Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 3, С. 63–73

УДК **517.518.234+ 517.548.3**

ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КЛАССАХ СМИРНОВА[1]

С. Б. Климентов

В работе исследуется краевая задача Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций класса Смирнова в ограниченной односвязной области, граница которой либо кривая Радона без точек заострения, либо кривая Ляпунова. Коэффициент краевого условия предполагается либо непрерывным с возмущением измеримой ограниченной функцией, либо непрерывным с возмущением функцией ограниченной вариации. В работе используется построенное в работе автора [16] специальное представление второго рода для обобщенных аналитических функций класса Смирнова, которое позволяет свести эту задачу к соответствующей задаче для голоморфных функций, изученной в работах автора [1, 2].

Ключевые слова: задача Римана — Гильберта, обобщенная аналитическая функция, классы Смирнова.

1. Введение. Основные определения

Задача Римана — Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова изучалась в работах: [1] для областей с ляпуновскими границами и в [2] для областей с радоновскими границами. Классы Смирнова для обобщенных аналитических функций были впервые введены К. М. Мусаевым в [3]. В дальнейшем им исследовались различные свойства этих классов в [4–8]. Краевые задачи им не рассматривались, за исключением «задачи о скачке» [8]. Ряд новых свойств этих классов (в том числе критерии разрешимости краевых задач для классов Харди обобщенных аналитических функций) были получены в [9–14].

Задача Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций в настоящей работе исследуется посредством сведения к двумерным не особым интегральным уравнениям. Этот подход обобщает схему, развитую И. Н. Векуа [15, гл. 4, § 7] для единичного круга и гёльдеровых вплоть до края решений, и основывается на построенном в [16] специальном представлении второго рода для обобщенных аналитических функций класса Смирнова.

Настоящая работа обобщает соответствующие результаты из работ автора [1, 2, 10]. Основная трудность состоит в невозможности, в случае негладкой границы, сведения задачи посредством конформного отображения к задаче для классов Харди обобщенных аналитических функций.

Обозначим G ограниченную односвязную область в комплексной z-плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, со спрямляемой границей $\Gamma = \partial G$; $\overline{G} = G \cup \Gamma$; $A(z), B(z) \in L_s(\overline{G})$, $s > 2$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., заявка № 2012-1.1-12-000-1003-029.

(используются обозначения книги [15]), — заданные комплексные функции. Не ограничивая общности, будем считать, что точка $z = 0$ расположена внутри G.

Рассмотрим в $\overline{G}$ каноническую эллиптическую систему в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}} w + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0, \tag{7}$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, u и v — ее действительная и мнимая части, $\partial_{\bar{z}} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$ — производная в смысле Соболева.

Решение $w(z)$ системы (7) называют *обобщенной аналитической функцией* [15, с. 148].

Пусть $\{G_n\}$ — последовательность областей, замыкания которых лежат внутри G, границы Γ_n этих областей спрямляемы и сходятся к Γ в том смысле, что каждая точка $z \in G$ принадлежит всем G_n, начиная с некоторого номера.

Определение 1. Будем говорить, что решение системы (7) принадлежит классу $E_p(A, B)$, $p > 0$, если для некоторой постоянной $M_p(w) < \infty$, не зависящей от n, имеют место неравенства

$$\int\limits_{\Gamma_n} |w(z)|^p |dz| \leqslant M_p(w), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

хотя бы для одной последовательности спрямляемых кривых $\{\Gamma_n\}$ с указанным выше свойством.

При $A = B \equiv 0$ имеем классический класс Смирнова E_p [17, с. 422], [18, с. 90].

Аналогично определяются классы Смирнова $E_p(A, B)$, если коэффициенты $A(z)$, $B(z)$ и решение $w(z)$ рассматриваются определенными во внешности области G.

Замечание 1. Сведение исследования свойств классов $E_p(A, B)$ к свойствам обобщенных классов Харди $H_p(A, B)$ из [9] посредством конформного отображения $\varphi = \varphi(\zeta)$ области G на единичный круг $D : |\zeta| < 1$, как это делается в случае классических классов Смирнова E_p (см., например, [17, с. 423], [18, с. 91–92]), не представляется возможным, поскольку при таком отображении уравнение (7) переходит в уравнение

$$\partial_{\bar{\zeta}} w + A(\varphi(\zeta))\overline{\varphi'(\zeta)} w + B(\varphi(\zeta))\overline{\varphi'(\zeta)}\overline{w} = 0,$$

и, вообще говоря, при нерегулярной границе Γ сильно испортятся коэффициенты (не будут принадлежать $L_s(\overline{D})$, $s > 2$).

