Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 2, С. 39–44

УДК **513.881**

О БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ n-ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЯДЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ КЁТЕ

В. П. Кондаков

В работе строится базис в пространстве непрерывных n-однородных полиномов, отображающих ядерное пространство Кёте — Фреше в себя. Пространства полиномов рассматриваются с топологиями равномерной сходимости на ограниченных множествах пространств Кёте. Обсуждаются и близкие вопросы.

Ключевые слова: голоморфное отображение, n-однородный полином, базис.

Цель настоящей статьи — построение базисов в пространствах непрерывных n-однородных полиномов и голоморфных функций, отображающих ядерные пространства Кёте — Фреше в себя, с топологиями равномерной сходимости на всех ограниченных (предкомпактных) множествах.

Частный случай при $n = 1$ (базис в пространстве непрерывных линейных операторов) изложен, например, в [1]. Базис, аналогичный классическому степенному базису, в пространстве голоморфных $\mathbb{C}$-значных функций на пространствах из некоторого класса ядерных пространств рассмотрен в [2] (см. также [3]).

1. Предварительные сведения

Напомним необходимые общие определения и факты, которые более подробно изложены в [3, 4].

Пусть E, F — линейные пространства над полем комплексных чисел. Пространство n-линейных отображений из E в F будем обозначать $\mathscr{L}({}^nE, F)$, $n \in \mathbb{N}$. Если $L \in \mathscr{L}({}^nE, F)$, то L определено на E^n (декартовом произведении n-экземпляров пространства E) со значениями в F и оно линейно по каждому переменному при фиксированных остальных.

Определение 1. n-линейное отображение L из E в F называют *симметричным*, если $L(x_1, \ldots, x_n) = L\big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(1)}\big)$ для любого набора элементов $x_1, \ldots, x_n \in E$ и любой перестановки σ первых n натуральных чисел.

Пусть Δ обозначает диагональное отображение из E в E^n, которое действует по правилу

$$\Delta(x) = (x, \ldots, x) \in E^n \quad (\forall\, x \in E).$$

Определение 2. Композицию диагонального отображения $\Delta : E \to E^n$ и n-линейного отображения L_n, определенного на E, со значениями в F называют *n-однородным* *полиномом*, отображающим локально выпуклое пространство E в локально выпуклое пространство F. Пространство всех n-однородных полиномов из E в F обозначают $\mathscr{P}(^nE, F)$.

Таким образом, если $P \in \mathscr{P}(^nE, F)$, то $P = L_n \circ \Delta$, где L_n — n-линейное отображение.

Описанное представление P не является единственным. Оно становится единственным, если потребовать симметричность n-линейной формы L_n (подробнее см., например, [3]). В последнем случае L_n называют *полярной формой*, определяемой n-однородным полиномом P. Значения полярной формы L_n определяются значениями P по поляризационной формуле

$$L_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n P\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right).$$

Пусть E — локально выпуклое, а F — счетнонормированное пространства. Везде ниже в пространстве непрерывных отображений f из E в F рассматривается топология равномерной сходимости на всех ограниченных множествах из E. Эта топология задается системой непрерывных полунорм, каждая из которых определяется ограниченным множеством $A \subset E$ и индексом $r \in \mathbb{N}$ счетного набора полунорм $(\| \cdot \|)_{r \in \mathbb{N}}$ (задающего топологию F) следующим образом:

$$\|f\|_{A,r} = \sup_{x \in A} \|f(x)\|_r.$$

Каждой такой полунорме соответствует полунорма в пространстве n-линейных отображений, действующих из E^n в F, вида

$$\|L\|_{A^n,r} = \sup_{(x_1,\dots,x_n) \in A^n} = \|L(x_1, \dots, x_n)\|_r, \text{ где } A^n = A \times A \times \dots \times A \subset E^n.$$

Приведем определение пространств Кёте — Фреше, на которых будут рассматриваться ниже n-однородные полиномы и голоморфные функции.

