Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 3, С. 45–57

УДК **517.11**

СРАВНИМЫЕ ПО СТОЛБЦАМ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ПО СТОЛБЦАМ МАТРИЦЫ НАД РЕШЕТКАМИ

А. В. Жуклина

В работе изучаются сравнимые по столбцам матрицы над решеткой $(L, \leqslant)$, т. е. матрицы, столбцы которых образуют линейно упорядоченное множество относительно частичного порядка, определенного на L. Установлены их некоторые свойства и исследованы вопросы разрешимости матричных уравнений, содержащих эти матрицы.
В классе сравнимых по столбцам матриц выделено подмножество пропорциональных по столбцам матриц. Для последних также установлен ряд свойств и рассмотрены вопросы разрешимости матричных уравнений.

Ключевые слова: решеточные матрицы, решетки.

1. Обозначения и терминология

Пусть $(L, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Будем обозначать через 0 (1) наименьший (наибольший) элемент в $(L, \leqslant)$ (если он существует). Если $(L, \leqslant)$ — решетка, то через $\vee$ и $\wedge$ будем обозначать операции объединения и пересечения соответственно.

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка. *Решеточными* называются матрицы, элементы которых принадлежат множеству L. Обозначим через $L^{m\times n}$ множество всех решеточных матриц размера $m \times n$ $(m, n \geqslant 1)$ с элементами из L. Элементы матриц будем обозначать соответствующими малыми буквами: $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, $B = \|b_{ij}\|_{m\times n}$ и т. д. На множестве $L^{m\times n}$ определим частичный порядок: для любых матриц $A, B \in L^{m\times n}$ отношение $A \leqslant B$ равносильно тому, что $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Частично упорядоченное множество $(L^{m\times n}, \leqslant)$ является решеткой, в которой

$$A \vee B = \|a_{ij} \vee b_{ij}\|_{m\times n}, \quad A \wedge B = \|a_{ij} \wedge b_{ij}\|_{m\times n};$$

$$\lambda \wedge A = \|\lambda \wedge a_{ij}\|_{m\times n}, \quad \lambda \vee A = \|\lambda \vee a_{ij}\|_{m\times n}.$$

Пусть $A \in L^{m\times n}$. Будем обозначать через $A^{(i)}$ i-ую строку матрицы A $(i \in \{1, \ldots, m\})$, через $A_{(j)}$ — j-ый столбец матрицы A $(j \in \{1, \ldots, n\})$. Если $(L, \leqslant)$ — решетка с 0 и 1, то определена единичная матрица $E = E_{m\times m} \in L^{m\times m}$, где

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

а также определена квадратная $\{0, 1\}$-матрица E_{ij} с единственным ненулевым элементом 1, расположенным в i-ой строке и j-ом столбце.

Матрица размера $m \times n$, все элементы которой равны 0, называется *нулевой* и обозначается $0 = 0_{m\times n}$. Матрица размера $m \times n$, все элементы которой равны 1, называется *универсальной* и обозначается $J = J_{m\times n}$.

Определим на множестве решеточных матриц операцию умножения: для любых матриц $A \in L^{m\times t}$, $B \in L^{t\times n}$ положим $A \cdot B = AB = C_{m\times n}$, где для всех $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{it} \wedge b_{tj}).$$

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка, $A, B \in L^{m\times k}$, $C, D \in L^{k\times n}$. Если $A \leqslant B$ и $C \leqslant D$, то $AC \leqslant BD$. В частности, если $A \leqslant B$, то $AC \leqslant BC$; если $C \leqslant D$, то $AC \leqslant AD$.

Пусть $A \in L^{m\times m}$. Матрица A называется *обратимой слева* (или *справа*) над $(L, \leqslant)$, если существует матрица $B \in L^{m\times m}$ такая, что $BA = E_{m\times m}$ (или $AB = E_{m\times m}$). Матрица A называется *обратимой над* $(L, \leqslant)$, если она обратима слева и обратима справа.

Следующая теорема принадлежит Л. А. Скорнякову [1].

Теорема Скорнякова. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей, $A \in L^{m\times n}$. Следующие свойства матрицы A эквивалентны.*

1) *A обратима справа;*
2) *A обратима слева;*
3) *A обратима;*
4) *A ортогональна.*

Если каждый элемент матрицы $A \in L^{m\times n}$ имеет дополнение, то матрица $\bar{A} \in L^{m\times n}$, где $\bar{a}_{ij} = \overline{a_{ij}}$ для всех $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, называется *матрицей дополнений.*

Строчечным пространством матрицы A называется линейная оболочка векторов-строк матрицы A. *Столбцовым пространством* матрицы A называется линейная оболочка векторов-столбцов матрицы A. Строчечные и столбцовые пространства матрицы A обозначаются соответственно $\mathrm{Row}(A)$ и $\mathrm{Column}(A)$. Обозначим множество столбцовых подпространств через

$$\mathrm{Space}_{m\times n}(L) = \{\mathrm{Column}(Z) : Z \in L^{m\times n}\}.$$

Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей, $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times t}$. Уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\mathrm{Column(B)} \subseteq \mathrm{Column}(A)$ [2].

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка с нулем, $p \in L$ $(p \neq 0)$, $A \in L^{m\times n}$. Ненулевая матрица A называется p-матрицей, если $a_{ij} = 0$ или $a_{ij} = p$ для любых $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$.

Элемент a решетки $(L, \leqslant)$ называется $\vee$-неприводимым, если для любых $x, y \in L$ из равенства $a = x \vee y$ следует, что $a = x$ или $a = y$. Множество всех $\vee$-неприводимых элементов решетки $(L, \leqslant)$ обозначим через $\mathrm{join}(L, \leqslant)$.

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка, $A \in L^{m\times m}$. Множество $\{a_{ij} : i, j = 1,\dots,m\}$ конечно и порождает конечную подрешетку $(L(A), \leqslant)$ решетки $(L, \leqslant)$ с наименьшим элементом $\tilde{0} = \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{m} a_{ij}$ и наибольшим элементом $\tilde{1} = \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{m} a_{ij}$.

Матрица $\mathrm{RP}_i(A, \tilde{0}, v)$ называется i-ой прямоугольной частью матрицы A, содержащей элемент v, если

1) ее элементами являются только $\tilde{0}$ и v;

2) число элементов v в i-ой строке матрицы A равно $p+1$, число элементов v в i-ом столбце матрицы A равно $q+1$, где $p, q \geqslant 1$;

3) существуют индексы $i_1,\dots,i_p, j_1,\dots,j_q \in \{1,\dots,m\}$ такие, что

$$\mathrm{RP}_i(A, \tilde{0}, v) = v \wedge \left(\bigwedge_{r=1}^{p} \bigwedge_{s=1}^{q} (E_{ii} \vee E_{ij_s} \vee E_{i_r i} \vee E_{i_r j_s}) \right) \leqslant A.$$

Если в этом определении $p = 0$ или $q = 0$, то $\mathrm{RP}_i(A, \tilde{0}, v)$ называется i-ой линейной частью матрицы A, содержащей элемент v, и обозначается через $\mathrm{LP}_i(A, \tilde{0}, v)$.