Пусть $\varphi = \varphi(\zeta)$ — однолистное конформное отображение единичного круга $D : |\zeta| < 1$ на G. Без ограничения общности везде далее считаем, что $\varphi(0) = 0$. Границу круга D будем обозначать C.

Замечание 2. Как и в классическом случае [18, с. 91], в определении 1 в роли кривых Γ_n можно брать лишь образы окружностей $C_r = \{\zeta : |\zeta| = r < 1\}$ при конформном отображении $\varphi = \varphi(\zeta)$ [11]. В дальнейшем эти образы будем обозначать Γ_r, считая $\Gamma_1 = C$.

Определение 2 [18, с. 90]. Если гармоническая функция $\ln|\varphi'(\zeta)|$ представима в круге $|\zeta| < 1$ интегралом Пуассона — Лебега, а следовательно, голоморфная функция $\ln\varphi'(\zeta)$ представима интегралом Шварца через $\ln|\varphi'(e^{i\sigma})|$ ($\zeta = re^{i\sigma}$), то область G называется *областью класса* $\mathscr{C}$ (В. И. Смирнова).

Если $z = z(s)$ — параметрические уравнения спрямляемой кривой Γ, где $s \in [0, S]$ — длина дуги на Γ (S — длина всей кривой Γ), то почти всюду на Γ $z'(s) = e^{i\theta(s)}$, причем это равенство определяет угол $\theta(s)$ с точностью до 2π. Геометрический смысл угла $\theta(s)$ очевиден — это угол наклона касательной к Γ относительно оси абсцисс.

Определение 3 [18, с. 19]. Если угол $\theta(s)$ (определяемый в каждой точке с точностью до кратного 2π) может быть выбран так, чтобы функция $\theta(s)$ имела ограниченную вариацию на $[0, S]$, то Γ будем называть *кривой Радона.* Такие кривые также называют кривыми с ограниченным вращением или кривыми с ограниченной вариацией поворота.

Всегда можно определить $\theta(s)$ для любого $s \in [0, S]$ так, чтобы скачки функции $\theta(s)$ по модулю не превышали π. В дальнейшем всегда предполагаем это выполненным.

Определение 4 [18, с. 20]. Те точки, в которых скачок функции $\theta(s)$ по модулю равен π, будем называть *точками заострения кривой* Γ.

Определение 5 [18, с. 14]. Если угол $\theta(s)$ может быть выбран так, чтобы функция $\theta(s) \in C_\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, в некоторой окрестности любой точки кривой Γ, то Γ будем называть *кривой Ляпунова.*

Замечание 3. Кривые Радона без точек заострения и кривые Ляпунова являются кривыми класса $\mathscr{C}$ [18, с. 90].

В дальнейшем считаем Γ либо кривой Ляпунова либо кривой Радона без точек заострения.

В работе рассматривается *задача Римана — Гильберта* (*Гильберта*) в следующей постановке: найти в G решение $w = w(z)$ уравнения (7) $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 1$, предельные значения которого на Γ по некасательным направлениям почти всюду на Γ удовлетворяют краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{\lambda(t)}w(t)\right\} = g(t), \tag{8}$$

где $t = t(s)$, $s \in [0, S]$, — аффикс точки, принадлежащей кривой Γ, $\lambda = \lambda(t)$ — комплекснозначная измеримая функция, определенная на Γ, удовлетворяющая условию $0 < k_0 \leqslant |\lambda(t)| \leqslant k_1 < \infty$, k_0, k_1 — вещественные постоянные, $g(t) = g(t(s)) \equiv g(s) \in L_p(\Gamma) \equiv L_p[0, S]$ — определенная на Γ вещественная функция. Разделив (8) на $|\lambda(t)|$, придем к эквивалентному краевому условию, в котором $|\lambda(t)| \equiv 1$:

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega(t)}w(t)\right\} = g(t), \tag{9}$$

где $\omega(t) = \arg \lambda(t)$. В дальнейшем везде считаем $|\lambda(t)| \equiv 1$.

Всюду ниже для функции f, определенной на Γ, будем использовать обозначения $f(t) \equiv f(t(s)) = f(s)$. Если $w(z) \in E_p(A, B)$, то под $w(t) = w^+(t)$, $t \in \Gamma$, будем понимать предельные значения на Γ по некасательным путям при $z \to t \in \Gamma$, $z \in G$, а под $w^-(t)$ — предельные значения на Γ по некасательным путям при $z \to t \in \Gamma$, $z \in E \setminus \overline{G}$, E — комплексная z-плоскость.