Пусть $[a_r(n)]_{r,n \in \mathbb{N}}$ — матрица неотрицательных чисел со свойством монотонности по строкам, определяемым индексом $r \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant a_r(n) \leqslant a_{r+1}(n) \leqslant \dots \quad (\forall\, r, n \in \mathbb{N})$$

— матрица Кёте.

Пространством Кёте — Фреше называют пространство последовательностей комплексных чисел

$$l_p[a_r(n)] = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p a_r^p(n) \right)^{\frac{1}{p}} \doteq \|\xi\|_r < +\infty \ \ \forall\, r \right\} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

с топологией, задаваемой системой полунорм $(\| \cdot \|_r)_{n=1}^{\infty}$. Каждый элемент пространства Кёте — Фреше имеет единственное представление по базису ортов (e_n):

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} e_n'(\xi) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \quad \big(\|e_n\|_r = a_r(n)\big)$$

в виде сходящегося ряда, где $e_n'(\cdot)$ — координатные функционалы, составляющие базис сильного сопряженного E_β' к $E = l_p[a_r(n)]$.

Известное условие ядерности пространства Кёте — Фреше состоит в том, что

$$(\forall\, r)\ \ (\exists\, s(r)) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|e_n\|_r}{\|e_n\|_{s(r)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} < +\infty.$$

Сильное сопряженное E'_β к ядерному пространству Кёте — Фреше также ядерно (см., например, [5]), и ниже будет использовано соответствующее условие его ядерности в терминах полунорм базиса $(e'_n(\cdot))_{n=1}^{\infty}$. Нам потребуется также определение голоморфного отображения (см., например, [6]).

Пусть $\mathscr{P}(^nE,F)$ при любом n наделены топологией равномерной сходимости на всех ограниченных множествах из E.

Определение 3. Отображение $f : E \to F$ называется *голоморфным*, если существует последовательность $P_n \in \mathscr{P}(^nE,F)$ такая, что ряды $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ сходятся к $f(x)$ для каждого $x \in X$.

Будем рассматривать пространство голоморфных отображений из E в F, которые еще и ограничены на каждом ограниченном подмножестве из E. Это пространство обозначим $\mathscr{H}_b(E,F)$ и будем говорить, что элементы этого пространства есть голоморфные отображения ограниченного типа.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $E = l_2[a_r(n)]$ — ядерное пространство Кёте — Фреше. Пространство непрерывных n-однородных полиномов $P(^nE,E)$ с топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах в E является ядерным пространством с абсолютным базисом*

$$\bigl\{T_{ij}(\cdot) = e'_{i_1}(\cdot)\, e'_{i_2}(\cdot)\ \ldots\ e'_{i_n}(\cdot)\, e_j,\ j \in \mathbb{N},\ i_k \in \mathbb{N},\ k = 1,2,\ldots,n\bigr\}.$$

$\triangleleft$ Любой оператор — n-однородный полином $P \in P(^nE,E)$ допускает формальное разложение по системе $\{T_{ij}\}$

$$\begin{aligned} Pe = L_n(e,e,\ldots,e) &= L_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} e'_i(e)\, e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} e'_i(e)\, e_i\right) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} e'_{i_1}(e)\ \ldots\ e'_{i_n}(e)\, L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} e'_j\bigl(L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})\bigr)\, e'_{i_1}(e) \cdot \ldots \cdot e'_{i_n}(e)\, e_j, \end{aligned}$$

где L_n — симметрическая n-линейная форма, соответствующая n-однородному полиному P.

Многомерную бесконечную матрицу $(e'_j(L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})))$ можно рассматривать как обобщение матрицы конечномерного оператора.

Пусть теперь A — ограниченное множество в E, а r — натуральный индекс окрестности нуля V_r счетнонормированного пространства $(F, (V_k)_{k=1}^{\infty})$. Если A пробегает совокупность всех ограниченных множеств в E и, независимо, r — натуральный ряд, то система полунорм

$$\left\{ \|P\|_{A,r} = \sup_{e \in A} \|Pe\|_r \right\}$$

задает топологию равномерной сходимости на всех ограниченных множествах из E в $P(^nE,E)$.

