Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 24–31

УДК **517.928**

АСИМПТОТИКА УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ[1]

М. Р. Ишмеев

Для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, содержащих высокочастотные слагаемые, пропорциональные определенным положительным степеням частоты, построена с обоснованием полная асимптотика условно периодического решения.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, большие высокочастотные слагаемые, метод усреднения, асимптотика.

В настоящее время имеется довольно много работ, посвященных асимптотическому анализу дифференциальных уравнений, содержащих высокочастотные слагаемые, пропорциональные положительным степеням частоты (см., например, [1–7]). Данная работа относится к тому же направлению, примыкает к работам [6, 7] и посвящена построению и обоснованию полной асимптотики некоторого условно периодического решения системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} x^{(n)} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}\big(x, \dot{x}, \ldots, x^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t\big) \\ + \sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^{j} f_{2j}\big(x, \dot{x}, \ldots, x^{([n/2]-j)}, \omega t\big) \end{aligned} \tag{1}$$

с условно периодической по $\tau = \omega t$ правой частью

$$f_j(z_0, \ldots, z_r, \tau) = \sum_{k=1}^{n} \big[c_{jk1}(z_0, \ldots, z_r)\cos(\alpha_k \tau) + c_{jk2}(z_0, \ldots, z_r)\sin(\alpha_k \tau)\big]. \tag{2}$$

Здесь α_k, $k = 1, \ldots, n$, — произвольные вещественные числа. В данной работе изучаются также вопросы устойчивости и неустойчивости по Ляпунову указанного решения.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0356, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00402-а.

1. Обоснование метода усреднения и исследование устойчивости

Пусть n, m — натуральные числа, ω — большой параметр, G — область в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1). Здесь вектор-функции $c_{jki}(z_0,\dots,z_r)$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ заданы и непрерывны на множествах $\underbrace{G\times\dots\times G}_{r+1}$. Предположим, что указанные вектор-функции обладают непрерывными производными

$$\frac{\partial c_{0ki}}{\partial z_i},\quad \frac{\partial^{|\alpha|}c_{2j-1,ki}}{\partial z_{i_1}^{\alpha_1}\dots\partial z_{i_q}^{\alpha_q}},\quad |\alpha|=1,\dots,\max\big(2,n-[(n+1)/2]+j\big),$$
$$\frac{\partial^{|\alpha|}c_{2j,ki}}{\partial z_{i_1}^{\alpha_1}\dots\partial z_{i_q}^{\alpha_q}},\quad |\alpha|=1,\dots,\max\big(2,n-[n/2]+j\big),\quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_q),$$

которые удовлетворяют равномерному условию Липшица по z_i, $i=0,\dots,r$. Пусть, кроме того, f_j, $j\neq 0$, обладают нулевым средним по τ (т. е. $c_{jk1}=0$ для всех $j\neq 0$, если $\alpha_k=0$).

Мы рассматриваем задачу об условно периодических решениях уравнения (1). Напомним [8], что условно периодической называется почти периодическая функция с конечным частотным базисом. Под частотным базисом понимается рационально независимый набор чисел, в виде целочисленной комбинации которых можно представить любой показатель Фурье почти периодической функции.

Наряду с возмущенным уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}=\Psi\big(y,\dot y,\dots,y^{([n/2])}\big), \tag{3}$$

которое будем называть усредненным. Здесь

$$\Psi\big(z_0,\dots,z_{[n/2]}\big)=\Big\langle f_0\big(z_0,\dots,z_{[n/2]},\tau\big)+\frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0,\tau)\varphi_n\big(z_0,\tau\big)$$
$$+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0,z_1,\tau)\frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}(z_0,\tau)+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial z_{[(n+1)/2]-1}}\big(z_0,\dots,z_{[(n+1)/2]-1},\tau\big)\frac{\partial^{[(n+1)/2]-1}\varphi_n}{\partial\tau^{[(n+1)/2]-1}}(z_0,\tau)\Big\rangle,$$

при нечетном n;

$$\Psi\big(z_0,\dots,z_{[n/2]}\big)=\Big\langle f_0\Big(z_0,\dots,z_{[n/2]}+\frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}}(z_0,\tau),\tau\Big)+\frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0,\tau)\,\varphi_n(z_0,\tau)$$
$$+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0,z_1,\tau)\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}(z_0,\tau)+\dots+\frac{\partial f_2}{\partial z_{[n/2]-1}}\big(z_0,\dots,z_{[n/2]-1},\tau\big)\frac{\partial^{[n/2]-1}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]-1}}(z_0,\tau)\Big\rangle,$$