Следуя [15, с. 179], уравнением, *сопряженным* уравнению (7), будем называть комплексное уравнение

$$\partial_{\bar z} w^* - A(z)w^*(z) - \overline{B(z)w^*(z)} = 0, \quad z \in G, \tag{10}$$

и, обобщая [15, с. 301], однородной задачей, *сопряженной* задаче (8), будем называть задачу отыскания в G решения уравнения (10) $w^*(z) \in E_{p'}(-A, -\overline{B})$, $1/p + 1/p' = 1$, предельные значения которого на Γ по некасательным направлениям почти всюду на Γ удовлетворяют краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{\lambda(t)t'(s)w^*(t)\right\} = 0. \tag{11}$$

Следуя [18, с. 190] (и [1, 2]), предположим, что при выборе хотя бы одной точки начала отсчета $s=0$ длины дуги s на Γ функция $\omega(s)$ удовлетворяет условию

$$\omega(s)=\widetilde{\omega}_0(s)+\widetilde{\omega}_1(s)+\omega_2(s), \tag{12}$$

где $\widetilde{\omega}_0(s)$ — непрерывная функция в каждой точке сегмента $[0,S]$ (в крайних точках имеется в виду односторонняя непрерывность); $\widetilde{\omega}_1(s)$ — функция ограниченной вариации на сегменте $[0,S]$; $\omega_2(s)$ — измеримая на $[0,S]$ функция, удовлетворяющая условию

$$|\omega_2(s)|\leqslant\nu\pi,\quad 0<\nu<\frac{1}{2p},\quad 0<\nu<\frac{1}{2p'},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \tag{13}$$

Не ограничивая общности, можем считать [18, с. 190], что $\omega(0)=\omega(S)$ и $\widetilde{\omega}_1(s)$ непрерывна справа в точке $s=0$. После этого (12) можно переписать в виде [18, с. 190]

$$\omega(s)=\omega_0(s)+\omega_1(s)+\omega_2(s), \tag{14}$$

где $\omega_2(s)$ — прежняя; $\omega_1(s)$ — функция скачков $\widetilde{\omega}_1(s)$, s_k — не более чем счетное множество точек разрыва $\widetilde{\omega}_1(s)$:

$$\omega_1(0)=0,\quad \omega_1(s)=\sum_{0<s_k<s}h_k+[\widetilde{\omega}_1(s)-\widetilde{\omega}_1(s-0)],\quad 0<s\leqslant S,$$

$h_k=\widetilde{\omega}_1(s_k+0)-\widetilde{\omega}_1(s_k-0)$, а непрерывная на $[0,S]$ функция $\omega_0(s)$ равна сумме $\widetilde{\omega}_0(s)+[\widetilde{\omega}_1(s)-\omega_1(s)]$.

Не более чем счетное множество точек скачков функции $\omega(s)$ обозначим $\Xi=\{s_k\}$.

Если Γ — кривая Радона, т. е. функция $\theta(s)$ имеет ограниченную вариацию, для $\theta(s)$ имеет место разложение, аналогичное (14) (при $\omega_2(s)\equiv 0$):

$$\theta(s)=\theta_0(s)+\theta_1(s), \tag{15}$$

где функция $\theta_0(s)$ непрерывна на $[0,S]$, а $\theta_1(s)$ — функция скачков [18, с. 11–13]. Скачки функции $\theta(s)$ обозначим f_n, а не более чем счетное множество точек скачков функции $\theta(s)$ обозначим $\Theta=\{s_n\}$.

Если Γ — кривая Ляпунова, то в (15) будем иметь $\theta_1(s)\equiv 0$, $\theta(s)=\theta_0(s)\in C_\alpha$.

Очевидно, что начало отсчета $s=0$ длины дуги s можно считать не попадающим в $\Xi\cup\Theta$.

Определение 6. При исследовании краевой задачи (8) (или (9)) будем говорить, что выполнено условие $\mathbf{D}$, если:

1) когда Γ — кривая Ляпунова, в (14) либо $\omega_1(s)\equiv 0$, либо $\omega_2(s)\equiv 0$;

2) когда Γ — кривая Радона без точек заострения, в (14) $\omega_2(s)\equiv 0$.

2. Вспомогательные сведения

Рассматриваемая задача для уравнения (7) сводится к соответствующей задаче для голоморфных функций, которая, в свою очередь, приводится к задаче в единичном круге [1, 2]. Индекс задачи определяется через индекс последней задачи в единичном круге. Чтобы сформулировать определение индекса задачи, воспроизведем частично построения из [1, 2].

