Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 82–90

УДК **517.9**

О ПОЛУГРУППЕ ОПЕРАТОРОВ СИЛЬЧЕНКО

А. Г. Чшиев

Исследуется класс полугрупп операторов с суммируемой особенностью в нуле и неплотным образом. Применяется подход, основанный на использовании линейных отношений в качестве генераторов полугруппы. Установлено существование базового генератора, получено представление резольвенты базового генератора в явном виде.

Ключевые слова: полугруппа операторов, генератор полугруппы, линейное отношение.

1. Введение

Всюду в работе через X обозначено комплексное банахово пространство, через $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Через $LR(X)$ обозначим множество линейных отношений [1–4] на пространстве X. Под *полугруппой операторов* понимается сильно непрерывная операторнозначная функция

$$T : (0, \infty) \to \operatorname{End} X$$

со свойством

$$T(t+s) = T(t)\,T(s) \quad \text{при всех } t, s > 0.$$

Под *ядром* и *образом полугруппы* понимаются соответственно подпространства

$$\operatorname{Ker} T = \bigcap_{t>0} \operatorname{Ker} T(t) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} T = \bigcup_{t>0} \operatorname{Im} T(t),$$

где $\operatorname{Ker} T(t)$ — ядро, а $\operatorname{Im} T(t)$ — образ оператора $T(t)$. В классическом смысле [5] понимается *инфинитезимальный оператор* A_0 полугруппы операторов T :

$$A_0 : D(A_0) \subset X \to X,$$

$$D(A_0) = \left\{ x \in X : \ \exists \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\},$$

$$A_0 x = \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Если полугруппа операторов является *вырожденной* [1, 2, 4, 6–9], т. е. подпространство $\operatorname{Ker} T$ ненулевое, то оператор A_0 имеет неплотную область определения, и, как правило, спектр $\sigma(A_0)$ оператора A_0 заполняет всю комплексную плоскость. Кроме того, оператор A_0 может быть незамыкаемым в классе операторов, а функция (преобразование Лапласа полугруппы T)

$$\lambda \mapsto -\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)\, d\tau$$

не обязательно является резольвентой оператора A_0. Более того, она может не быть резольвентой никакого линейного оператора. В результате возникают сложности с использованием спектральной теории инфинитезимального оператора для исследования свойств полугруппы. В последнее время для исследования полугрупп операторов применяется подход, основанный на использовании линейных отношений в качестве *генераторов* полугруппы (см. [1, 2, 4, 6, 7, 9]). Данный подход является эффективным с точки зрения применения спектральной теории генератора полугруппы для исследования свойств полугруппы. В частности, в статье [2] вводится определение и приводятся примеры генераторов полугруппы операторов, изучаются их общие свойства.

Согласно статье [2], введем в рассмотрение следующее подпространства:

$$X_c(T) = \Big\{ x \in X \colon \lim_{t \to 0+} T(t)x = x \Big\},$$

$$X_1(T) = \Big\{ x \in X \colon \int\limits_0^1 \|T(t)x\|\, dt < \infty \Big\},$$

$$\widetilde{X}_1(T) = \Big\{ x \in X_1(T) \colon \lim_{\eta \to 0+} \frac{1}{\eta} \int\limits_0^\eta T(t)x\, dt = x \Big\},$$

и дадим ряд определений.

Определение 1. *Строгим инфинитезимальным оператором* или *инфинитезимальным оператором в смысле Феллера* полугруппы T называется линейный оператор

$$\mathbb{A}_0 \colon D(\mathbb{A}_0) \subset X \to X,$$

$$D(\mathbb{A}_0) = \{ x \in D(A_0) \colon A_0 x \in X_c(T) \},$$

$$\mathbb{A}_0 x = A_0 x.$$

Таким образом, имеет место включение $\mathbb{A}_0 \subset A_0$.