при четном n. Символом $\varphi_n(z_0,\tau)$ обозначено условно периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения $\frac{\partial^n\varphi_n}{\partial\tau^n}(z_0,\tau)=f_n(z_0,\tau)$. Предположим, что существует стационарное решение усредненного уравнения $y_0\in G$ такое, что $\frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}}(y_0,\tau)\in G$ для любого $\tau\in\mathbb{R}$, и, кроме того, уравнение

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}+\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial z_1}+\dots+\lambda^{[n/2]}\frac{\partial\Psi}{\partial z_{[n/2]}}-\lambda^nE\right|\Bigg|_{(y_0,0,\dots,0)}=0 \tag{4}$$

не имеет чисто мнимых корней.

Теорема 1. *Существуют такие положительные числа* ω_0 *и* r_0, *что при* $\omega > \omega_0$ *справедливы следующие утверждения:*

1. *Уравнение* (1) *имеет единственное в шаре* $\|x-y_0\|_{C^k(\mathbb{R})} \leqslant r_0$ *условно периодическое решение* x_ω, *частотный базис которого содержится в частотном базисе* f_j, *и при этом* $\lim\limits_{\omega\to\infty} \|x_\omega - y_0\|_{C^k(\mathbb{R})} = 0$, *где* $k = [(n-1)/2]$.

2. *Если все решения уравнения* (4) *лежат в открытой левой комплексной полуплоскости, то решение* x_ω *экспоненциально устойчиво.*

3. *Если хоть одно решение уравнения* (4) *лежит в открытой правой комплексной полуплоскости, то решение* x_ω *неустойчиво.*

$\triangleleft$ Докажем утверждение 1. Как и в предыдущей работе [7] серией замен Крылова — Боголюбова придем от уравнения (1) к системе без больших слагаемых

$$\begin{gathered}
x = x_1 + \omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-1}(x_1,\omega t) + \omega^{-n/2}\varphi_n(x_1,\omega t);\\
\dot{x}_j = x_{j+1} + \omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-2j-1}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t) + \omega^{-n/2}\varphi_{n-2j}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t)\\
+\omega^{-(n+1)/2}\xi_{2j+1}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t) + \omega^{-n/2}\xi_{2j}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t), \quad j=1,\dots,k;\\
x_{k+1}^{(n-k)} = \psi(x_1,\dots,x_{k+1}^{(p-k)},\omega t) + \beta(x_1,\dots,x_{k+1}^{(p-k)},\omega t,\omega) + \chi_0(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t)\\
+ B_0(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t)\dot{x}_{k+1} + \chi(x_1,\dots,x_{k+1},\dot{x}_{k+1},\omega t,\omega)\\
+\sum_{i=2}^{n-k-1} A_i(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t,\omega)x_{k+1}^{(i)} + \omega^{-n/2}C(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t)x_{k+1}^{(n-k)}.
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\xi_i(x_1,\dots,x_i) = \xi_{io}(x_1,\dots,x_{i-1}) + \xi_{i1}(x_1,\dots,x_{i-1})x_i$, $\varphi_0 \equiv 0$, при нечетном n элементы χ_0, B_0 являются нулевыми, а χ имеет вид

$$\chi(x_1,\dots,x_{k+1},z_{k+1},\tau,\omega) = \chi_1(x_1,\dots,x_{k+1},\tau,\omega) + A_1(x_1,\dots,x_{k+1},\tau,\omega)z_{k+1}.$$

Отметим, что $\chi_0(x_1,\dots,x_{k+1},\tau)$, $\chi(x_1,\dots,x_{k+1},z_{k+1},\tau,\omega)$, $\chi_1(x_1,\dots,x_{k+1},\tau,\omega)$ — вектор-функции порядка m, а $B_0(x_1,\dots,x_{k+1},\tau)$, $A_i(x_1,\dots,x_{k+1},\tau,\omega)$, $C(x_1,\dots,x_{k+1},\tau)$ — квадратные матрицы-функции порядка m. Компоненты матриц A_i, а также вектор-функций χ_0, χ, χ_1, ξ_i являются полиномами относительно компонент x_s и x_s, z_{k+1}, $s \geqslant 2$, соответственно, причем коэффициенты этих полиномов, как компоненты матриц B_0, C и вектор-функций β, φ_i, непрерывны, удовлетворяют равномерному условию Липшица по x_i и почти периодичны по τ со вложенным в частотный базис f_j частотным базисом. Кроме того, указанные коэффициенты или компоненты элементов β, χ, χ_1, A_i являются бесконечно малыми при $\omega \to \infty$ равномерно относительно своих переменных, а элементы ξ_i, φ_i, χ_0, B_0, C имеют нулевые средние по τ.