Из поляризационной формулы следует простая известная оценка

$$\|L_n\|_{A^n,r} \leqslant \frac{n^n}{n!}\,\|P\|_{A,r}$$

для любого непрерывного n-однородного полинома P и определяемой им полярной формы L_n (подробнее см., например, [3, теорема 1.7]).

С использованием формулы Стирлинга из последней оценки непосредственно выводится необходимая нам оценка следующей леммы.

Лемма. *Пусть $P = L_n \circ \Delta$ — непрерывный n-однородный полином, отображающий локально выпуклое пространство E в счетнонормированное пространство F с системой полунорм $(\|\cdot\|_r)_{r\in\mathbb{N}}$. Тогда для любого ограниченного множества $A \subset E$ и натурального r с некоторой константой c (не зависящей от P, n, A, r) справедлива оценка*

$$\|L_n\|_{A^n,r} \leqslant ce^n\|P\|_{A,r}.$$

В пространстве Кёте — Фреше базис замкнутых абсолютно выпуклых ограниченных множеств (насыщенное семейство) можно выбирать состоящим из p-эллипсоидов, оси которых имеют направления элементов базиса ортов (см., например, [1]). В этом случае полунормы элементов e'_n в E'_β вычисляются аналогично вычислению норм координатных функционалов базиса ортов в банаховых пространствах l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, которые также причисляются к пространствам Кёте (случай $a_r(n) \equiv 1$). А именно, если C — ограниченное множество (p-эллипсоид), то

$$\|e'_k\|_{C^\circ} = \sup_{e\in C}|e'_k(e)| = \|e_k\|_C^{-1}, \text{ где } \|e_k\|_C = \inf\{\lambda > 0 :\ e_k \in \lambda C\}.$$

Тогда, обозначив символом $\mathscr{A}$ — базис ограниченных множеств, состоящий из p-эллипсоидов, будем иметь условие ядерности сильного сопряженного E'_β

$$(\forall\, A \in \mathscr{A})\ (\exists\, B \in \mathscr{A}) \quad \sum k = 1^\infty \frac{\|e'_k\|'_{A^\circ}}{\|e_k\|'_{B^\circ}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|e_k\|_B}{\|e_k\|_A} < +\infty.$$

Заметим, что в [1] показана возможность выбора системы ограниченных p-эллипсоидов, при котором $\|e_k\|_A = \|e_k\|_{r(k)}$ при некоторой (зависящей от A) последовательности $r(k) \to \infty$. Тогда последнее условие ядерности E'_β выводится непосредственно из условия ядерности пространства Кёте — Фреше E.

Рассмотрим на $P({}^nE, E)$ новую систему полунорм

$$\left\{ |||P|||_{A,r} = \sum_{\substack{j,i_k=1,\\ k\leqslant n}}^{\infty} \left|e'_j(L_n(e_{i_1},\dots,e_{i_n}))\right| \left\|e'_{i_1}(\cdot)\,\dots\,e'_{i_n}(\cdot)\,e_j\right\|_{A,r},\ A \in \mathscr{A},\ r \in \mathbb{N} \right\},$$

задающую топологию, которая в силу неравенства треугольника не слабее исходной (в $(P({}^nE, E), \{\|\cdot\|_{A,r}\})$).

Покажем, что новая система полунорм эквивалентна исходной.