Определение 2. *Старшим генератором* полугруппы T называется отношение $\mathbb{A} \in LR(X)$, состоящее из пар $(x, y) \in X \times X$ со свойствами:

1) $x \in \overline{\operatorname{Im} T}$;

2) верны равенства:

$$T(t)x - T(s)x = \int\limits_s^t T(\tau)y\, d\tau, \quad 0 < s \leqslant t < \infty.$$

Определение 3. *Генератором* полугруппы T называется отношение $\mathscr{A}$ из $LR(X)$, удовлетворяющее условиям:

1) $\mathbb{A}_0 \subset \mathscr{A} \subset \mathbb{A}$;

2) $\mathscr{A}$ перестановочно с операторами $T(t)$, $t > 0$, т. е. $(T(t)x, T(t)y) \in \mathscr{A}$ для всех $(x, y) \in \mathscr{A}$ и всех $t > 0$.

Определение 4. Генератор $\mathscr{A}$ полугруппы T называется *базовым*, если резольвентное множество $\rho(\mathscr{A})$ генератора $\mathscr{A}$ содержит полуплоскость

$$\mathbb{C}_w = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > w\}$$

для некоторого $w \in \mathbb{R}$.

Множество генераторов полугруппы T обозначено через $\operatorname{Gen}(T)$.

Важность базового генератора обусловлена возможностью использования его резольвенты при исследовании свойств полугруппы. Отметим также, что при таком определении генератора полугруппы отсутствуют какие-либо априорные предположения относительно характера поведения полугруппы в окрестности нуля.

В работе используется генератор $\mathbb{A}_c \in \operatorname{Gen}(T)$, который определяется (см. [2]) как сужение старшего генератора $\mathbb{A}$ на подпространство $X_c(T) \times X_c(T)$.

Отметим [2], что генератор $\mathscr{A} \in \operatorname{Gen}(T)$ является оператором тогда и только тогда, когда полугруппа T невырожденная.

2. Определение и свойства полугруппы операторов Сильченко класса $A(\varphi)$

Полугруппы операторов с неплотным образом и суммируемой особенностью в нуле систематически исследовались воронежским математиком Ю. Т. Сильченко. Поэтому данный класс полугрупп называется в настоящей работе его именем. Дадим точное определение.

Определение 5. Пусть $\mathscr{D}$ — неплотное подпространство из X. *Полугруппой операторов Сильченко класса* $A(\varphi)$ называется операторнозначная функция

$$T\colon (0,\infty) \to \operatorname{End} X$$

со следующими свойствами:

1) $T(t+s) = T(t)T(s)$ для всех $t, s > 0$;
2) $\operatorname{Im} T(t) \subset \mathscr{D}$ для каждого $t > 0$;
3) $\lim_{t\to 0+} T(t)x = x$ для каждого $x \in \mathscr{D}$;
4) $\|T(t)\| \leqslant \varphi(t)$ для каждого $t > 0$, где φ — некоторая суммируемая на $[0,1]$ функция.

Всюду далее через T обозначена полугруппа операторов Сильченко класса $A(\varphi)$. Из определения следует, что $\operatorname{Im} T \subset \mathscr{D}$, причем образ полугруппы $\operatorname{Im} T$ плотен в $\mathscr{D}$. Кроме того, полугруппа T сильно непрерывна при $t > 0$ [8]. Поэтому величина $\|T(t)\|$ равномерно по t ограничена на каждом компактном отрезке $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ [5, лемма 10.2.1]. Таким образом, функцию φ можно считать непрерывной на $(0,\infty)$.

Далее полугруппа T исследуется с применением подхода [2], основанного на использовании линейных отношений в качестве генераторов полугруппы операторов. Согласно классификации из монографии [5 с. 524], полугруппа T относится к классу (E). Поэтому полугруппа T обладает базовым генератором [2]. Так как $X_1(T) = X$, то из [9] следует

Теорема 1. *Для того чтобы инфинитезимальный оператор* A_0 *был замкнут, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\operatorname{Im} A_0} \subset \widetilde{X}_1(T).$$

Свойства подпространства $\mathscr{D}$ непосредственно влияют на свойства полугруппы T. В частности, верна