Разрешив последнее уравнение системы (5) относительно старшей производной, перепишем ее в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dz}{dt} = f(z,\omega t) + \alpha(z,\omega t,\omega), \tag{6}$$

где $z = (x_1,\dots,x_n)^T$,

$$\begin{gathered}
f(z,\tau) = \Big(x_2,\dots,x_{n-1},\big[E-\omega^{-n/2}C(x_1,\dots,x_{k+1},\tau)\big]^{-1}\big(\psi(x_1,\dots,x_{p+1},\tau)\\
+\chi_0(x_1,\dots,x_{k+1},\tau) + B_0(x_1,\dots,x_{k+1},\tau)x_{k+2}\big)\Big)^T,
\end{gathered}$$

а выражение $\alpha(z,\tau,\omega)$ после этого очевидно. Наряду с возмущенной системой (6) рассмотрим усредненную систему

$$\frac{dw}{dt} = F(w), \tag{7}$$

где

$$w = (w_1, \ldots, w_n)^T, \quad F(w) = \big(w_2, \ldots, w_{n-1}, \Psi(w_1, \ldots, w_{p+1})\big)^T.$$

Очевидно, система (7) имеет стационарное решение $w^0 = (y_0, 0, \ldots, 0)$, причем матрица $\frac{dF}{dw}(w^0)$ не содержит чисто мнимых собственных чисел, так как уравнение (4) не имеет чисто мнимых корней.

Лемма 1. *Пусть $\mu \in (0,1)$. Тогда существуют положительные числа r_1, ω_1 такие, что при $\omega > \omega_1$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Система (8) в шаре $\|z - w^0\|_{C^\mu(\mathbb{R})} \leqslant r_1$ имеет единственное условно периодическое решение z_ω, частотный базис которого содержится в частотном базисе $f + \alpha$, и при этом справедливо соотношение $\lim\limits_{\omega\to\infty} \|z_\omega - w^0\|_{C^\mu(\mathbb{R})} = 0$.*

2. *Если спектр матрицы $\frac{dF}{dw}(w^0)$ лежит в открытой левой комплексной полуплоскости, то решение z_ω экспоненциально устойчиво относительно ω и начальных условий.*

3. *Если спектр матрицы $\frac{dF}{dw}(w^0)$ содержит хотя бы одну точку открытой правой комплексной полуплоскости, то решение z_ω неустойчиво.*

Здесь $C^\mu(\mathbb{R})$ — обычное гёльдерово пространство заданных на оси $t \in \mathbb{R}$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^{mn}$.

$\lhd$ Заменой $z = v + w^0$ уравнение (6) приведем к виду

$$\frac{dv}{dt} - Av = f(v + w^0, \omega t) + \alpha(v + w^0, \omega t, \omega) - Av \equiv R(v, \omega t, \omega), \tag{8}$$

где $A = \frac{dF}{dw}(w^0)$. В силу отсутствия точек мнимой оси в спектре матрицы A система (8) эквивалентна интегральному уравнению (см., например, [8])

$$v(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) R(v, \omega s, \omega)\, ds \equiv [T(v,\omega)](t).$$

Здесь

$$G = \begin{cases} -S \operatorname{diag}\big(e^{tJ_+}, 0\big) S^{-1}, & t < 0, \\ S \operatorname{diag}\big(0, e^{tJ_-}\big) S^{-1}, & t > 0, \end{cases}$$

где S — невырожденная матрица такая, что

$$A = S \operatorname{diag}(J_-, J_+) S^{-1},$$

а $J_\mp$ — матрицы жордановой формы, характеристические числа которых лежат в левой и, соответственно, правой открытой комплексной полуплоскости. Введем в рассмотрение отображение $M : C^\mu(\mathbb{R}) \times (0, +\infty] \to C^\mu(\mathbb{R})$ такое, что $M(v,\omega) = T(v,\omega)$ при $\omega < +\infty$ и

$$M(v, +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) \big[\langle f(v + w^0, s)\rangle - Av\big]\, ds.$$