Построим в единичном круге $D:|\zeta|<1$ комплексной ζ-плоскости функцию

$$\Psi(\zeta)=\Phi(\varphi(\zeta))\left[\varphi'(\zeta)\right]^{1/p}, \tag{16}$$

где $\varphi = \varphi(\zeta)$ — однолистное конформное отображение единичного круга D на область G, а $\Phi(z)$ — голоморфная в G функция. Известно [18, с. 91], что $\Phi(z) \in E_p$ в G тогда и только тогда, когда $\Psi(\zeta) \in H_p$ — классу Харди (классу E_p в круге D).

Поскольку $\varphi'(\zeta) \neq 0$ при $|\zeta| < 1$, а кривая Γ есть кривая класса $\mathscr{C}$, при $|\zeta| < 1$ можно определить однозначную гармоническую функцию $\arg \varphi'(\zeta)$, всюду на окружности $\zeta = e^{i\sigma}$ имеющую некасательные предельные значения, причем в каждой точке гладкости кривой Γ имеет место соотношение [18, с. 88, 272]

$$\arg \varphi'(e^{i\sigma}) = \theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

В силу (16) краевая задача (9) для голоморфной функции $\Phi(z)$ будет эквивалентна краевой задаче

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\nu(\sigma)}\Psi(\zeta)\right\} = g(t(\zeta))|\varphi'(e^{i\sigma})|^{1/p}, \quad \zeta = e^{i\sigma}, \tag{18}$$

где с учетом (17)

$$\nu(\sigma) = \omega(s(\sigma)) + \frac{1}{p}\left(\theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2}\right) \tag{19}$$

и правая часть (18) принадлежит классу $L_p(C)$.

Индекс краевого условия. Если в (14) $\omega_1(s) \equiv 0$, Γ — кривая Ляпунова и имеет место (13), то индексом краевого условия (9) (а также (8)) будем называть число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}(\omega_0(S) - \omega_0(0)), \tag{20}$$

которое, следуя [18, с. 215], будем предполагать целым. Будем использовать обозначение $\operatorname{ind}_\Gamma \lambda(t) = \varkappa$, где $\lambda(t)$ — коэффициент краевого условия (8).

Пусть теперь в (14) $\omega_2(s) \equiv 0$ и Γ — кривая Радона без точек заострения. Так как функция $s(\sigma)$ и обратная к ней абсолютно непрерывны [18, с. 87], функция $\nu(\sigma)$ имеет ограниченную вариацию и для нее имеет место разложение, аналогичное (14), (15):

$$\nu(\sigma) = \nu_0(\sigma) + \nu_1(\sigma), \tag{21}$$

где функция скачков $\nu_1(\sigma)$ имеет вид:

$$\nu_1(\sigma) = \omega_1(s(\sigma)) + \frac{1}{p}\,\theta_1(s(\sigma)). \tag{22}$$

Очевидно, что не более чем счетное множество точек скачков функции $\nu(\sigma)$ есть образ множества $\Xi \cup \Theta$ при отображении $\sigma(s) : [0, S] \to [0, 2\pi]$. Занумеруем как либо это множество и будем обозначать $\{\sigma_k\}$. Скачки функции $\nu(\sigma)$ в точках $\{\sigma_k\}$ очевидно равны

$$n_k = h_k + \frac{1}{p}\,f_k, \tag{23}$$

где h_k и f_k — скачки функций $\omega(s)$ и $\theta(s)$ в прообразе точки σ_k на $[0, S]$, причем в точке непрерывности одной из этих функций ее скачок считаем нулевым.

Обозначим n_k^+ и n_k^- соответственно положительные скачки и модули отрицательных скачков из (23), а точки этих скачков соответственно σ_k^+ и σ_k^-. Упорядочим их так, чтобы последовательности $\left\{n_k^+\right\}$ и $\left\{n_k^-\right\}$ были убывающими. Сопряженные показатели p и p' $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ будем считать такими, что

$$\frac{n_k^-}{2\pi} \neq \frac{1}{2p'}, \quad \frac{n_k^+}{2\pi} \neq \frac{1}{2p},$$

и, следуя [18, с. 209], обозначим $\overset{(p)}{\varkappa}_1$ такое число, что

$$\frac{n_k^-}{2\pi} > \frac{1}{2p'},\ k = 1, 2, \ldots, \overset{(p)}{\varkappa}_1; \quad \frac{n_k^-}{2\pi} < \frac{1}{2p'},\ k > \overset{(p)}{\varkappa}_1; \tag{24}$$

а $\overset{(p)}{\varkappa}_2$ обозначим такое число, что

$$\frac{n_k^+}{2\pi} > \frac{1}{2p},\ k = 1, 2, \ldots, \overset{(p)}{\varkappa}_2; \quad \frac{n_k^+}{2\pi} < \frac{1}{2p},\ k > \overset{(p)}{\varkappa}_2. \tag{25}$$

