Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 2, С. 3–11

УДК **517.956**

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА

С. А. Алдашев

В работе показано, что задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Чаплыгина имеют единственные решения.

Ключевые слова: задача Дирихле, задача Пуанкаре, корректность, разрешимость, многомерное уравнение, вырождение.

В [1] было показано, что на плоскости одна из фундаментальных задач математической физики — изучение поведения колеблющейся струны — некорректна, в случае когда краевые условия заданы на всей границе области. Как замечено в [2, 3], задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В [4], показано, что решение задачи Дирихле существует в прямоугольных областях. В дальнейшем эта задача исследовалась методами функционального анализа [5], которые сложно применимы в приложениях.

В [6, 7] получены теоремы единственности решения задачи Дирихле для строго гиперболического уравнения, а [8, 9] доказана корректность задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения.

Насколько нам известно, многомерные задачи Дирихле и Пуанкаре для вырождающихся гиперболических уравнений ранее не изучались.

В работе показано, что задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Чаплыгина имеют единственные решения.

Пусть D_β — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):\,|x|=1\}$, плоскостями $t=\beta>0$ и $t=0$, где $|x|$ — длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через Γ_β, S_β, S_0 соответственно.

В области D_β рассмотрим многомерное уравнение Чаплыгина

$$g(t)\Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где $g(t)>0$ при $t>0$, $g(0)=0$, $g(t)\in C([0,\beta])\cap C^2((0,\beta))$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, $m\geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1},t$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $i=2,3,\ldots,m-1$.

Рассмотрим следующие многомерные задачи Дирихле и Пуанкаре:

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_β из класса $C(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u\big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u\big|_{S_0} = \tau(r,\theta), \tag{2}$$

или

$$u\big|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u\big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u_t\big|_{S_\beta} = \nu(r,\theta). \tag{3}$$

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $W^l_2(S_0)$, $l = 0,1,\ldots,$ — пространства Соболева.

Лемма 1 [10]**.** *Пусть* $f(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$. *Если* $l \geqslant m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2 [10]**.** *Для того чтобы* $f(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам*

$$\left|f^1_0(r)\right| \leqslant c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f^k_n(r)\right|^2 \leqslant c_2, \quad c_1, c_2 = \mathrm{const}.$$

Через $\bar{\varphi}^k_n(r)$, $\bar{\psi}^k_n(t)$, $\bar{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\nu}^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения в ряд вида (4) функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$ соответственно.

Пусть $\varphi(r,\theta) \in W^l_0(S_\beta)$, $\psi(r,\theta) \in W^l_2(\Gamma_\beta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$, $l > \frac{3m}{2}$ и выполняются условия согласования

$$\varphi(1,\theta) = \psi(\beta,\theta), \quad \psi(0,\theta) = \tau(1,\theta).$$

Тогда справедлива

Теорема. *Если*

$$\cos\mu_{s,n}\beta' \neq 0, \quad s = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

то задача 1 *однозначно разрешима, где* $\mu_{s,n}$ — *положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $n \in N$, $\beta' = \int_0^\beta \sqrt{g(\xi)}\,d\xi$.

$\lhd$ В сферических координатах уравнение (1) имеет вид:

$$g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2}\right) - u_{tt} = 0, \tag{6}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [10], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,\ldots,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$, $k = 1,\ldots,k_n$.

Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу $C(\bar{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (7) в (6) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [10], имеем

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right)-\bar{u}_{ntt}^k=0,\quad k=1,\ldots,k_n,\ (n=0,1,\ldots), \tag{8}$$

при этом краевые условия (2) и (3) с учетом леммы 1 соответственно принимают вид

$$\bar{u}_n^k(r,\beta)=\bar{\varphi}_n^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\bar{\psi}_n^k(t),\quad \bar{u}_n^k(r,0)=\bar{\tau}_n^k(r),\quad k=1,\ldots,k_n,\ (n=0,1,\ldots), \tag{9}$$

$$\bar{u}_n^k(r,\beta)=\bar{\varphi}_n^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\bar{\psi}_n^k(t),\quad \bar{u}_{nt}^k(r,0)=\bar{\nu}_n^k(r),\quad k=1,\ldots,k_n,\ (n=0,1,\ldots). \tag{10}$$