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{D}$ — замкнутое подпространство в X. Тогда инфинитезимальный оператор A_0 замкнут.*

Также из [9] следует

Теорема 3. *Для того чтобы инфинитезимальный оператор A_0 был не замыкаем в классе операторов, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\operatorname{Im} A_0} \cap \operatorname{Ker} T \neq \{0\}.$$

Так как подпространство $\mathscr{D}$ не плотно в X, то верна

Теорема 4. *Спектр $\sigma(A_0)$ инфинитезимального оператора A_0 заполняет всю комплексную плоскость.*

$\lhd$ Так как $\overline{\mathscr{D}} \neq X$, то $\overline{\operatorname{Im}(A_0 - \lambda I)} \subset \overline{\operatorname{Im} T} \neq X$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому $\sigma(A_0) = \mathbb{C}$. $\rhd$

Для каждого $x \in X$ определим функцию

$$\psi_x : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad \psi_x(u) = \sup_{\tau \in (0,1]} \frac{1}{\tau} \left\| \int_0^\tau T(s+u)x\, ds \right\|.$$

Лемма 1. *Для каждого $x \in X$ функция ψ_x суммируема на* $[0, 1]$.

$\lhd$ Для каждого $x \in X$ и $\tau > 0$ функция

$$\xi_\tau : [0, \infty) \to X, \quad \xi_\tau(u) \mapsto \frac{1}{\tau} \int_u^{\tau+u} T(s)x\, ds$$

абсолютно непрерывна. Функция

$$\eta_\tau : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad \eta_\tau(u) = \|\xi_\tau(u)\|$$

непрерывна. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\psi_{x,n}(u) = \sup_{\tau \in [1/n, 1]} \eta_\tau(u) = \eta_{\tau_n}(u),$$

где τ_n существуют и принадлежат $[1/n, 1]$. Тогда функции η_{τ_n} измеримы для каждого $n \in \mathbb{N}$ и

$$\psi_x(u) = \lim_{n \to \infty} \psi_{x,n}(u),$$

для каждого u. Следовательно, функция ψ_x измерима.

Из непрерывности на $(0, 1]$ и суммируемости на $[0, 1]$ функции φ следует, что

$$\int_0^1 \left(\lim_{\tau \to 0+} \frac{1}{\tau} \int_u^{u+\tau} \varphi(s)\, ds \right) du = \int_0^1 \varphi(u)\, du < \infty.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \psi_x(u)\, du < \infty. \ \rhd$$

Из суммируемости функции ψ_x для каждого $x \in X$ и [2, теорема 4] следует

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{A}$ — базовый генератор полугруппы T. Тогда*

$$\lim_{\eta\to 0+} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta T(\tau)R(\lambda,\mathscr{A})x\,d\tau = -\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,d\tau$$

для любого $x \in X$. В частности,

$$R(\lambda,\mathscr{A})x = -\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,d\tau, \qquad (*)$$

если $R(\lambda,\mathscr{A})x \in \widetilde{X}(T)$.

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{A}$ — базовый генератор полугруппы T и $D(\mathscr{A}) \subset \widetilde{X}(T)$. Тогда для любого $x \in X$*

$$R(\lambda,\mathscr{A})x = -\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,d\tau.$$

Так как $X_1(T) = X$, то из [2, теорема 7] следует

Теорема 6. *Генератор $\mathbb{A}_c$ полугруппы T является базовым, $\mathbb{C}_{w(T)} \subset \rho(\mathbb{A}_c)$ и резольвента $R(\lambda,\mathbb{A}_c)$ генератора $\mathbb{A}_c$ имеет представление*

$$R(\lambda,\mathbb{A}_c)x = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \quad x \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}_{w(T)}.$$

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{A}$ — базовый генератор полугруппы T и $D(\mathscr{A}) \subset \widetilde{X}(T)$. Тогда $\mathscr{A} = \mathbb{A}_c$.*

Отметим, что если дополнительно потребовать выполнения условия

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,dt < \infty,$$

то $i\mathbb{R} \cup \mathbb{C}_0 \subset \rho(\mathbb{A}_c)$ и представление $(*)$ резольвенты имеет место для любых $\lambda \in i\mathbb{R} \cup \mathbb{C}_0$ и $x \in X$.

