenko beams // SIAM J. Control Optim.—1993.—Vol. 31.—P. 780–811.
6. *Xu G. Q., Mastorakis N.* Stability of a star-shaped coupled network of strings and beams // 10th WSEAS Int. Conf. on Math. Methods and Computational Techniques in Electrical Engineering.—2008.—P. 148–154.
7. *Боровских А. В., Мустафакулов Р. О., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Докл. РАН.—1995.—Т. 345, № 6.—С. 730–732.
8. *Покорный Ю. В., Мустафакулов Р. О.* О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения.—1997.—Т. 33, № 10.—С. 1358–1365.
9. *Покорный Ю. В., Мустафакулов Р. О.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе // Изв. вузов. Математика.—1999.—Т. 441, № 2.—С. 75–82.
10. *Завгородний М. Г., Майорова С. П.* Об одном уравнении математической физики четвертого порядка на графе // Исследования по дифференц. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008.—С. 88–102.
11. *Кулаев Р. Ч.* О функции Грина краевой задачи на графе–пучке // Изв. вузов. Математика.—2013.—№ 2.—С. 56–66.
12. *Завгородний М. Г.* Вариационные принципы построения моделей стержневых стержней // Мат. моделир. информационных и технологических систем.—Воронеж: Воронеж. гос. технол. академия, 2000.—Вып. 4.—С. 59–62.
13. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М.* О теоремах сравнения для уравнений на графах // Диф. уравнения.—1989.—Т. 25, № 7.—С. 1141–1150.
14. *Покорный Ю. В., Карелина И. Г.* О функции Грина задачи Дирихле на графе // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 318, № 3—С. 942–944.

Статья поступила 28 мая 2012 г.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: kulaevrch@mail.ru

ON THE SING OF THE GREEN'S FUNCTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER EQUATION ON A GRAPH

Kulaev R. Ch.

In this paper we consider a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph modeling the elastic deformation of the flat system of beams with the rigid connection conditions at the nodes. Some properties of the Green's function are investigated and a sufficient condition for its positivity is established.

Key words: differential equation on the graph, boundary value problem for a fourth-order equation on a graph, Green's function.