Далее обозначим $n_0 = n_0^{(1)} - n_0^{(0)}$, где $n_0^{(0)} = \nu_0(2\pi) - \nu_0(0)$, $n_0^{(1)} = \nu_1(0+0) - \nu_1(2\pi - 0)$, и, следуя [18, с. 206], определим целое число $\varkappa_0$, исходя из условий

$$2n_0 = 2\pi \cdot \varkappa_0 + n_0^+, \quad 0 \leqslant n_0^+ < 2\pi. \tag{26}$$

Индексом краевого условия (9) в этом случае будем называть число

$$\mathrm{ind}_\Gamma \lambda(t) = \overset{(p)}{\varkappa} = \overset{(p)}{\varkappa}_1 - \overset{(p)}{\varkappa}_2 - \varkappa_0, \tag{27}$$

при условии, что решение краевой задачи ищется в классе $E_p(A, B)$ (т. е. индекс в этом случае зависит от класса, которому принадлежат решения).

Если в (14) $\omega_2(s) \equiv 0$ и Γ — кривая Ляпунова, определение индекса аналогично с тем упрощением, что в (22) $\theta_1(s(\sigma)) \equiv 0$ и в (23) $f_k = 0$ для любого k, т. е. множество Θ пусто.

Везде далее при предположении, что $\omega_1(s) \equiv 0$ считаем, что Γ — кривая Ляпунова, а при предположении, что $\omega_2(s) \equiv 0$ считаем, что Γ — либо кривая Радона без точек заострения, либо кривая Ляпунова.

Индекс сопряженного краевого условия. Выразим индекс краевого условия (11), который будем помечать звездочкой (как и все величины, относящиеся к сопряженному краевому условию), через индекс краевого условия (9) ($\varkappa$ или $\overset{(p)}{\varkappa}$).

Если Γ — кривая Ляпунова и $\omega_1(s) \equiv 0$, то очевидно, что

$$\varkappa^* = -\varkappa - 1. \tag{28}$$

Пусть теперь $\omega_2(s) \equiv 0$ и Γ — кривая Ляпунова либо кривая Радона без точек заострения.

Аналогично (18) преобразуем краевое условие (11) к виду

$$\mathrm{Re}\left\{e^{-i\nu^*(\sigma)}\Psi^*(\zeta)\right\} = 0, \quad \zeta = e^{i\sigma}, \tag{29}$$

где с учетом (17) и того, что решение сопряженной задачи ищется в классе $E_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$,

$$\nu^*(\sigma) = -\omega(s(\sigma)) + \frac{1}{p'}\left(\theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2}\right) - \theta(s(\sigma)).$$

Легко видеть, что

$$\nu^*(\sigma) = -\left[\omega(s(\sigma)) + \frac{1}{p}\big(\theta(s(\sigma)) - \sigma\big) + \sigma\right] - \frac{\pi}{2p'}. \tag{30}$$

С учетом (30), (24) и (25) получаем, что $\overset{(p)}{\varkappa^*}_1 = \overset{(p)}{\varkappa}_2$; $\overset{(p)}{\varkappa^*}_2 = \overset{(p)}{\varkappa}_1$.

Если в (26) $n_0^+ = 0$, то из (30) также очевидно соотношение $-\varkappa_0^* = \varkappa_0 - 2$, откуда

$$\overset{(p)}{\varkappa^*} = -\overset{(p)}{\varkappa} - 2. \tag{31}$$

В общем случае (31) следует из совпадения количества условий разрешимости неоднородной задачи (18), равное числу решений однородной задачи (29) ($\overset{(p)}{\varkappa^*} + 1$), с $-\overset{(p)}{\varkappa} - 1$ [2]. Поскольку при $n_0^+ \neq 0$ формула (31) не имеет места, отсюда можно сделать вывод, что при наших предположениях всегда $n_0^+ = 0$.

Лемма 1. *Множество $E_p(A, B)$, $p \geqslant 1$, с нормой*

$$\|w\|_{E_p} = \left\{ \int\limits_{\Gamma} |w(z(s))|^p |dz| \right\}^{1/p}$$

является действительным банаховым пространством.

Здесь $w(z(s))$ — предельные значения по некасательным путям на Γ функции $w(z) \in E_p(A, B)$.

В случае $A(z) = B(z) \equiv 0$ получаем обычную норму в классическом пространстве Смирнова E_p.