Справедлив следующий структурный критерий идемпотентности матриц над дистрибутивными решетками [3].

Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка, $A \in L^{m\times m}$. Матрица A идемпотентна тогда и только тогда, когда $A^2 \leqslant A$ и A есть $\vee$-объединение прямоугольных и линейных частей, содержащих элементы множества $\mathrm{join}(L(A), \leqslant)$.

Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка. Ввиду конечности решетки $(L(A), \leqslant)$ множество степеней $\{A, A^2, A^3, \dots\}$ также конечно. Пусть k — наименьшее натуральное число, такое что $A^k = A^t$ для некоторого $t \in \{1, \dots, k-1\}$. Числа t и $k - t$ называются *индексом* и *периодом* матрицы A и обозначаются соответственно через $\mathrm{index}(A)$ и $\mathrm{period}(A)$.

2. Изложение основных результатов

2.1. Сравнимые по столбцам матрицы. Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка. Матрица $A \in L^{m\times n}$ называется *сравнимой по столбцам*, если $A_{(i)} \leqslant A_{(j)}$ или $A_{(j)} \leqslant A_{(i)}$ для любых $i, j = 1, \dots, n$.

Установим некоторые свойства сравнимых по столбцам матриц.

1. Если переставить строки или столбцы сравнимой по столбцам матрицы, то снова получим сравнимую по столбцам матрицу.

2. Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка, $B \in L^{m\times t}$, $C \in L^{t\times n}$, C — сравнимая по столбцам матрица. Тогда матрица $A = BC$ является сравнимой по столбцам.

$\lhd$ Зафиксируем произвольные индексы j, q ($j, q \in \{1, \dots, n\}$), тогда либо $c_{kj} \leqslant c_{kq}$ для всех $k = 1, \dots, t$, либо $c_{kq} \leqslant c_{kj}$ для всех k. Значит, либо для всех $i = 1, \dots, m$

$$(b_{i1} \wedge c_{1j}) \vee (b_{i2} \wedge c_{2j}) \vee \ldots \vee (b_{it} \wedge c_{tj}) \leqslant (b_{i1} \wedge c_{1q}) \vee (b_{i2} \wedge c_{2q}) \vee \ldots \vee (b_{it} \wedge c_{tq}),$$

либо для всех i

$$(b_{i1} \wedge c_{1q}) \vee (b_{i2} \wedge c_{2q}) \vee \ldots \vee (b_{it} \wedge c_{tq}) \leqslant (b_{i1} \wedge c_{1j}) \vee (b_{i2} \wedge c_{2j}) \vee \ldots \vee (b_{it} \wedge c_{tj}),$$

т. е. либо $a_{ij} \leqslant a_{iq}$ для любого $i = 1, \dots, m$, либо $a_{ij} \geqslant a_{iq}$ для всех i. Таким образом, A — сравнимая по столбцам матрица. $\rhd$

3. Сравнимая по столбцам матрица необратима над любой решеткой. Сравнимая по столбцам матрица необратима слева над любой решеткой. Сравнимая по столбцам матрица необратима справа над дистрибутивной решеткой.

Справедливость первых двух утверждений вытекает из свойства 2. Последнее утверждение следует из теоремы Скорнякова.

4. Пусть $(L, \leqslant)$ — булева решетка, $A \in L^{m\times n}$, A — сравнимая по столбцам матрица. Тогда матрица дополнений $\bar{A}$ также является сравнимой по столбцам.

$\lhd$ Если $(L, \leqslant)$ — булева решетка, $a, b \in L$, $a \leqslant b$, то $\bar{a} \wedge \bar{b} = \overline{a \vee b} = \bar{b}$, откуда $\bar{b} \leqslant \bar{a}$. Учитывая это замечание, получаем справедливость нужного утверждения. $\rhd$

Теорема 1. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей, $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times t}$, A — сравнимая по столбцам матрица, F — наибольший столбец матрицы A. Тогда если уравнение $AX = B$ разрешимо, то $B_{(k)} \leqslant F$ для любого $k = 1, \dots, t$.*

$\lhd$ Пусть уравнение $AX = B$ разрешимо. Тогда $\mathrm{Column}(B) \subseteq \mathrm{Column}(A)$. Значит, $B_{(k)} \in \mathrm{Column}(A)$ для любого $k = 1, \ldots, t$. Но поскольку F — наибольший столбец матрицы A, то любая линейная комбинация столбцов матрицы A содержится в F. Поэтому $B_{(k)} \leqslant F$ для всех $k = 1, \ldots, t$. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка, $A \in L^{m\times n}$. Если A — сравнимая по столбцам матрица, то частично упорядоченное множество $(\mathrm{Column}(A), \leqslant)$ является решеткой, в которой*

$$B \vee C = \|b_i \vee c_i\|_{m\times 1}, \quad B \wedge C = \|b_i \wedge c_i\|_{m\times 1};$$

$$\lambda \wedge B = \|\lambda \wedge b_i\|_{m\times 1}, \quad \lambda \vee B = \|\lambda \vee b_i\|_{m\times 1},$$

где $B, C \in \mathrm{Column}(A)$, $\lambda \in L$.