Выполнив в (8) замену $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$, $y=\left(\frac{3}{2}\int_0^t\sqrt{g(\xi)}\,d\xi\right)^{\frac{2}{3}}$, получим

$$yu_{nrr}^k-u_{nyy}^k+\frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2}\,u_n^k-b(y)\,u_{ny}^k=0, \tag{11}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{\big((m-1)(3-m)-4\lambda_n\big)}{4},\quad b(y)=\frac{1}{2g}\left[\frac{dg}{dy}-\frac{g}{y}\right].$$

Полагая $u_n^k=\bar{\upsilon}_n^k\exp\Big[-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(\xi)\,d\xi\Big]$, уравнение (11) приводим к виду

$$y\bar{\upsilon}_{nrr}^k-\bar{\upsilon}_{nyy}^k+\frac{\bar{\lambda}_n y}{r^2}\,\bar{\upsilon}_n^k=c(y)\,\bar{\upsilon}_n^k, \tag{12}$$

$$c(y)=-\frac{1}{4}(b^2+2b'_y)\in C\quad (y>0).$$

Уравнение (12), в свою очередь, с помощью замены переменных $r=r$, $x_0=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ переходит в уравнение

$$\upsilon_{nrr}^k-\upsilon_{nx_0x_0}^k-\frac{1}{3x_0}\,\upsilon_{nx_0}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\,\upsilon_n^k=g_n^k(r,x_0), \tag{13}$$

$$\upsilon_n^k(r,x_0)=\bar{\upsilon}_n^k\left[r,\ \left(\frac{3}{2}x_0\right)^{\frac{2}{3}}\right],\quad g_n^k(r,x_0)=\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}c\left[\left(\frac{3x_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\upsilon_n^k(r,x_0).$$

При этом краевые условия (9) и (10) соответственно примут вид:

$$\upsilon_n^k(r,\beta')=\varphi_n^k(r),\quad \upsilon_n^k(1,x_0)=\psi_n^k(x_0),\quad \upsilon_n^k(r,0)=\tau_n^k(r), \tag{14}$$

$$\upsilon_n^k(r,\beta')=\varphi_n^k(r),\quad \upsilon_n^k(1,x_0)=\psi_n^k(x_0),\quad \lim_{x_0\to 0}x_0^{\frac{1}{3}}\frac{\partial}{\partial x_0}\,\upsilon_n^k=\nu_n^k(r), \tag{15}$$

$$\varphi_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\varphi}_n^k(r) \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{\beta}} b(\xi)\,d\xi\right], \quad \tilde{\beta} = \left(\int_0^{\beta} \sqrt{g(\xi)}\,d\xi\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\psi_n^k(x_0) = \bar{\psi}_n^k(t) \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^{y} b(\xi)\,d\xi\right],$$

$$\tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(r), \quad \nu_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\nu}_n^k(r).$$

Наряду с уравнением (13) рассмотрим уравнение

$$L_\alpha \upsilon_{\alpha,n}^k \equiv \upsilon_{\alpha,nrr}^k - \upsilon_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0}\upsilon_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_{\alpha,n}^k = g_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{16_α}$$

$$L_0 \upsilon_{0,n}^k \equiv \upsilon_{0,nrr}^k - \upsilon_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_{0,n}^k = g_{0,n}^k(r,x_0), \tag{16_0}$$

$$g_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha} c\left[\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\upsilon_{\alpha,n}^k\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right],$$

$$g_{0,n}^k(r,x_0) = c(x_0)\,\upsilon_{0,n}^k(r,x_0), \quad 0 < \alpha = \text{const} < 1.$$

Отметим, что уравнение (13) совпадает с уравнением (16_α) при $\alpha = \frac{1}{3}$.