В следующей теореме приводится достаточное условие для того, чтобы генераторы $\mathbb{A}_c$ и $\mathbb{A}$ совпадали.

Теорема 7. *Пусть функция φ ограничена на $[0,1]$. Тогда $\mathbb{A}_c = \mathbb{A}$.*

$\lhd$ Положим $T(0) = I$. Тогда

$$\sup_{t\in[0,1]} \|T(t)\| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \varphi(t) \leqslant M < \infty.$$

Из принципа равномерной ограниченности заключаем, что $X_c(T) = \overline{X_c(T)}$, поэтому $X_c(T) = \overline{\operatorname{Im} T}$. Согласно определениям генераторов, получаем $\mathbb{A} = \mathbb{A}_c$. $\rhd$

Ясно, что в случае ограниченности функции φ старший генератор также является базовым и для любого $x \in X$ имеет место представление $(*)$.

В следующем примере посчитаны генераторы $\mathbb{A}_0$, A_0, $\mathbb{A}_c$, $\mathbb{A}$. Показано, что $\mathbb{A}_0 \neq A_0$, $\mathbb{A}_c \neq \mathbb{A}$.

Пример. Пусть $\mathscr{X}$ — пространство сдвоенных числовых последовательностей $v = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}\}$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{\mathscr{X}} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(n^\beta |x_n| + |y_n|\Big), \quad \beta \in (0,1).$$

Введем в $\mathscr{X}$ следующие подпространства:

$$\mathscr{Y} = \big\{v \in \mathscr{X} : x_1 = y_1 = 0\big\},$$

$$\mathscr{D} = \Big\{v \in \mathscr{Y} : \ \|v\|_{\mathscr{D}} = \sum_{n=2}^{\infty} n^\alpha \big(n^\beta |x_n| + |y_n|\big) < \infty, \ \alpha \geqslant \beta\Big\}.$$

Отметим, что $\mathscr{Y} = \overline{\mathscr{Y}} \neq \mathscr{X}$. Полугруппу определим формулой

$$T : (0,\infty) \to \operatorname{End} \mathscr{X},$$

$$T(t)v = \Big\{(a_n(t), b_n(t)) e^{(-n + i n^{1+\beta})\, t}, \ n \in \mathbb{N}\Big\}, \quad x \in \mathscr{X},$$

где $a_1(t) = b_1(t) = 0$, и

$$a_n(t) = x_n \cos nt - y_n \sin nt, \quad t > 0, \ n \geqslant 2,$$

$$b_n(t) = x_n \sin nt + y_n \cos nt, \quad t > 0, \ n \geqslant 2.$$

Для случая $\beta = 1/2$ данный пример рассмотрен в [8]. Функция T есть полугруппа операторов Сильченко класса $A(\varphi)$ с функцией

$$\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty), \quad \varphi(t) = 2\beta^\beta e^{-\beta} t^{-\beta}.$$

Кроме того, имеют место следующие включения:

$$D(A_0) \subset \mathscr{D} \text{ при } \alpha < 1 + \beta,$$

$$D(A_0) \supset \mathscr{D} \text{ при } \alpha > 1 + \beta,$$

$$D(A_0) = \mathscr{D} \text{ при } \alpha = 1 + \beta.$$

При этом $\overline{\mathscr{D}} = \overline{D(A_0)} = \mathscr{Y}$.