$\lhd$ Пусть $A \in L^{m\times n}$ — сравнимая по столбцам матрица, $B, C \in \mathrm{Column}(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} B \vee C = \Big(\big(\lambda_1 \wedge A_{(1)}\big) \vee \big(\lambda_2 \wedge A_{(2)}\big) \vee \ldots \vee \big(\lambda_n \wedge A_{(n)}\big) \Big) \\ \vee \Big(\big(\mu_1 \wedge A_{(1)}\big) \vee \big(\mu_2 \wedge A_{(2)}\big) \vee \ldots \vee \big(\mu_n \wedge A_{(n)}\big) \Big) \\ = \Big((\lambda_1 \vee \mu_1) \wedge A_{(1)} \Big) \vee \Big((\lambda_2 \vee \mu_2) \wedge A_{(2)} \Big) \vee \ldots \vee \Big((\lambda_n \vee \mu_n) \wedge A_{(n)} \Big) \in \mathrm{Column}(A). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \wedge C = \Big(\big(\lambda_1 \wedge A_{(1)}\big) \vee \big(\lambda_2 \wedge A_{(2)}\big) \vee \ldots \vee \big(\lambda_n \wedge A_{(n)}\big) \Big) \\ \wedge \Big(\big(\mu_1 \wedge A_{(1)}\big) \vee \big(\mu_2 \wedge A_{(2)}\big) \vee \ldots \vee \big(\mu_n \wedge A_{(n)}\big) \Big) \\ = \Big((\lambda_1 \wedge \mu_1) \wedge A_{(1)} \Big) \vee \Big((\lambda_1 \wedge \mu_2) \wedge A_{(1)} \wedge A_{(2)} \Big) \\ \vee \ldots \vee \Big((\lambda_1 \wedge \mu_n) \wedge A_{(1)} \wedge A_{(n)} \Big) \vee \ldots \vee \Big((\lambda_n \wedge \mu_n) \wedge A_{(n)} \Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Но поскольку для всех $i, j = 1, \ldots, n$ столбец $A_{(i)}$ сравним со столбцом $A_{(j)}$, то $A_{(i)} \wedge A_{(j)}$ равно $A_{(i)}$ или $A_{(j)}$, а потому (1) можно записать в виде: $\big(\eta_1 \wedge A_{(1)}\big) \vee \big(\eta_2 \wedge A_{(2)}\big) \vee \ldots \vee \big(\eta_n \wedge A_{(n)}\big)$, где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in L$. Значит, $(B \wedge C) \in \mathrm{Column}(A)$. $\rhd$

Заметим, что если $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей, то решетка $(\mathrm{Column}(A), \leqslant)$ обладает нулем и единицей: нулем служит матрица $0_{m\times 1}$, единицей служит матрица $F \in L^{m\times 1}$, совпадающая с наибольшим столбцом матрицы A.

Лемма 1. *Пусть $(L, \leqslant)$ — атомная решетка, $A \in L^{m\times n}$. Столбцовое пространство $\mathrm{Column}(A)$ матрицы A является атомом частично упорядоченного множества $(\mathrm{Space}_{m\times n}(L), \subseteq)$ тогда и только тогда, когда $|\mathrm{Column}(A)| = 2$.*

$\lhd$ Достаточность очевидна. Покажем необходимость. Пусть $\mathrm{Column}(A)$ — атом множества $(\mathrm{Space}_{m\times n}(L), \subseteq)$. Предположим, что $|\mathrm{Column}(A)| > 2$. Пусть F — некоторый ненулевой столбец матрицы A, и f — отличный от нуля элемент столбца F. Поскольку $(L, \leqslant)$ — атомная решетка, то существует атом $p \in L$ такой, что $p \leqslant f$.

Построим матрицу $P \in L^{m\times n}$, столбцами которой являются векторы $p \wedge F$. Очевидно, что $\mathrm{Column}(P) = \{0_{m\times 1}, p \wedge F\}$. Значит, $\mathrm{Column}(0_{m\times n}) \subset \mathrm{Column}(P) \subset \mathrm{Column}(A)$ — получили противоречие с тем, что $\mathrm{Column}(A)$ — атом частично упорядоченного множества $(\mathrm{Space}_{m\times n}(L), \subseteq)$. $\rhd$

В классе сравнимых по столбцам матриц выделим подкласс однородных по столбцам матриц.

Решеточная матрица называется *однородной по столбцам*, если два произвольных столбца ее либо совпадают, либо различны, но в последнем случае среди них есть нулевой столбец.

Лемма 2. *Пусть $(L, \leqslant)$ — атомная решетка с единицей, $A \in L^{m\times n}$, $p \in L$, p — атом. A является однородной по столбцам p-матрицей тогда и только тогда, когда* $|\mathrm{Column}(A)| = 2$.

$\lhd$ Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Если F и G — ненулевые столбцы матрицы A, то, поскольку $|\mathrm{Column}(A)| = 2$, $F = G$, и значит, A — однородная по столбцам матрица. Далее, пусть F — произвольный ненулевой столбец матрицы A, f — ненулевой элемент столбца F, и пусть $p \leqslant f$, p — атом решетки $(L, \leqslant)$. Тогда $p \wedge F \neq 0_{m\times 1}$, следовательно, $p \wedge F = F$. Значит, A является p-матрицей. $\rhd$

Из лемм 1 и 2 следует теорема 3.

Теорема 3. *Пусть $(L, \leqslant)$ — атомная решетка с единицей, $A \in L^{m\times n}$. Столбцовое пространство* $\mathrm{Column}(A)$ *матрицы A является атомом частично упорядоченного множества* $(\mathrm{Space}_{m\times n}(L), \subseteq)$ *тогда и только тогда, когда A — однородная по столбцам p-матрица, где p — атом решетки $(L, \leqslant)$.*

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка, $A \in L^{m\times n}$, A — сравнимая по столбцам матрица. Запишем столбцы матрицы A в виде некоторой цепи: $A_{(j_1)} \leqslant A_{(j_2)} \leqslant \ldots \leqslant A_{(j_n)}$. Теперь свяжем с матрицей A перестановку индексов столбцов в рассматриваемой цепи — $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Обозначим через $L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}$ множество всех сравнимых по столбцам матриц размера $m \times n$, столбцы которых, записанные в том порядке, как это определяет перестановка $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, образуют цепь; иными словами, если $B \in L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}$, то $B_{(j_1)} \leqslant B_{(j_2)} \leqslant \ldots \leqslant B_{(j_n)}$.

Теорема 4. *Частично упорядоченное множество $\left(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}, \leqslant\right)$ является подрешеткой решетки $(L^{m\times n}, \leqslant)$.*

$\lhd$ Пусть $A, B \in L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}$. Тогда $A_{(j_k)} \leqslant A_{(j_{k+1})}$ и $B_{(j_k)} \leqslant B_{(j_{k+1})}$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$, а потому

$$A_{(j_k)} \vee B_{(j_k)} \leqslant A_{(j_{k+1})} \vee B_{(j_{k+1})},$$

$$A_{(j_k)} \wedge B_{(j_k)} \leqslant A_{(j_{k+1})} \wedge B_{(j_{k+1})},$$

т. е. $A \vee B \in L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}$, $A \wedge B \in L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}$. $\rhd$

Заметим, что если решетка $(L, \leqslant)$ обладает нулем, то нулем решетки $\left(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}, \leqslant\right)$ будет являться нулевая матрица $0_{m\times n}$; если решетка $(L, \leqslant)$ обладает единицей, то единицей решетки $\left(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}, \leqslant\right)$ будет являться универсальная матрица $J_{m\times n}$.