Как доказано в [11, 12] (см. также [13]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (16_α) и (16_0).

Утверждение 1. *Если $\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (16_0), удовлетворяющее условиям*

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{17}$$

то функция

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 \upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi \equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_0^{1-\alpha}D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{18}$$

при $\alpha > 0$ является решением уравнения (16_α) с условиями (17).

Утверждение 2. *Если $\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (16_0), удовлетворяющее условиям*

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{19}$$

то при $0 < \alpha < 1$ функция

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0) = \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 \upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}\,d\xi\right]$$
$$\equiv \gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \tag{20}$$

является решением уравнения (16_α) *с начальными данными*

$$\upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(r,0)=0, \quad \lim_{x_0\to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0}\,\upsilon^{k,2}_{\alpha,n}=\nu^k_n(r), \tag{21}$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha=2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ *— гамма-функция,* D^α_{0t} *— оператор Римана — Лиувилля* [14], *а* $q\geqslant 0$ *— наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $2-\alpha+2q\geqslant m-1$.

При этом функции $g^k_{\alpha,n}(r,x_0)$ и $g^k_{0,n}(r,x_0)$ связаны формулами (18) в случае утверждения 1 и формулами (20) в случае утверждения 2.

Теперь переходим к решению задачи (16_α), (14) и (16_α), (15).

Решение задачи (16_α), (14) будем искать в виде

$$\upsilon^k_{\alpha,n}(r,x_0)=\upsilon^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0)+\upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0), \tag{22}$$

где $\upsilon^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0)$ — решение задачи Коши (16_α), (17), а $\upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0)$ — решение краевой задачи для уравнения (16_α), с условиями

$$\upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(r,\beta')=\varphi^k_n(r)-\upsilon^{k,1}_{\alpha,n}(r,\beta'), \quad \upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(1,x_0)=\psi^k_n(x_0)-\upsilon^{k,1}_{\alpha,n}(1,x_0), \quad \upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(r,0)=0. \tag{23}$$

Учитывая формулы (18), (20), а также обратимость оператора D^α_{0t} [14], задачи (16_α), (17) и (16_α), (23) соответственно сводим наши задачи к задаче Коши (16_0), (17), имеющей единственное решение [12, 15], и к задаче для уравнения (16_0) с условиями

$$\upsilon^{k,1}_{0,n}(r,\beta')=\varphi^k_{1n}(r), \quad \upsilon^{k,1}_{0,n}(1,x_0)=\psi^k_{1n}(x_0), \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\,\upsilon^{k,1}_{0,n}(r,0)=0, \tag{24}$$

где $\varphi^k_{1n}(r)$, $\psi^k_{1n}(x_0)$ — функции, выражающиеся, соответственно, через $\varphi^k_n(r)$, $\tau^k_n(r)$ и $\psi^k_n(x_0)$, $\tau^k_n(r)$.

Теперь будем решать задачу (16_0), (24). Произведя замену $\bar\upsilon^{k,1}_{0,n}(r,x_0)=\upsilon^{k,1}_{0,n}(r,x_0)-\psi^k_{1n}(x_0)$, задачу (16_0), (24) приведем к следующей задаче

$$L\bar\upsilon^{k,1}_{0,n}\equiv\bar\upsilon^{k,1}_{0,nrr}-\bar\upsilon^{k,1}_{0,nx_0x_0}+\frac{\bar\lambda_n}{r^2}\bar\upsilon^{k,1}_{0,n}=\tilde g^k_{0,n}(r,x_0), \tag{25}$$

$$\bar\upsilon^{k,1}_{0,n}(r,\beta')=\widetilde\varphi^k_{1n}(r), \quad \bar\upsilon^{k,1}_{0,n}(1,x_0)=0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\,\bar\upsilon^{k,1}_{0,n}(r,0)=-\psi^k_{1nx_0}(0)=c_0, \tag{26}$$

$$\tilde g^k_{0,n}(r,x_0)=g^k_{0,n}(r,x_0)+\psi^k_{1nx_0x_0}-\frac{\bar\lambda_n}{r^2}\psi^k_{1n}, \quad \widetilde\varphi^k_{1n}(r)=\varphi^k_{1n}(r)-\psi^k_{1n}(\beta').$$