Отображение $M(v,\omega)$ и его производная Фреше $(D_v M)(v,\omega)$ непрерывны в точке $(0,+\infty)$, при этом $M(0,+\infty) = 0$ и $(D_v M)(0,+\infty) = 0$ — нуль-операторы. Применяя теорему о неявных отображениях, получим справедливость утверждения леммы для ограниченного решения. Докажем его почти периодичность. Пусть τ — ϵ-почти период вектор-функции $f+\alpha$. Имеем

$$\begin{aligned} \big|v(t+\tau)-v(t)\big| &= \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t+\tau-s)\,R(v,\omega s,\omega)\,ds - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\,R(v,\omega s,\omega)\,ds\Big| \\ &= \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\Big[R\big(v(s+\tau),\omega(s+\tau),\omega\big)-R\big(v(s),\omega s,\omega\big)\Big]ds\Big| \\ &= \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\Big[f\big(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau)\big)-f\big(w^0+v(s),\omega s\big)-Av(s+\tau) \\ &+Av(s)+\alpha\big(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau),\omega\big)-\alpha\big(w^0+v(s),\omega s,\omega\big)\Big]ds\Big| \leqslant I_1+I_2+I_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как τ — ϵ-почти период $f+\alpha$ и в силу свойств функции Грина G

$$\begin{aligned} I_1 &= \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\Big[f\big(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau)\big)-f\big(w^0+v(s+\tau),\omega s\big) \\ &+\alpha\big(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau),\omega\big)-\alpha\big(w^0+v(s+\tau),\omega s,\omega\big)\Big]ds\Big| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\big\|G(t-s)\big\|ds\,\sup_{s\in R}\Big|f\big(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau)\big)+\alpha\big(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau),\omega\big) \\ &-f\big(w^0+v(s+\tau),\omega s\big)-\alpha\big(w^0+v(s+\tau),\omega s,\omega\big)\Big| \leqslant \frac{4c\epsilon}{\gamma}, \end{aligned} \tag{10}$$

где c — константа, γ — минимальная по модулю вещественная часть точек спектра, найдется ω_0 такое, что для любого $\omega>\omega_0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} I_2 &= \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\Big[f\big(w^0+v(s+\tau),\omega s\big)-f\big(w^0+v(s),\omega s\big)-Av(s+\tau)+Av(s)\Big]ds\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\Big[f\big(w^0+v(s+\tau),\omega s\big)-f\big(w^0+v(s),\omega s\big) \\ &-F\big(w^0+v(s+\tau)\big)+F\big(w^0+v(s)\big)\Big]ds\Big| + \int_{-\infty}^{+\infty}\big\|G(t-s)\big\|ds \\ &\times\sup_{s\in R}\Big|F\big(w^0+v(s+\tau)\big)-F\big(w^0+v(s)\big)-Av(s+\tau)+Av(s)\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\int_0^1\Big[\frac{\partial f}{\partial z}\big(w^0+v(s)+\theta\big(v(s+\tau)-v(s)\big),\omega s\big) \\ &-\frac{dF}{dw}\big(w^0+v(s)+\theta\big(v(s+\tau)-v(s)\big)\big)\Big]d\theta\big(v(s+\tau)-v(s)\big)ds\Big| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2c}{\gamma}\sup_{s\in R}\left|\left[\frac{dF}{dw}\big(w^0+v(s)\big)-A\right]\big(v(s+\tau)-v(s)\big)+O\big((v(s+\tau)-v(s))^2\big)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{8}\sup_{s\in R}\big|v(s+\tau)-v(s)\big|+\frac{1}{8}\sup_{s\in R}\big|v(s+\tau)-v(s)\big|=\frac{1}{4}\sup_{s\in R}\big|v(s+\tau)-v(s)\big|,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3&=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)\Big[\alpha\big(w^0+v(s+\tau),\omega s,\omega\big)-\alpha\big(w^0+v(s),\omega s,\omega\big)\Big]ds\right| \\
&\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big\|G(t-s)\big\|ds\sup_{s\in R}\Big|\alpha\big(w^0+v(s+\tau),\omega s,\omega\big)-\alpha\big(w^0+v(s),\omega s,\omega\big)\Big| \\
&\leqslant \frac{2c}{\gamma}\sup_{s\in R}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial z}\big(w^0+v(s),\omega s,\omega\big)\big(v(s+\tau)-v(s)\big)+O\big((v(s+\tau)-v(s))^2\big)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{4}\sup_{s\in R}\big|v(s+\tau)-v(s)\big|.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Учитывая формулы (9)–(12), получим