Будем обозначать через E_{ij} $\{0, 1\}$ — матрицу из $L^{m\times n}$ с единственным ненулевым элементом 1, расположенным в i-ой строке и j-ом столбце. Очевидно, что всякая E_{ij}-матрица является сравнимой по столбцам матрицей с наибольшим столбцом $E_{(j)}$.

Теорема 5. *Пусть $(L, \leqslant)$ — конечная решетка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Атомами решетки $\left(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}, \leqslant\right)$ являются матрицы вида $p \wedge E_{ij_n}$, где $i = 1, \ldots, m$, p — атом решетки $(L, \leqslant)$. Если число атомов решетки $(L, \leqslant)$ равно k, то число атомов решетки $\left(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}, \leqslant\right)$ равно km, при этом объединение всех атомов решетки $\left(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}, \leqslant\right)$ равно матрице $g \wedge H$, где g — объединение всех атомов решетки $(L, \leqslant)$, а матрица $H \in L^{m\times n}$ такова, что $H_{(j_n)}$ — универсальный столбец, $H_{(j)}$ $(j \neq j_n)$ — нулевые столбцы.*

2. *Коатомами решетки* $\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$ *являются матрицы вида* $q\vee\overline{E_{ij_1}}$, *где* $i=1,\dots,m$, q *— коатом решетки* $(L,\leqslant)$. *Если число коатомов решетки* $(L,\leqslant)$ *равно* t, *то число коатомов решетки* $\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$ *равно* tm, *при этом пересечение всех коатомов решетки* $\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$ *равно матрице* $f\vee R$, *где* f *— пересечение всех коатомов решетки* $(L,\leqslant)$, *а матрица* $R\in L^{m\times n}$ *такова, что* $R_{(j_1)}$ *— нулевой столбец,* $R_{(j)}$ $(j\neq j_1)$ *— универсальные столбцы.*

$\lhd$ 1. Пусть A — атом решетки $\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$. Тогда существуют индексы $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$ такие, что $a_{ij}\neq 0$. Пусть $p\in L$, p — атом и $p\leqslant a_{ij}$. Тогда $p\leqslant a_{ij_n}$, а поскольку $p\wedge E_{ij_n}\in\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$, то в решетке $\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$ имеет место цепь: $0_{m\times n}<p\wedge E_{ij_n}\leqslant A$. Но так как A — атом, то $A=p\wedge E_{ij_n}$. И всякая матрица $p\wedge E_{ij_n}$, где $i=1,\dots,m$, p — произвольный атом решетки $(L,\leqslant)$, является атомом решетки $\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$.

2. Пусть A — коатом решетки $\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$. Тогда существуют индексы $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$ такие, что $a_{ij}\neq 1$. Пусть q — такой коатом решетки $(L,\leqslant)$, что $a_{ij}\leqslant q$, а значит, $a_{ij_1}\leqslant q$. Поскольку матрица $q\vee\overline{E_{ij_1}}\in\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$, то в решетке $\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$ имеет место цепь: $A\leqslant q\vee\overline{E_{ij_1}}<J_{m\times n}$. Так как A — коатом, то $A=q\vee\overline{E_{ij_1}}$.

С другой стороны, если q — произвольный коатом решетки $(L,\leqslant)$, то в решетке $\big(L^{m\times n}_{(j_1,j_2,\dots,j_n)},\leqslant\big)$ $q\vee\overline{E_{ij_1}}$ покрывает $J_{m\times n}$ для всех $i=1,\dots,m$. $\rhd$

Пусть дана решетка $\big(L^{m\times m}_{(j_1,j_2,\dots,j_m)},\leqslant\big)$ и $E_{m\times m}\in L^{m\times m}$ — единичная матрица. Перенумеруем столбцы единичной матрицы следующим образом. В качестве нового номера столбца $E_{(i)}$ $(i=1,\dots,m)$ единичной матрицы $E_{m\times m}$ возьмем номер l элемента $j_l=i$ в перестановке $(j_1,j_2,\dots,j_m)$. В результате для столбцов матрицы $E_{m\times m}$ получим новую нумерацию. Устроим такую же нумерацию и для строк матрицы $E_{m\times m}$. В следующем определении и теореме будем иметь в виду именно такую нумерацию строк и столбцов матрицы $E_{m\times m}$.

Обозначим через $E_m(t,k)$ матрицу, полученную из единичной матрицы $E_{m\times m}$ заменой столбца $E_{(k)}$ на столбец $E_{(k)}\vee E_{(t)}$.

Теорема 6. *Пусть* $(L,\leqslant)$ *— решетка с нулем и единицей. Матрица* A *принадлежит множеству* $\big(L^{m\times m}_{(j_1,j_2,\dots,j_m)},\leqslant\big)$ *тогда и только тогда, когда решениями уравнения* $AX=A$ *являются матрицы вида* $E_m(t,k)$, *где* $t<k$.

$\lhd$ *Необходимость.* Пусть $A\in\big(L^{m\times m}_{(j_1,j_2,\dots,j_m)},\leqslant\big)$. Тогда имеет место цепь:

$$A_{(j_1)}\leqslant\ldots\leqslant A_{(j_t)}\leqslant\ldots\leqslant A_{(j_k)}\leqslant\ldots\leqslant A_{(j_m)},\tag{2}$$

где $t<k$.

Перенумеруем строки и столбцы матрицы A таким же образом, как это было сделано для матрицы $E_{m\times m}$. Тогда для всех $r=1,\dots,m$ при $t<k$ имеем:

$$\begin{gathered}\Big(a_{r1}\wedge[e(t,k)]_{1k}\Big)\vee\ldots\vee\Big(a_{rt}\wedge[e(t,k)]_{tk}\Big)\vee\ldots\vee\Big(a_{rk}\wedge[e(t,k)]_{kk}\Big)\\ \vee\ldots\vee\Big(a_{rm}\wedge[e(t,k)]_{mk}\Big)=a_{rt}\vee a_{rk},\end{gathered}\tag{3}$$

а поскольку на основании (2) $A_{(j_t)}\leqslant A_{(j_k)}$ $(t<k)$ для естественной нумерации столбцов матрицы A, то при новой нумерации для всех $r=1,\dots,m$ (при $t<k$) имеем $a_{rt}\leqslant a_{rk}$, и значит, выражение (3) равно a_{rk}. Следовательно, $A\cdot E_m(t,k)=A$, где $t<k$.