$\lhd$ Получается дословным повторением доказательства теоремы 5 из работы [12] с заменой пространства $H_p(A, B)$ на $E_p(A, B)$ и ссылок на работу [9] на ссылки на работу [11]. $\rhd$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 [16]**.** *Пусть выполнено условие $\boldsymbol{D}$, и либо индекс $\varkappa$ краевой задачи (8) неотрицателен, либо индекс $\overset{(p)}{\varkappa} \geqslant -1$. Если $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 1$, то существует оператор $P_\lambda : E_p(A, B) \to L_p(\Gamma)$ (также $P_\lambda : L_m(\overline{G}) \to L_m(\overline{G})$, $m > 1$) такой, что имеет место соотношение*

$$w(z) + P_\lambda w(z) = \Phi(z), \tag{32}$$

где $\Phi(z) \in E_p$ и почти всюду на Γ

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda}(t) w(t)\} = \operatorname{Re}\{\overline{\lambda}(t) \Phi(t)\}, \quad t \in \Gamma. \tag{33}$$

Если $\Phi(z) \in E_p$, то соотношением (32) однозначно определяется функция $w(z) \in E_p(A, B)$, удовлетворяющая почти всюду на Γ условию (33), и формула (32) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $E_p(A, B)$ и E_p, причем оператор $P_\lambda : E_p(A, B) \to L_p(\Gamma)$ $(L_m(\overline{G}) \to L_m(\overline{G})$, $m > 1)$ вполне непрерывен, и после гомотетии $\widetilde{z} = \varepsilon z$, $\varepsilon > 0$, области G с достаточно малым $\varepsilon > 0$ оператор $P_\lambda : L_m(\overline{G}) \to L_m(\overline{G})$ при некотором $m : 1 < m < 2p$ становится оператором сжатия.

3. Формулировка основных результатов

Теорема 2. *Если в (14) $\omega_1(s) \equiv 0$ и Γ — кривая Ляпунова, то при $\varkappa \geqslant 0$, где $\varkappa$ определено в (20), однородная задача (7), (9) (при $g(t) \equiv 0$) имеет точно $2\varkappa + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса $E_p(A, B)$, $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в $E_p(A, B)$ при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.*

Если $\varkappa < 0$, то однородная задача (7), (9) не имеет в $E_p(A,B)$ ненулевого решения, а неоднородная задача разрешима в $E_p(A,B)$ единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $-2\varkappa-1$ (вещественных) условий на свободный член $g(t)$ краевого условия (9):

$$\int\limits_{\Gamma} g(s)e^{i\omega(s)}w_k^*(t)t'(s)\,ds = 0, \tag{34}$$

где $w_k^*(t) \in E_{p'+\varepsilon}(-A,-\overline{B})$, $E_{p+\varepsilon}(-A,-\overline{B})$, $k = 1,\ldots,-2\varkappa-1$, $\varepsilon > 0$ мало, — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений сопряженной к (7), (9) краевой задачи (10), (11), имеющей индекс $\varkappa^* = -\varkappa - 1 \geqslant 0$.

Теорема 3. *Если в (14) $\omega_2(s) \equiv 0$, а Γ — кривая Ляпунова или кривая Радона без точек заострения, то при $\overset{(p)}{\varkappa} \geqslant 0$, где $\overset{(p)}{\varkappa}$ определено в (27), однородная задача (7), (9) (при $g(t) \equiv 0$) имеет точно $\overset{(p)}{\varkappa}+1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса $E_p(A,B)$, $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в $E_p(A,B)$ при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.*

Если $\overset{(p)}{\varkappa} < 0$, однородная задача (7), (9) не имеет ненулевых решений класса $E_p(A,B)$, $p > 1$, а неоднородная разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $-\overset{(p)}{\varkappa}-1$ (вещественных) условий на свободный член $g(t)$ краевого условия (9)

$$\int\limits_{\Gamma} e^{i\omega(s)}w_k^*(t(s))t'(s)g(s)\,ds = 0, \quad k = 1,2,\ldots,-\overset{(p)}{\varkappa}-1, \tag{35}$$

где $\{w_k^*(z)\}$ — полная система линейно независимых (в вещественном смысле) решений класса $E_{p'}(-A,-\overline{B})$ задачи (10), (11), сопряженной (7), (9).

Отметим, что при $\overset{(p)}{\varkappa} = -1$ $k = 0$, что означает однозначную безусловную разрешимость неоднородной задачи.

4. Доказательство основных результатов

При $\varkappa \geqslant 0$ либо $\overset{(p)}{\varkappa} \geqslant -1$ утверждения теорем 1 и 2 непосредственно следуют из соответствующих результатов для голоморфных функций [1, 2] и теоремы 1. Действительно, в этом случае оператор $I + P_\lambda$ осуществляет (вещественный) изоморфизм пространства решений класса E_p краевой задачи (9) для голоморфных функций и пространства решений класса $E_p(A,B)$ краевой задачи (7), (9).