$$
\sup_{t\in R}\big|v(t+\tau)-v(t)\big|\leqslant\frac{4c\epsilon}{\gamma}+\frac{1}{2}\sup_{t\in R}\big|v(t+\tau)-v(t)\big|,\quad \sup_{t\in R}\big|v(t+\tau)-v(t)\big|\leqslant\frac{8c\epsilon}{\gamma}.
$$

Значит τ — $\frac{8c\epsilon}{\gamma}$-почти период v, а в силу произвольности ϵ получаем почти периодичность v.

Пусть теперь $\{t_m\}$ — $(f+\alpha)$-возвращающая последовательность, т. е.

$$
\sup_{t\in R}\Big|f\big(v,\omega(t+t_m)\big)+\alpha\big(v,\omega(t+t_m),\omega\big)-f(v,\omega t)-\alpha(v,\omega t,\omega)\Big|\leqslant\epsilon_m\to 0,\quad m\to\infty,
$$

Также как описано выше легко показать

$$
\sup_{t\in R}|v(t+\tau)-v(t)|\leqslant\frac{8c\epsilon_m}{\gamma}\to 0,\quad m\to\infty,
$$

т. е. t_m — v-возвращающая последовательность, поэтому, как известно [8], частотный базис v вложен в частотный базис $f+\alpha$.

Таким образом, утверждение 1 леммы доказано. Утверждения 2, 3 доказаны в монографии В. Б. Левенштама [4, гл. 3, лемма 1.8]. $\triangleright$

Из леммы 1, с учетом вытекающего из первого уравнения (5) равенства

$$
x_\omega=z_{\omega 1}+\omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-1}(z_{\omega 1},\omega t)+\omega^{-n/2}\varphi_n(z_{\omega 1},\omega t),\tag{13}
$$

следует существование такого $\omega_0>0$, что при $\omega>\omega_0$ уравнение (1) имеет условно периодическое решение x_ω с указанным в теореме базисом частот, для которого выполняется, указанное в теореме предельное соотношение. Его единственность доказывается как и в предыдущей работе [2], с учетом того, что используемая там лемма 2 верна и для уравнений с ограниченными коэффициентами.

Докажем теперь утверждения 2, 3 теоремы 1. Перепишем теперь (6) в виде системы уравнений, у которой в левой части стоит неизвестная x и ее производные, а в правой — x_j. Применяя теорему о неявных функциях к первым $k+1$ уравнениям системы, получаем, что существуют такие положительные числа ρ_0, ρ_1, ω_0, что при $\omega>\omega_0$ каждому решению ω уравнения (1), удовлетворяющему условию $|x(t)|\leqslant\rho_0$ отвечает единственное решение $z(t)$ системы (6), удовлетворяющее условию $|z_t(t)| \leqslant \rho_1$. При этом существуют такие положительные величины $c_1(\omega)$ и $c_2(\omega)$, что для любых решений x^1 и x^2 уравнения (1) и соответствующих им решений z_1 и z_2 системы (6) выполняются оценки

$$c_1(\omega)|z_2(t) - z_1(t)| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{d^j}{dt^j}\big[x^2 - x^1\big] \right| \leqslant c_2(\omega)|z_2(t) - z_1(t)|.$$

Таким образом, утверждения 2 и 3 теоремы являются следствиями утверждений 2, 3 леммы 1. $\rhd$

Замечание. Утверждения 2 и 3 доказанной теоремы верны и для рассмотренного в работе [2] класса систем.