Достаточность. Пусть матрицы вида $E_m(t,k)$, где $t<k$, есть решения уравнения $AX=A$. Снова будем считать, что строки и столбцы матрицы A перенумерованы так же, как у матрицы $E_{m\times m}$. Тогда для всех $r=1,\ldots,m$ $(t<k)$ выражение (3) равно a_{rk}, а потому $a_{rt}\leqslant a_{rk}$ для всех $r=1,\ldots,m$ $(t<k)$, и значит, если перейти к естественной нумерации столбцов матрицы A, то верно $A_{(j_t)}\leqslant A_{(j_k)}$, $t<k$. $\rhd$

Следствие 1. *Пусть $(L,\leqslant)$ — решетка с нулем и единицей, $A\in L^{m\times m}$, A — сравнимая по столбцам матрица. Тогда существует разложение матрицы A в произведение двух необратимых матриц.*

2.2. Пропорциональные по столбцам матрицы. Пусть $(L,\leqslant)$ — решетка. Назовем сравнимую по столбцам матрицу $A\in L^{m\times n}$ пропорциональной по столбцам, если для любых ее столбцов $A_{(i)}$, $A_{(j)}$ $(A_{(i)}\leqslant A_{(j)})$ существует $k\in L$ такое, что $A_{(i)}=k\wedge A_{(j)}$.

Теорема 7. *Пусть $(L,\leqslant)$ — решетка, $A\in L^{m\times n}$. Для того чтобы матрица A была пропорциональной по столбцам, необходимо и достаточно, чтобы существовали $k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}\in L$ такие, что для некоторой перестановки номеров $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ столбцов матрицы A имели место равенства:*

$$\begin{aligned}
&A_{(j_{n-1})}=k_1\wedge A_{(j_n)},\\
&A_{(j_{n-2})}=k_1\wedge k_2\wedge A_{(j_n)},\\
&\qquad\vdots\\
&A_{(j_2)}=k_1\wedge k_2\wedge\ldots\wedge k_{n-2}\wedge A_{(j_n)},\\
&A_{(j_1)}=k_1\wedge k_2\wedge\ldots\wedge k_{n-2}\wedge k_{n-1}\wedge A_{(j_n)}.
\end{aligned}$$

$\lhd$ *Необходимость.* Пусть A — пропорциональная по столбцам матрица, и пусть $A_{(j_1)}\leqslant A_{(j_2)}\leqslant\ldots\leqslant A_{(j_n)}$ — цепь ее столбцов. Тогда

$$\begin{aligned}
&A_{(j_{n-1})}=k_1\wedge A_{(j_n)},\\
&A_{(j_{n-2})}=k_2\wedge A_{(j_{n-1})}=k_2\wedge\left(k_1\wedge A_{(j_n)}\right),\\
&\qquad\vdots\\
&A_{(j_2)}=k_{n-2}\wedge A_{(j_3)}=k_{n-2}\wedge\left(k_{n-3}\wedge\ldots\wedge k_1\wedge A_{(j_n)}\right),\\
&A_{(j_1)}=k_{n-1}\wedge A_{(j_2)}=k_{n-1}\wedge\left(k_{n-2}\wedge\ldots\wedge k_1\wedge A_{(j_n)}\right).
\end{aligned}$$

Достаточность. Пусть $r<t$ $(r\in\{1,\ldots,n-2\},\ t\in\{2,\ldots,n-1\})$. Тогда

$$A_{(j_r)}=k_1\wedge k_2\wedge\ldots\wedge k_{n-t}\wedge k_{n-t+1}\wedge\ldots\wedge k_{n-r}\wedge A_{(j_n)},$$

$$A_{(j_t)}=k_1\wedge k_2\wedge\ldots\wedge k_{n-t}\wedge A_{(j_n)},$$

поэтому

$$A_{(j_r)}=\left(k_1\wedge k_2\wedge\ldots\wedge k_{n-t}\wedge A_{(j_n)}\right)\wedge k_{n-t+1}\wedge\ldots\wedge k_{n-r}=k_{n-t+1}\wedge\ldots\wedge k_{n-r}\wedge A_{(j_t)}.$$

Таким образом, A — пропорциональная по столбцам матрица. $\rhd$

Данная теорема дает алгоритм для построения пропорциональных по столбцам матриц размера $m\times n$ по заданному столбцу $F\in L^{m\times 1}$ и набору элементов $k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}\in L$. В качестве столбцов таких матриц берутся векторы F, $k_1\wedge F$, $k_1\wedge k_2\wedge F$, $\ldots$, $k_1\wedge k_2\wedge\ldots\wedge k_{n-1}\wedge F$.

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка. Обозначим через $L^{m\times n}_{(j_1,\dots,j_n)(l_1,\dots,l_{n-1})}$ множество всех пропорциональных по столбцам матриц $A \in L^{m\times n}$ таких, что столбцы любой такой матрицы образуют цепь: $A_{(j_1)} \leqslant A_{(j_2)} \leqslant \ldots \leqslant A_{(j_n)}$, причем $A_{(j_1)} = l_1 \wedge A_{(j_2)}$, $A_{(j_2)} = l_2 \wedge A_{(j_3)}, \ldots, A_{(j_{n-1})} = l_{n-1} \wedge A_{(j_n)}$, где $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1} \in L$.

Теорема 8. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка, $B \in L^{m\times t}$, $C \in L^{t\times n}$, C — пропорциональная по столбцам матрица. Тогда BC также является пропорциональной по столбцам матрицей, причем если $C \in L^{t\times n}_{(j_1,\dots,j_n)(l_1,\dots,l_{n-1})}$, то $BC \in L^{m\times n}_{(j_1,\dots,j_n)(l_1,\dots,l_{n-1})}$.*

$\lhd$ Пусть $A = BC$. Тогда для всех $i = 1, \ldots, m$, $q = 1, \ldots, n-1$ имеем

$$\begin{aligned} a_{ij_q} &= (b_{i1} \wedge c_{1j_q}) \vee (b_{i2} \wedge c_{2j_q}) \vee \ldots \vee (b_{it} \wedge c_{tj_q}) \\ &= (b_{i1} \wedge l_q \wedge c_{1j_{q+1}}) \vee (b_{i2} \wedge l_q \wedge c_{2j_{q+1}}) \vee \ldots \vee (b_{it} \wedge l_q \wedge c_{tj_{q+1}}) \\ &= l_q \wedge \Big((b_{i1} \wedge c_{1j_{q+1}}) \vee (b_{i2} \wedge c_{2j_{q+1}}) \vee \ldots \vee (b_{it} \wedge c_{tj_{q+1}}) \Big) = l_q \wedge a_{ij_{q+1}}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $A_{(j_q)} = l_q \wedge A_{(j_{q+1})}$ и $A \in L^{m\times n}_{(j_1,\dots,j_n)(l_1,\dots,l_{n-1})}$. $\rhd$

Следствие 2. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка, $B, C \in L^{m\times m}$, C — пропорциональная по столбцам матрица. $BC = C$ тогда и только тогда, когда наибольшие столбцы матриц C и BC совпадают.*

Теорема 9. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем, $A \in L^{m\times n}$, A — пропорциональная по столбцам матрица, F — ее наибольший столбец. Тогда* $\mathrm{Column}(A) = \mathrm{Column}(F)$.