Решение задачи (25), (26) ищем в виде

$$\bar\upsilon^{k,1}_{0,n}(r,x_0)=\omega^k_{1n}(r,x_0)+\omega_{2n}(r,x_0), \tag{27}$$

где $\omega^k_{1n}(r,x_0)$ — решение задачи

$$L\omega^k_{1n}=\widetilde g^k_{0,n}(r,x_0)=c(x_0)\omega^k_{1n}+\psi^k_{nx_0x_0}-\frac{\bar\lambda_n}{r^2}\psi^k_n, \tag{28}$$

$$\omega^k_{1n}(r,\beta')=0, \quad \omega^k_{1n}(1,x_0)=0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega^k_{1n}(r,0)=0, \tag{29}$$

а $\omega_{2n}^k(r,x_0)$ — решение задачи

$$L\omega_{2n}^k = c(x_0)\omega_{2n}^k, \tag{30}$$

$$\omega_{2n}^k(r,\beta') = \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \omega_{2n}^k(1,x_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\omega_{2n}^k(r,0) = c_0. \tag{31}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\omega_n^k(r,x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(x_0), \tag{32}$$

при этом пусть

$$\tilde{g}_{0,n}^k(r,x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(x_0)R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}R_s(r), \quad c_0 = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}R_s(r). \tag{33}$$

Подставляя (32) в (28), (29), с учетом (33), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{34}$$

$$R_s(1) = 0, \quad \left|R_s(0)\right| < \infty, \tag{35}$$

$$T_{sx_0x_0} + \mu T_s(x_0) = -a_{s,n}(x_0), \quad 0 < x_0 < \beta, \tag{36}$$

$$T_s(\beta') = 0, \quad T_{sx_0}(0) = 0. \tag{37}$$

Ограниченным решением задачи (33), (34) является [16]

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{38}$$

где $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (36) представимо в виде [16]

$$T_{s,n}(x_0) = c_{1s}\cos\mu_{s,n}x_0 + c_{2s}\sin\mu_{s,n}x_0$$
$$+\frac{\cos\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int_0^{x_0} a_{s,n}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi\,d\xi - \frac{\sin\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int_0^{x_0} a_{s,n}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi\,d\xi,$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные. Удовлетворив второе условие (37), будем иметь

$$\begin{gathered}\mu_{s,n}T_{s,n}(x_0) = c_{1s}\mu_{s,n}\cos\mu_{s,n}x_0 \\ +\cos\mu_{s,n}x_0\int_0^{x_0} a_{s,n}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi\,d\xi - \sin\mu_{s,n}x_0\int_0^{x_0} a_{s,n}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi\,d\xi.\end{gathered} \tag{39}$$

Подставляя (38) в (33), получим

$$\begin{gathered}r^{-\frac{1}{2}}\tilde{g}_{0,n}^k(r,x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(x_0)J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r), \\ r^{-\frac{1}{2}}c_0 = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad 0 < r < 1.\end{gathered} \tag{40}$$

Ряды (40) — разложения в ряды Фурье — Бесселя [17], если

$$a_{s,n}(x_0) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{g}_{0,n}^k(\xi, x_0) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi$$
$$= 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \left[c(x_0)\omega_n^k(\xi, x_0) + \psi_{1nx_0x_0}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\psi_{1n}^k(x_0) \right] J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi, \tag{41}$$

$$b_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi, \quad e_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 c_0 \sqrt{\xi} J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi.$$

Учитывая свойства ортогональности функций Бесселя [17]

$$\int_0^1 \xi J_\nu(\mu_{s,m}\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2}{2}, & n = m, \end{cases}$$