Рассмотрим случай отрицательного индекса и докажем необходимость условий (34) и (35).

Пусть $w^*(z) \in E_{p'}(-A,-\overline{B})$ — произвольное решение однородной сопряженной задачи (10), (11), а $w(z) \in E_p(A,B)$ — решение задачи (7), (9). Отметим, что имеет место равенство [11]:

$$\operatorname{Im}\int\limits_{\Gamma} w(t)w^*(t)\,dt = 0.$$

Отсюда будем иметь:

$$0 = \operatorname{Im}\int\limits_{\Gamma} e^{-i\omega(s)}w(t)e^{i\omega(s)}w^*(t)t'(s)\,ds = \int\limits_{\Gamma} g(s)e^{i\omega(s)}w^*(t(s))t'(s)\,ds.$$

В силу уже доказанного для $\varkappa \geqslant 0$ и $\overset{(p)}{\varkappa} \geqslant -1$ и соотношений (28), (31), отсюда получаем необходимость условий (34) и (35).

Далее, пусть $w(z) \in E_p(A,B)$ — решение однородной задачи (7), (9) при $\varkappa < 0$ либо $\overset{(p)}{\varkappa} < 0$. Тогда функция $\Phi(z) \in E_p$ в основном представлении (первого рода) обобщенной аналитической функции $w(z)$ класса $E_p(A,B)$ [11]

$$w(z) = \Phi(z)\exp\{-T(A + B(\overline{w}/w))(z)\}, \quad \Phi(z) \in E_p, \tag{36}$$

где

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f(t)}{t-z}\,dx\,dy, \quad t = x+iy,$$

$Tf(z) \in C_\alpha(\overline{G})$, $f(z) \in L_s(\overline{G})$, $\alpha = (s-2)/s$, есть решение однородной задачи

$$\mathrm{Re}\{\overline{\lambda_1(t)}\Phi(t)\} = 0, \quad t \in \Gamma, \tag{37}$$

где

$$\overline{\lambda_1(t)} = e^{-i\omega(t)} \cdot \exp\{-T(A + B\overline{w}/w)\}, \tag{38}$$

и индексы задач (9) и (37) совпадают. Отсюда, в силу [1, 2] $\Phi(z) \equiv 0$ и утверждения теорем 1 и 2 относительно однородной задачи с отрицательным индексом доказаны.

Перейдем к анализу неоднородной задачи при $\varkappa < 0$, либо $\overset{(p)}{\varkappa} < 0$ — четном. Сделаем замену искомой функции $w_0(z) = z^n w(z)$, где $n = -\varkappa$ либо $n = -\frac{\overset{(p)}{\varkappa}}{2}$. Тогда функция $w_0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\overline{z}} w_0 + A(z)w_0 + B_0(z)\overline{w_0} = 0, \tag{39}$$

где $B_0(z) = B(z)\frac{z^n}{\overline{z}^n}$, и краевому условию

$$\mathrm{Re}\left\{\overline{\lambda_0(t)}w_0(t)\right\} = g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{40}$$

где $\lambda_0(t) = e^{i\omega(t)} \cdot (\overline{z})^{-n}$.

С учетом того, что область G содержит точку $z = 0$, имеем $\mathrm{ind}_\Gamma \lambda_0 = 0$.

В силу уже доказанных частей теорем 1 и 2 задача (39), (40) имеет решение $w_0(z) \in E_p(A, B_0)$ (и даже множество решений, зависящее от одного вещественного параметра). Пусть $w_0(z) = \Phi_0(z)e^{\chi(z)}$ — представление вида (36), $\chi(z) = \exp\{-T(A + B_0\overline{w}_0/w_0)\} = \exp\{-T(A + B\overline{w}/w)\}$, где $w(z) = w_0(z)z^{-n}$. Очевидно, для того чтобы так определенная функция $w(z)$ была (единственным) решением задачи (7), (9) класса $E_p(A,B)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi_0(z)$ имела вид $\Phi_0(z) = z^n\Phi(z)$, где $\Phi(z) \in E_p$ есть решение краевой задачи

$$\mathrm{Re}\left\{\overline{\lambda_2(t)}\Phi(t)\right\} = g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{41}$$

где $\lambda_2(t) = e^{i\omega(t)} \cdot e^{\overline{\chi(t)}}$.