$\lhd$ Выпишем некоторую цепь столбцов матрицы A:

$$A_{(j_1)} \leqslant A_{(j_2)} \leqslant \ldots \leqslant A_{(j_n)} = F.$$

Любой элемент Z из $\mathrm{Column}(A)$ можно представить в виде

$$Z = \big(t_1 \wedge A_{(j_1)}\big) \vee \big(t_2 \wedge A_{(j_2)}\big) \vee \ldots \vee \big(t_n \wedge A_{(j_n)}\big),$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n \in L$.

Согласно теореме 7

$$\begin{aligned} Z = \Big(t_1 \wedge \big[k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{n-1} \wedge A_{(j_n)}\big]\Big) \\ \vee \Big(t_2 \wedge \big[k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{n-2} \wedge A_{(j_n)}\big]\Big) \vee \ldots \vee \big(t_n \wedge A_{(j_n)}\big) \\ = \Big((t_1 \wedge k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{n-1}) \vee (t_2 \wedge k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{n-2}) \vee \ldots \vee t_n\Big) \wedge A_{(j_n)} \in \mathrm{Column}(F). \end{aligned}$$

Пусть теперь $Y \in \mathrm{Column}(F)$. Тогда $Y = s \wedge F$, где $s \in L$.

$$Y = s \wedge A_{(j_n)} = \big(0 \wedge A_{(j_1)}\big) \vee \big(0 \wedge A_{(j_2)}\big) \vee \ldots \vee \big(0 \wedge A_{(j_{n-1})}\big) \vee \big(s \wedge A_{(j_n)}\big) \in \mathrm{Column}(A). \ \rhd$$

В качестве следствий доказанной теоремы сформулируем несколько признаков разрешимости матричных уравнений, в которых матрица-сомножитель или матрица-произведение являются пропорциональными по столбцам матрицами.

Теорема 10. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей, $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times t}$, A — пропорциональная по столбцам матрица, F — ее наибольший столбец. Уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда для каждого столбца $B_{(k)}$ $(k = 1, \ldots, t)$ матрицы B существует $s_k \in L$ такое, что $B_{(k)} = s_k \wedge F$.*

◁ Уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\mathrm{Column}(B) \subseteq \mathrm{Column}(A)$, или на основании теоремы 9 $\mathrm{Column}(B) \subseteq \mathrm{Column}(F)$. Последнее же соотношение равносильно тому, что $B_{(k)} = s_k \wedge F$ для любого $k = 1, \ldots, t$, где $s_k \in L$. ▷

Теорема 11. *Пусть* $(L, \leqslant)$ — *дистрибутивная решетка с нулем и единицей,* $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times t}$, B — *пропорциональная по столбцам матрица,* G — *ее наибольший столбец. Уравнение* $AX = B$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $G \in \mathrm{Column}(A)$.

◁ Уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\mathrm{Column}(B) \subseteq \mathrm{Column}(A)$, или в связи с теоремой 9 $\mathrm{Column}(G) \subseteq \mathrm{Column}(A)$, последнее же соотношение равносильно тому, что $G \in \mathrm{Column}(A)$. ▷

Теорема 12. *Пусть* $(L, \leqslant)$ — *дистрибутивная решетка с нулем и единицей,* $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times t}$, A, B — *пропорциональные по столбцам матрицы,* F, G — *наибольшие столбцы матриц* A, B *соответственно. Уравнение* $AX = B$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $G = s \wedge F$, *где* $s \in L$.

◁ По теореме 11 уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда $G \in \mathrm{Column}(A)$, но $\mathrm{Column}(A) = \mathrm{Column}(F)$. Следовательно, $G = s \wedge F$, где $s \in L$. ▷

Из доказанных теорем вытекает ряд следствий.

Следствие 3. *Пусть* $(L, \leqslant)$ — *дистрибутивная решетка с нулем и единицей,* $B \in L^{m\times t}$. *Если* B — *пропорциональная по столбцам матрица, содержащая универсальный столбец, то* B *делится слева на всякую матрицу* $A \in L^{m\times n}$, *содержащую универсальный столбец* (в частности, указанная матрица B делится слева на универсальную матрицу $J_{m\times n}$).

◁ Так как наибольший столбец G матрицы B равен $J_{m\times 1}$, то $G \in \mathrm{Column}(A)$, и тогда на основании теоремы 11 уравнение $AX = B$ разрешимо. ▷

Следствие 4. *Пусть* $(L, \leqslant)$ — *дистрибутивная решетка с нулем и единицей,* $B \in L^{m\times t}$, B — *пропорциональная по столбцам матрица,* G — *ее наибольший столбец. Матрица* B *делится слева на универсальную матрицу* $J = J_{m\times n}$ *тогда и только тогда, когда существует* $k \in L$ *такое, что* $G = k \wedge J_{m\times 1}$.

◁ Уравнение $JX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда $G \in \mathrm{Column}(J)$ (на основании теоремы 11), а последнее соотношение равносильно тому, что $G = k \wedge J_{m\times 1}$ для некоторого $k \in L$. ▷

Следствие 5. *Пусть* $(L, \leqslant)$ — *дистрибутивная решетка с нулем и единицей,* $B \in L^{m\times m}$. *Если* B — *пропорциональная по столбцам матрица, содержащая универсальный столбец, то* B *делится слева на любую обратимую матрицу* $A \in L^{m\times m}$.

◁ Согласно теореме Скорнякова [1] матрица обратима над дистрибутивной решеткой тогда и только тогда, когда она ортогональна, поэтому объединение всех столбцов матрицы A есть столбец $J_{m\times 1}$, откуда $J_{m\times 1} \in \mathrm{Column}(A)$.

В то же время $J_{m\times 1}$ является наибольшим столбцом матрицы B, поэтому на основании теоремы 11 уравнение $AX = B$ разрешимо.

Легко при этом заметить (используя ортогональность матрицы A и следствие 2), что матрица B является решением уравнения $AX = B$, т. е. произведение произвольной обратимой матрицы A и пропорциональной по столбцам матрицы B, содержащей универсальный столбец, снова есть матрица B. ▷

Из теоремы 11 вытекает также

Следствие 6. *Пусть* $(L, \leqslant)$ — *дистрибутивная решетка с нулем и единицей,* $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times t}$, B — *пропорциональная по столбцам матрица,* G — *ее наибольший* *столбец. Если существует $k \in L$ такое, что $G = k \wedge A_{(j)}$ для некоторого $j \in \{1,\ldots,n\}$, то матрица B делится слева на матрицу A (в частности, если в матрице A в качестве столбца содержится наибольший столбец матрицы B, то B делится слева на A).*

Из теоремы 10 вытекает следующее утверждение.