из (32), (38) и (41) имеем равенство

$$a_{s,n}(x_0) = c(x_0)T_{s,n}(x_0) + 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \left[\psi_{1nx_0x_0}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\psi_{1n}^k(x_0) \right] J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi. \tag{42}$$

Подставляя (42) в (39), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$T_{s,n}(x_0) = f_{s,n}(x_0) + \int_0^{x_0} G_{s,n}(x_0, \xi) T_{s,n}(\xi) d\xi,$$

которое имеет единственное решение [18]

$$T_{s,n}(x_0) = f_{s,n}(x_0) + \int_0^{x_0} R_{s,n}(x_0, \xi; 1) f_{s,n}(\xi)\, d\xi, \tag{43}$$

где

$$\mu_{s,n} f_{s,n}(x_0) = c_{1s}\mu_{s,n} \cos \mu_{s,n}x_0 - c_0 \sin \mu_{s,n}x_0$$
$$+ 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^{x_0} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\eta} \left[\psi_{1n\xi\xi}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{\eta^2}\psi_{1n}^k \right] J_\nu(\mu_{s,n}\eta) d\eta \sin \mu_{s,n}(\xi - x_0) \right\} d\xi, \tag{44}$$

$\mu_{s,n} G_{s,n}(x_0, \xi) = c(\xi) \sin \mu_{s,n}(\xi - x_0)$, $R_{s,n}(x_0, \xi; 1)$ — резольвента ядра $G_{s,n}(x_0, \xi)$.

Из (37), (43) будем иметь

$$f_{s,n}(\beta') + \int_0^{x_0} R_{s,n}(\beta', \xi; 1) f_{s,n}(\xi)\, d\xi = 0. \tag{45}$$

Далее, подставляя (44) в (45), при выполнении условии (5) однозначно определим постоянные c_{1s} $(s = 1, 2 \ldots)$.

Таким образом, решением задачи (28), (29) является функция

$$\omega_{1n}^k(r,x_0)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(x_0)J_\nu(\mu_{s,n}x_0), \tag{46}$$

где $T_{s,n}(x_0)$ находится из (43).

Теперь, подставляя (32) в (30), (31), с учетом (33) имеем задачу

$$V_{sx_0x_0}+\mu_{s,n}^2V_s=-c(x_0)V_s,$$

$$V_s(\beta')=b_{s,n},\quad V_{sx_0}(0)=e_{s,n},$$

решение которой определяется по формуле (43), где

$$\mu_{s,n}f_{s,n}(x_0)=c_{1s}\mu_{s,n}\cos\mu_{s,n}x_0+e_{s,n}\sin\mu_{s,n}x_0. \tag{47}$$

Из (43), (45), (47) при выполнении условий (5) определим постоянные c_{1s} ($s=1,2,\ldots$).

Таким образом, решение задачи (30), (31) записывается в виде

$$\omega_{2n}^k(r,x_0)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}V_{s,n}(x_0)J_\nu(\mu_s x_0). \tag{48}$$

Следовательно, единственным решением задачи (25), (26) является функция (27), где $\omega_{1n}^k(r,x_0)$ определяется из (46), а $\omega_{2n}^k(r,x_0)$ из (48).

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливается однозначная разрешимость задач (16_α), (17) и (16_α), (23).

Значит, из (22) следует, что задача (16_α), (14), также имеет единственное решение.

Теперь будем решать задачу (16_α), (15) в виде (22), где $\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение задачи Коши (16_α), (21), а $\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи для (16_α) с данными

$$\begin{gathered}\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta')=\varphi_n^k(r)-\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta'),\\ \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(1,x_0)=\psi_n^k(x_0)-\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(1,x_0),\quad \frac{\partial}{\partial x_0}\,\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,0)=0.\end{gathered} \tag{49}$$

Используя формулы (18), (20), задачи (16_α), (21) и (16_α), (49) соответственно приведем к задаче Коши (16_0), (19) и к задаче (16_0), (24), где $\varphi_{1n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(x_0)$ — функции, теперь выражающиеся соответственно через $\varphi_n^k(r)$, $\nu_n^k(r)$ и $\psi_n^k(x_0)$, $\nu_n^k(r)$.