Пусть $v = \{(x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N})\} \in D(A_0)$. Тогда по определению

$$A_0 v = T'(0) v = \{(c_n, d_n), n \in \mathbb{N}\},$$

где $c_1 = d_1 = 0$, и

$$c_n = (i n^{1+\beta} - n) x_n - n y_n, \quad n \geqslant 2,$$

$$d_n = n x_n + (i n^{1+\beta} - n) y_n, \quad n \geqslant 2.$$

Область определения $D(A_0)$ инфинитезимального оператора A_0 имеет вид

$$D(A_0) = \Big\{v \in \mathscr{Y} : \ \sum_{n=2}^{\infty} \Big(n^\beta \big|\big(i n^{1+\beta} - n\big) x_n - n y_n\big| + \big|n x_n + \big(i n^{1+\beta} - n\big) y_n\big|\Big) < \infty\Big\}$$

$$= \Big\{v \in \mathscr{Y} : \ \sum_{n=2}^{\infty} n^{1+\beta} \big(n^\beta |x_n| + |y_n|\big) < \infty\Big\}.$$

Подпространство $\mathscr{X}_c(T)$ имеет вид

$$\mathscr{X}_c(T) = \left\{ v \in \mathscr{Y} : \sum_{n=2}^{\infty} n^{\beta}(|x_n| + |y_n|) < \infty \right\}.$$

Следовательно,

$$D(\mathbb{A}_0) = \left\{ v \in \mathscr{Y} : \sum_{n=2}^{\infty} n^{1+2\beta}\big(|x_n| + |y_n|\big) < \infty \right\}.$$

Таким образом, $\mathbb{A}_0 \neq A_0$.

Прежде чем считать старший генератор $\mathbb{A}$ полугруппы операторов T, отметим, что

$$\operatorname{Im} T = \left\{ v \in \mathscr{Y} : \sum_{n=2}^{\infty} \big(|x_n| + |y_n|\big) e^{-\gamma n} < \infty,\ \gamma > 0 \right\}$$

и $\overline{\operatorname{Im} T} = \mathscr{Y}$.

Следуя определению, старший генератор $\mathbb{A} \in \operatorname{Gen}(T)$ состоит из пар $(v, u) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ со свойствами:

1) $v \in \overline{\operatorname{Im} T} = \mathscr{Y}$;

2) верны равенства

$$T(t)v - T(s)v = \int_s^t T(\tau)u\, d\tau, \quad 0 < s \leqslant t < \infty.$$

Полагая $v = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}\}$ и вычисляя выражения справа и слева, находим, что последовательность u имеет вид:

$$u = \big\{(g_n, h_n), n \in \mathbb{N}\big\},$$

где $g_1 = h_1 = 0$, и

$$g_n = (-n + in^{1+\beta})x_n - ny_n, \quad n \geqslant 2,$$
$$h_n = nx_n + (-n + in^{1+\beta})y_n, \quad n \geqslant 2.$$

В частности, любая пара $(0, u)$, где $u \in \operatorname{Ker} T$, принадлежит $\mathbb{A}$.

Согласно определению, $D(\mathbb{A}_c) = \mathscr{X}_c(T) \cap D(\mathbb{A})$. Так как $\mathscr{X}_c(T) \subset Y = \overline{\operatorname{Im} T}$, то

$$D(\mathbb{A}_c) = \left\{ v \in \mathscr{Y} : \sum_{n=2}^{\infty} n^{\beta}\big(|x_n| + |y_n|\big) < \infty \right\}.$$

Следовательно, генератор $\mathbb{A}_c \in \operatorname{Gen}(T)$ состоит из пар $(v, u) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ со свойствами:

1) последовательность $v = \{(x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условиям:

$$x_1 = y_1 = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=2}^{\infty} n^{\beta}\big(|x_n| + |y_n|\big) < \infty;$$

2) последовательность u имеет вид:

$$u = \big\{(g_n, h_n),\ n \in \mathbb{N}\big\},$$

где $g_1 = h_1 = 0$ и

$$g_n = \big(-n + in^{1+\beta}\big)x_n - ny_n, \quad n \geqslant 2,$$
$$h_n = nx_n + \big(-n + in^{1+\beta}\big)y_n, \quad n \geqslant 2.$$

Таким образом, $\mathbb{A}_c \neq \mathbb{A}$.

Отметим, что «многозначность» генераторов $\mathbb{A}_c$ и $\mathbb{A}$ (в случае вырожденной полугруппы T) привносится за счет ядра полугруппы $\operatorname{Ker} T$.