Следствие 7. *Пусть $(L,\leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей, $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times 1}$, A — пропорциональная по столбцам матрица, $A_{(q)}$ — наибольший столбец матрицы A ($q \in \{1,\ldots,n\}$). Система линейных уравнений $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда $B = s \wedge A_{(q)}$, где $s \in L$.*

Из данного утверждения непосредственно вытекает следствие 8.

Следствие 8. *Пусть $(L,\leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей, $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times 1}$, A — пропорциональная по столбцам матрица, $A_{(q)}$ — наибольший столбец матрицы A ($q \in \{1,\ldots,n\}$). Если система линейных уравнений $AX = B$ совместна, то вектор $R = \|r_i\|_{n\times 1}$ (такой, что $r_i = 0$ для всех $i \neq q$ и $r_q = s$, где s — элемент решетки $(L,\leqslant)$, подчиняющийся условию $s \wedge A_{(q)} = B$) является решением данной системы.*

Следствие 9. *Пусть $(L,\leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей, $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times t}$, A — пропорциональная по столбцам матрица, $A_{(q)}$ — наибольший столбец матрицы A ($q \in \{1,\ldots,n\}$). Если уравнение $AX = B$ разрешимо, то матрица $R = \|r_{ik}\|_{n\times t}$ такая, что при всех $k = 1,\ldots,t$ имеем $r_{ik} = 0$ для всех $i \neq q$ и $r_{qk} = s_k$, где s_k — элемент решетки $(L,\leqslant)$, подчиняющийся условию $s_k \wedge A_{(q)} = B_{(k)}$, является решением данного уравнения.*

$\lhd$ Из разрешимости уравнения $AX = B$ следует совместность системы линейных уравнений $AX_{(k)} = B_{(k)}$ для любого $k \in \{1,\ldots,t\}$. Согласно же следствию 8, из разрешимости системы $AX_{(k)} = B_{(k)}$ вытекает, что последнему уравнению удовлетворяет вектор $R_{(k)} = \|r_{ik}\|_{n\times 1}$, причем $r_{qk} = s_k$, где s_k — элемент решетки $(L,\leqslant)$, подчиняющийся условию $s_k \wedge A_{(q)} = B_{(k)}$, и $r_{ik} = 0$ для всех $i \neq q$. $\rhd$

Понятно, что в следствии 8 (следствии 9) в качестве r_i (r_{ik}) при $i \neq q$ можно взять любой элемент, содержащийся в s (в соответствующем s_k).

Теорема 13. *Пусть $(L,\leqslant)$ — дистрибутивная решетка с нулем, $A \in L^{m\times n}$. Если A — пропорциональная по столбцам матрица, то решетка $(L,\leqslant)$ гомоморфно отображается на решетку $(\mathrm{Column}(A),\leqslant)$.*

$\lhd$ Пусть A — пропорциональная по столбцам матрица и F — ее наибольший столбец. Тогда на основании теоремы 9 $\mathrm{Column}(A) = \mathrm{Column}(F)$. Пусть $\varphi\colon s \to s \wedge F$, где $s \in L$ есть отображение решетки $(L,\leqslant)$ на решетку $(\mathrm{Column}(A),\leqslant)$.

При этом для любых $a, b \in L$:

$$\varphi(a) \wedge \varphi(b) = (a \wedge F) \wedge (b \wedge F) = (a \wedge b) \wedge F = \varphi(a \wedge b),$$
$$\varphi(a) \vee \varphi(b) = (a \wedge F) \vee (b \wedge F) = (a \vee b) \wedge F = \varphi(a \vee b). \ \rhd$$

Теорема 14. *Пусть $(L,\leqslant)$ — решетка, $A \in L^{m\times m}$. Если A — пропорциональная по столбцам матрица, то $A^2 \leqslant A$.*

$\lhd$ Пусть $A^2 = T$ и пусть имеет место цепь $A_{(j_1)} \leqslant A_{(j_2)} \leqslant \ldots \leqslant A_{(j_m)}$. Тогда для произвольного фиксированного $q \in \{1,\ldots,m-1\}$ при всех $i = 1,\ldots,m$ $a_{ij_q} = k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_{m-q} \in L$. Далее, для произвольных $i \in \{1,\ldots,m\}$,

$q \in \{1, \dots, m-1\}$ имеем:

$$\begin{gathered} t_{ij_q} = (a_{ij_1} \wedge a_{j_1 j_q}) \vee (a_{ij_2} \wedge a_{j_2 j_q}) \vee \ldots \vee (a_{ij_m} \wedge a_{j_m j_q}) \\ = \Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m}) \wedge (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_1 j_m})\Big] \\ \vee\Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge a_{ij_m}) \wedge (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_2 j_m})\Big] \\ \vee \ldots \vee \Big[a_{ij_m} \wedge (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_m j_m})\Big]. \end{gathered}$$

А поскольку каждое выражение, заключенное в квадратные скобки, содержится в $k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m}$, то и $t_{ij_q} \leqslant k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} = a_{ij_q}$. В то же время, для всех $i = 1, \dots, m$

$$\begin{gathered} t_{ij_m} = (a_{ij_1} \wedge a_{j_1 j_m}) \vee (a_{ij_2} \wedge a_{j_2 j_m}) \vee \ldots \vee (a_{ij_m} \wedge a_{j_m j_m}) \\ = \Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m}) \wedge a_{j_1 j_m}\Big] \vee \Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge a_{ij_m}) \wedge a_{j_2 j_m}\Big] \\ \vee \ldots \vee [a_{ij_m} \wedge a_{j_m j_m}] \leqslant a_{ij_m}. \end{gathered}$$

Откуда и следует, что $T \leqslant A$. $\triangleright$

Теперь, используя структурный критерий идемпотентности матриц над дистрибутивными решетками [3] и теорему 14, получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 15. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка, $A \in L^{m\times m}$. Пропорциональная по столбцам матрица A идемпотентна тогда и только тогда, когда A есть $\vee$-объединение прямоугольных и линейных частей, содержащих элементы множества* $\mathrm{join}(L(A), \leqslant)$.