Таким образом, задача (16_α), (15) также однозначно разрешима.

Следовательно, решением задачи 1 является функция (7), где $\bar{u}_n^k(r,t)$ находятся из задачи (8), (9) в случае (1), (2) и из (8), (10) в случае задачи (1), (3).

Учитывая формулу [17] $2J_\nu'(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$, оценки [10, 19]

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\quad \nu\geqslant 0,$$

$$|k_n|\leqslant c_1n^{m-2},\quad \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leqslant c_2n^{\frac{m}{2}-1+q},\quad j=\overline{1,m-1},\ q=0,1,\ldots,$$

а также леммы 1 и 2, ограничения на заданные функции $g(t)$, $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, как в [8, 9], можно показать, что полученное решение (7) принадлежит требуемому классу $C(\bar{D}_\beta)\cap C^1(D_\beta\cup S_0)\cap C^2(D_\beta)$. $\triangleright$

Отметим, что эта теорема при $g(t)=t^p$, $p=\mathrm{const}>0$ получена в [20].

Литература

1. *Hadamard J.* Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Princeton University Bulletin.—1902.—Vol. 13.—P. 49–52.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа.—М.: Изд. АН СССР, 1959.—164 с.
3. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.
4. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem the vibrating string eguation // Bull. Amer. Math. Soc.—1939.—Vol. 45.—P. 851–858.
5. *Fox D. W., Pucci C.* The Dirichlet problem the wave eguation // Ann. Math. Pura Appl.—1958.—Vol. 46.—P. 155–182.
6. *Нахушев А. М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Диф. уравнения.—1970.—Т. 6, № 1.—С. 190–191.
7. *Dunninger D. R., Zachmanoglou E. C.* The condition for uniqueness of the Diriclet problem for hyperbolic equations in cilindrical domains // J. Math. Mech.—1969.—Vol. 18, № 8.
8. *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation // Math. Problems Engineering.—2010.—Article ID 653215.—7 p.
9. *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation // J. of Math. Science.—2011.—Vol. 173, № 2.—P. 150–154.
10. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.—254 с.
11. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.—Алматы: Гылым, 1994.—170 с.
12. *Алдашев С. А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения.—Орал: ЗКАТУ, 2007.—139 с.
13. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе.—Новосибирск: НГУ, 1973.—139 с.
14. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1985.—301 с.
15. *Алдашев С. А.* Спектральные задачи Дарбу — Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Украинский мат. журн.—2003.—Т. 55, № 1.—С. 100–107.
16. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.—М.: Наука, 1965.—703 с.
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2.—М.: Наука, 1974.—295 с.
18. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4, ч. 1.—М.: Наука, 1974.—334 с.
19. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1966.—724 с.
20. *Алдашев С. А.* Задача Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта // Материалы II Междунар. Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики».—Нальчик: НИИ ПМ и КБНЦ РАН, 2011.—С. 21–22.

Статья поступила 19 марта 2012 г.

Алдашев Серик Аймурзаевич
Институт прикладной математики и информатики
Актюбинского гос. ун-та им. К. Жубанова, *директор*
КАЗАХСТАН, 030000, Актобе, ул. Бр. Жубановых, 263
E-mail: aldash51@mail.ru

THE WELL-POSEDNESS OF THE DIRICHLET AND POINCARE PROBLEMS IN A CYLINDRIC DOMAIN FOR THE MULTI-DIMENSIONAL CHAPLIGIN EQUATION

Aldashev S. A.

This paper proves the unique solvability of the Dirichlet and Poincare problems in a cylindric domain for the multi-dimensional Chapligin equation.

Key words: multi-dimensional Chapligin equation, Dirichlet problem, Poincare problem.