2. Асимптотика условно периодического решения

Продолжим рассмотрение системы (1). Дополнительно к условиям § 1 будем предполагать, что вектор-функции f_j имеют непрерывные производные по $z_0, z_1, \ldots, z_{[n/2]}$ любого порядка. Асимптотику условно периодического решения x_ω, о котором говорится в теореме 1, будем искать в виде

$$x_\omega(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n}^{\infty} \omega^{-i/2} [u_i + v_i(\omega t)], \tag{14}$$

где $u_i \in \mathbb{R}^m$, $v_i(\tau)$ — условно периодические функции со значениями в $\mathbb{R}^m$, с нулевым средним. Для нахождения коэффициентов асимптотики подставим ряд (14) в (1), разложим вектор-функции f_j, $j \geqslant 0$, в случае нечетного n, и f_j, $j > 0$, в случае четного n в ряды Тейлора по переменным z_i с центром $w_j^0 = (y_0, 0, \ldots, 0)$. Разложим f_0 в случае четного n в ряд Тейлора по переменным $z_0, z_1, \ldots, z_{[n/2]}$ с центром $w_0^0 = \big(y_0, 0, \ldots, 0, \frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial \tau^{[n/2]}}\big)$. После этого приравняем коэффициенты в обеих частях полученного равенства при одинаковых степенях ω. Более подробно процесс построения описан в предыдущей работе. Обозначим

$$x_{\omega,s}(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{s} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n}^{s+n-1} \omega^{-i/2} v_i(\omega t).$$

Теорема 2. *Для любого $s = 0, 1, \ldots$ найдутся такие положительные числа c_s, ω_s, что при $\omega > \omega_s$, справедлива оценка*

$$\|x_\omega - x_{\omega,s}\|_{C^k(R)} \leqslant c_s \omega^{-(s+1)/2},$$

где $k = [(n-1)/2]$. Построение приближения $x_{\omega,s}$ при известном векторе y_0 сводится к нахождению условно периодических с нулевым средним решений s уравнений вида $\frac{d^n y}{d\tau^n} = q(\tau)$, где $q(\tau)$ — известная условно периодическая с нулевым средним вектор-функция вида (2) и к решению s систем линейных алгебраических уравнений с единой невырожденной основной матрицей $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ и известными свободными членами.

$\lhd$ Доказательство практически полностью повторяет, приведенное в [7], доказательство теоремы 2. Отличие в том, что теперь мы разыскиваем ограниченное решение системы

$$\dot{u} = Bu + f(u, t, \omega).$$

А для него при достаточно больших ω, как мы уже видели в § 1, справедливо представление $u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) f(u(s), s, \omega) ds \equiv [R(u,\omega)](t)$. Здесь

$$G^* = \begin{cases} -S \operatorname{diag}\left(e^{tJ_+}, 0\right) S^{-1}, & t < 0, \\ S \operatorname{diag}\left(0, e^{tJ_-}\right) S^{-1}, & t > 0, \end{cases}$$

где S — невырожденная матрица такая, что $G = S \operatorname{diag}(J_-, J_+) S^{-1}$, а $J_\mp$ — матрицы жордановой формы, характеристические числа которых лежат в левой и, соответственно, правой открытой комплексной полуплоскости. Оператор $R(u,\omega)$ обладает всеми необходимыми для продолжения доказательства свойствами. ▷

В заключении автор выражает благодарность своему научному руководителю Валерию Борисовичу Левенштаму за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями. Части I–III // Успехи механики.—2006.—Т. 4, № 3.—С. 26–158.
2. *Басистая Д. А., Левенштам В. Б.* Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды.—2004.—С. 46–48.
3. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Докл. АН.—2005.—Т. 405, № 2.—С. 169–172.
4. *Левенштам В. Б., Хатламаджиян Г. Л.* Распространение теории метода усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстроосцилирующие по времени слагаемые // Изв. вузов. Математика.—2006.—№ 6.—С. 35–47.
5. *Левенштам В. Б.* Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми.— Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008.—368 с.
6. *Левенштам В. Б.* Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Дифференц. уравнения.— 2008.—Т. 44, № 1.—С. 52–68.
7. *Ишмеев М. Р.* Асимптотика периодического решения дифференциального уравнения с большими высокочастотными слагаемыми // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 3.—С. 21–34.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.—М.: Наука, 1967.—472 с.

Статья поступила 7 декабря 2012 г.

Ишмеев Марат Рашидович
Южный федеральный университет,
студент факультета математики, механики
и компьютерных наук
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: bayern89@mail.ru

THE ASIMPTOTICS OF CONDITIONALLY PERIODIC SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION CONTAINING GREAT HIGH-FREQUENCY TERMS

Ishmeev M. R.

It was constructed and justified the full asimptotic of conditionally periodic solution for the systems of non-linear differential equations containing items proportional to some degrees of frequency.

Key words: differential equations, high frequency terms, averaging method, asimptotic.