Теорема 16. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка, $A \in L^{m\times m}$. Если A — пропорциональная по столбцам матрица, то A^2 — идемпотентная матрица.*

$\triangleleft$ Пусть столбцы матрицы A образуют цепь $A_{(j_1)} \leqslant A_{(j_2)} \leqslant \ldots \leqslant A_{(j_m)}$. Обозначим $A^2 = T$, $A^4 = R$. Для произвольных $i \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, m-1\}$ имеем:

$$\begin{gathered} t_{ij_q} = (a_{ij_1} \wedge a_{j_1 j_q}) \vee (a_{ij_2} \wedge a_{j_2 j_q}) \vee \ldots \vee (a_{ij_m} \wedge a_{j_m j_q}) \\ = \Big((k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m}) \wedge (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_1 j_m})\Big) \\ \vee\Big((k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge a_{ij_m}) \wedge (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_2 j_m})\Big) \\ \vee \ldots \vee \Big(a_{ij_m} \wedge (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_m j_m})\Big) \\ = (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1 j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2 j_m}) \\ \vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_m j_m}). \end{gathered}$$

И при всех $i = 1, \dots, m$

$$\begin{gathered} t_{ij_m} = (a_{ij_1} \wedge a_{j_1 j_m}) \vee (a_{ij_2} \wedge a_{j_2 j_m}) \vee \ldots \vee (a_{ij_m} \wedge a_{j_m j_m}) \\ = (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1 j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2 j_m}) \\ \vee \ldots \vee (a_{ij_m} \wedge a_{j_m j_m}). \end{gathered}$$

Теперь, для произвольных $i \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, m-1\}$

$$\begin{gathered} r_{ij_q} = (t_{ij_1} \wedge t_{j_1 j_q}) \vee (t_{ij_2} \wedge t_{j_2 j_q}) \vee \ldots \vee (t_{ij_m} \wedge t_{j_m j_q}) \\ = \Big(\Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1 j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2 j_m}) \\ \vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_m j_m})\Big] \end{gathered}$$

$$\wedge\Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{j_1j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_2j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_mj_m})\Big]\Big)$$

$$\vee\Big(\Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_mj_m})\Big]$$

$$\wedge\Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_1j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_2j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m})\Big]\Big)$$

$$\vee \ldots \vee \Big(\Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (a_{ij_m} \wedge a_{j_mj_m})\Big] \wedge \Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{j_mj_m} \wedge a_{j_1j_m})$$

$$\vee(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_mj_m} \wedge a_{j_2j_m}) \vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{j_mj_m})\Big]\Big)$$

$$= \Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_2j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_mj_m})$$

$$\vee(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_1j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_1j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_mj_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_mj_m} \wedge a_{j_1j_m})$$

$$\vee(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_mj_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_2j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_mj_m} \wedge a_{j_1j_m})\Big]$$

$$\vee\Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_2j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_2j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m}) \vee (k_1 \wedge k_2$$

$$\wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_1j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m}) \vee (k_1 \wedge k_2$$

$$\wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m})\Big]$$

$$\vee \ldots \vee \Big[(k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_mj_m}) \vee (k_1 \wedge k_2$$

$$\wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m})$$

$$\wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m}) \vee (k_1 \wedge k_2$$

$$\wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m} \wedge a_{j_mj_m}) \vee (k_1 \wedge k_2$$

$$\wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m} \wedge a_{j_mj_m}) \vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_mj_m})\Big]$$

$$= (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-1} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_1j_m}) \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-2} \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_2j_m})$$

$$\vee \ldots \vee (k_1 \wedge k_2 \wedge \ldots \wedge k_{m-q} \wedge a_{ij_m} \wedge a_{j_mj_m}) = t_{ij_q}.$$

Так же проверяется, что $r_{ij_m} = t_{ij_m}$ для всех $i = 1, \ldots, m$. $\triangleright$

Следствие 10. *Пусть $(L, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка, $A \in L^{m\times m}$, A — пропорциональная по столбцам матрица. Тогда либо* $\mathrm{index}(A) = 2$, *либо* $\mathrm{index}(A) = 3$.

$\lhd$ Из теоремы 14 следует, что имеет место цепь:

$$A \geqslant A^2 \geqslant A^3 \geqslant A^4. \tag{4}$$

Согласно теореме 16 $A^4 = A^2$, и значит, на основании (4) $A^3 = A^2$. Таким образом, для любой пропорциональной по столбцам матрицы $A \in L^{m\times m}$ имеет место соотношение:

$$A \geqslant A^2 = A^3 = A^4 = \ldots,$$

откуда либо $\mathrm{index}(A) = 2$ (и $\mathrm{period}(A) = 1$), если A — идемпотентная матрица; либо $\mathrm{index}(A) = 3$ (и $\mathrm{period}(A) = 1$), если матрица A не является идемпотентной. $\rhd$

Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка, $A \in L^{m\times n}$. Определим для матрицы A множество

$$C(A) = \Big\{\mathrm{Column}(A_{(i)}) : i = 1, \ldots, n\Big\},$$

т. е. $C(A)$ — множество линейных оболочек столбцов матрицы A.

Теорема 17. *Пусть $(L, \leqslant)$ — решетка с единицей, $A \in L^{m\times n}$. A является пропорциональной по столбцам матрицей тогда и только тогда, когда частично упорядоченное множество $(C(A), \subseteq)$ является цепью.*

$\lhd$ Соотношение $A_{(i)} = k \wedge A_{(j)}$ $(k \in L)$ равносильно тому, что $\mathrm{Column}(A_{(i)}) \subseteq \mathrm{Column}(A_{(j)})$. $\rhd$

Литература

1. *Скорняков Л. А.* Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 2.—С. 182–185.
2. *Маренич В. Е.* Простые матрицы над дистрибутивными решетками // Фундамент. прикл. мат.—2008.—Т. 14, вып. 7.—С. 157–173.
3. *Кумаров В. Г.* Решетка идемпотентных матриц над дистрибутивными решетками // Фундамент. прикл. мат.—2007.—Т. 13, вып. 4.—С. 121–144.

Статья поступила 26 апреля 2010 г.

Жуклина Анна Владимировна
ФГОУ ВПО Красноярский государственный педагогический университет,
ассистент кафедры алгебры и методики преподавания математики
РОССИЯ, 660049, г. Красноярск, ул. Перенсона, 7
E-mail: a_zhuklina@mail.ru

MATRICES COMPARABLE BY COLUMNS AND PROPORTIONAL BY COLUMNS OVER LATTICES

Zhuklina A. V.

Matrices over a lattice $(L, \leqslant)$ comparable by columns are studied. (A matrix is comparable by columns iff its columns form a linearly ordered set with the partial order induced from L.) Some properties of the matrices are obtained. Solvability of matrix equations in this class of matrices is studied.
The set of matrices proportional by columns is the subset of the set of matrices comparable by columns. Some properties as well as solvability of matrix equations are also studied for suth matrices.

Key words: matrices over lattices, lattices.