Резольвента генератора $\mathbb{A}_c$ имеет вид:

$$R(\lambda, \mathbb{A}_c)v = \big\{(w_n, z_n),\, n \in \mathbb{N}\big\},$$

где $w_1 = z_1 = 0$ и

$$w_n = \frac{1}{2}\bigg(x_n - \frac{1}{i}y_n\bigg)\frac{1}{\gamma_n - \lambda + in} + \frac{1}{2}\bigg(x_n + \frac{1}{i}y_n\bigg)\frac{1}{\gamma_n - \lambda - in},$$
$$z_n = \frac{1}{2}\bigg(\frac{1}{i}x_n + y_n\bigg)\frac{1}{\gamma_n - \lambda + in} + \frac{1}{2}\bigg(-\frac{1}{i}x_n + y_n\bigg)\frac{1}{\gamma_n - \lambda - in},$$

где $\gamma_n = -n + in^{1+\beta}$, $n \geqslant 2$. Имеют место оценки

$$|w_n| \leqslant \frac{|x_n| + |y_n|}{|\operatorname{Re}\lambda + n|}, \quad |z_n| \leqslant \frac{|x_n| + |y_n|}{|\operatorname{Re}\lambda + n|}, \quad n \geqslant 2.$$

Отсюда получаем оценку резольвенты

$$\|R(\lambda, \mathbb{A}_c)v\|_{\mathscr{X}_c(T)} = \sum_{n=2}^{\infty} n^{\beta}\big(|w_n| + |z_n|\big) \leqslant 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\operatorname{Re}\lambda + n|}{|\operatorname{Re}\lambda + n|}\big(|x_n| + |y_n|\big) \leqslant 4\|v\|_{\mathscr{X}}.$$

Следовательно,

$$\sigma(\mathbb{A}_c) = \sigma_p(\mathbb{A}_c) = \big\{\lambda \in \mathbb{C}:\ \lambda = \lambda_n = -n + in^{1+\beta} \pm in,\ n \geqslant 2\big\}$$

и

$$\sup_{\lambda \in \rho(\mathbb{A}_c)} \|R(\lambda, \mathbb{A}_c)\| \leqslant 4.$$

Литература

1. *Баскаков А. Г., Чернышов К. И.* Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы // Мат. сборник.—2002.—Т. 193, № 11.—С. 3–42.
2. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов // Мат. заметки.—2008.—Т. 84, № 2.—С. 175–192.
3. *Cross R.* Multivalued linear operators.—N. Y.: M. Dekker, 1998.—335 p.
4. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Функцион. анализ. СМФН.—2004.—Т. 9.—С. 3–151.
5. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.—830 с.
6. *Чшиев А. Г.* Теорема Герхарта — Прюсса для некоторого класса вырожденных полугрупп операторов // Мат. заметки.—2013.—Т. 94, № 3.—С. 426–440.
7. *Бичегкуев М. С.* К теории бесконечно дифференцируемых полугрупп операторов // Алгебра и анализ.—2010.—Т. 22, № 2.—С. 1–13.
8. *Сильченко Ю. Т.* Полугруппы с неплотно заданным производящим оператором // Изв. вузов. Математика.—2005.—№ 7.—С. 57–62.
9. *Чшиев А. Г.* Об условиях замкнутости и условиях замыкаемости инфинитезимальных операторов некоторых классов полугрупп операторов // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 8.—С. 77–85.

Статья поступила 31 октября 2012 г.

Чшиев Аслан Григорьевич
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник отдела функцион. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: zchaslan@mail.ru

ABOUT SILCHENKO OPERATORS SEMIGROUP

Chshiev A. G.

We consider a class of operator semigroups with integrable singularity at the origin and nondense image. Our approach is based on using the linear relations as the generators of semigroup. The existence of a base generator is proved and a representation of the resolvent of the base generator is also obtained.

Key words: semigroup of operators, generator of the semigroup, linear relation.