Так как $\mathrm{ind}_\Gamma \lambda_2(t) = \mathrm{ind}_\Gamma \lambda(t) < 0$, для существования (единственного) решения $\Phi(z) \in E_p$ задачи (41), необходимо и достаточно, чтобы функция $g(t)$ удовлетворяла $2n-1$ независимым вещественным условиям [1, 2]:

$$\int\limits_\Gamma g(s)e^{i\omega(s) - \chi(t(s))}\,\Phi_k^*(t(s))t'(s)ds = 0, \quad k = 1, \ldots, 2n-1, \tag{42}$$

где $\{\Phi_k^*(z)\}$ — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений краевой задачи, сопряженной задаче (41).

Отсюда очевидна достаточность условий (34) и (35) в рассматриваемом случае.

Если же $\overset{(p)}{\varkappa} < -1$ — нечетное, полагаем $n = -\frac{\overset{(p)}{\varkappa}+1}{2}$ и повторяем все вышеприведенные рассуждения с теми лишь отличиями, что в (40) $\mathrm{ind}_\Gamma \lambda_0(t) = -1$ и в (42) количество условий будет равно $-\overset{(p)}{\varkappa} - 1$.

Литература

1. *Климентов С. Б.* Задача Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова // Исслед. по мат. анализу, дифференц. уравнениям и их приложениям.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 252–263.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4).
2. *Климентов С. Б.* Задача Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова в области с радоновской границей // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2011.—№ 3.—С. 14–18.
3. *Мусаев К. М.* Некоторые классы обобщенных аналитических функций // Изв. Акад. наук Азерб. ССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук.—1971.—№ 2.—С. 40–46.
4. *Мусаев К. М.* О некоторых экстремальных свойствах обобщенных аналитических функций // Докл. АН СССР.—1972.—Т. 203, № 2.—С. 289–292.
5. *Мусаев К. М.* Теоремы типа Ф. Рисса в теории обобщенных аналитических функций // Специальные вопросы теории функций.—Баку: Изд-во «ЕЛМ», 1980.—С. 137–144.
6. *Мусаев К. М.* Об ограниченности сингулярного интеграла Коши в классе обобщенных аналитических функций // Изв. Акад. наук Азерб. ССР. Математика. Физика. Техника.—1986.—Т. 7, № 6.—С. 3–8.
7. *Мусаев К. М., Гасанова Т. Х.* Об аннуляторах некоторых классов обобщенных аналитических функций // Тр. ИММ АН Азербайджана.—1998.—Т. 71, № 16.—С. 162–168.
8. *Musaev K. M., Gasanova T. Kh.* The boundary value problem in the class of generelized analytic functions — jump problem // Transactions of AS Azerbaijan.—1999.—Vol. 5, № 19.—P. 109–112.
9. *Климентов С. Б.* Классы Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2003.—№ 3.—С. 6–10.
10. *Климентов С. Б.* Краевая задача Римана-Гильберта в классах Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки.—2004.—№ 4.—С. 3–5.
11. *Климентов С. Б.* Классы Смирнова обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2005.—№ 1.—С. 13–17.
12. *Климентов С. Б.* Классы BMO обобщенных аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 1.—С. 27–39.
13. *Климентов С. Б.* Теорема двойственности для классов Харди обобщенных аналитических функций // Комплексный анализ. Теория операторов. Мат. моделирование.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А.—2006.—С. 63–73.
14. *Климентов С. Б.* Представления второго рода для классов Харди и BMO обобщенных аналитических функций // Исслед. по современному анализу и мат. моделированию.—Владикавказ: ИПМИ ВНЦ РАН.—2008.—С. 38–54.
15. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
16. *Климентов С. Б.* Специальное представление второго рода для обобщенных аналитических функций класса Смирнова // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки.—2012.—№ 2.—С. 12–18.
17. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1966.—630 с.
18. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости.—М.: Наука, 1975.—295 с.

Статья поступила 28 августа 2011 г.

Климентов Сергей Борисович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник лаб. компл. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: sklimentov@pochta.ru

THE RIEMANN–HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS IN SMIRNOV CLASSES

Klimentov S. B.

Under study is the Riemann–Hilbert boundary value problem for generalized analytic functions of a Smirnov class in a bounded simply connected domain whose boundary is a Lyapunov curve or a Radon curve without cusps. The coefficient of the boundary value condition is assumed continuous and perturbed by a bounded measurable function or continuous and perturbed by a bounded variation function. The paper uses the special representation for generalized analytic functions of Smirnov classes from the author's paper [16], which reduces the problem to that for holomorphic functions. The problem for the holomorphic functions was under study in the author's papers [1, 2].

Key words: Riemann–Hilbert boundary value problem, generalized analytic functions, Smirnov classes.