С использованием условий ядерности, непрерывности P (а значит и L_n) и леммы имеем

$$\|P\|_{A,r} \leqslant |||P|||_{A,r} \leqslant \sum_{\substack{j,i_k=1,\\ k\leqslant n}}^{\infty} \|e'_j\|'_{s(r)} \|L_n(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})\| \, \|T_{ij}\|_{A,r}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{j,i_k=1,\\ k\leqslant n}}^{\infty} \frac{1}{\|e_j\|_{s(r)}} \|L_n\|_{s_1(r)} \prod_{k=1}^{n} \|e_{i_k}\|_B \prod_{k=1}^{n} \|e'_{i_k}\|'_{A^\circ} \|e_j\|_r$$

$$\leqslant \|L_n\|_{B,s_1(r)} \sum_{\substack{j,i_k=1,\\ k\leqslant n}}^{\infty} \frac{\|e_j\|_r}{\|e_j\|_{s(r)}} \prod_{k=1}^{n} \frac{\|e_{i_k}\|_B}{\|e_{i_k}\|_A} \leqslant C\|P\|_{B,s_1(r)}. \ \triangleright$$

Теорема 2. *В пространстве непрерывных голоморфных отображений $T : E \to E$, где E — ядерное пространство Кёте — Фреше, наделенном топологией равномерной сходимости на всех ограниченных множествах из E, система одномерных операторов*

$$\left\{ T_{ij}(\cdot) = \prod_{k=1}^{n} e'_{i_k}(\cdot)\, e_j, \quad j \in \mathbb{N},\ i_k \in \mathbb{N},\ k \leqslant n,\ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

образует абсолютный равностепенно непрерывный базис.

Доказательство может быть проведено с использованием утверждения теоремы 1 и исследованного многими авторами характера разложения голоморфной функции в ряд по n-однородным полиномам (аналог разложения в ряд Тэйлора), но есть и другой путь установить абсолютность и равностепенную непрерывность системы (T_{ij}), который представляется более прямым и дословно повторяет оценки работы [2]. Для этого необходимо перегруппировать формальное разложение функции f и получить аналог степенного ряда

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} a_m x^m,$$

где $a_m \in E$, $x^m = (e'_{i_1}(x))^{m_1} \cdot \ldots \cdot e'_{i_k}(x))^{m_k}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — множество наборов натуральных чисел $m = (m_1, \ldots m_k, \ldots)$, $m_j = 0$ для всех $j > j(m)$.

Решающим моментом является то, что в качестве ограниченных множеств A и B можно брать упомянутые выше соосные эллипсоиды, ряд из отношений полуосей которых сходится (точнее, для эллипсоида A найдется ограниченный эллипсоид B с большими полуосями). Отличие от рассмотренного в [2] случая a_m, модули которых оцениваются с использованием формулы Коши, в конце концов разлагаются по базису (e_j) и это завершает доказательство.

Следствие. *В пространстве голоморфных отображений, описанном в теореме* 2, *подпространство непрерывных n-однородных полиномов является дополняемым при любом n.*

Анализ приведенных и упомянутых оценок из работ [2, 3, 6–10], вероятно, позволит обобщить и частично распространить полученные в теоремах 1–2 утверждения на случай пространств голоморфных отображений из E в F, где E и F — пространства из более широких классов, например, класса совершенно ядерных пространств с базисом Шаудера (см. определение в [2, 3]).

Заметим, что необходимость условия ядерности пространств для абсолютности рассматриваемых базисов следует из результата работы [11].

Литература

1. *Кондаков В. П.* Три основных принципа линейного функционального анализа, их обобщения и приложения.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2007.—208 с.
2. *Boland P. J., Dineen S.* Holomorphic functions on fully nuclear spaces // Bull. Soc. Math. France.—1978.—Vol. 106.—P. 311–336.
3. *Dineen S.* Complex analysis in locally convex spaces // Math. Stud.—North-Holland, 1981.—Vol. 57.
4. *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semi-Groups // Amer. Math. Soc. Colloq. Pub.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 1957.—Vol. 31.—P. 796.
5. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1967.—266 с.
6. *Ryan R. A.* Holomorphic mappings on l_1 // Trans. Amer. Math. Soc.—1987.—Vol. 302.—P. 797–811.
7. *Dineen S.* Analytic functionals on fully nuclear spaces // Stud. Math.—1982.—Vol. 73.—P. 11–32.
8. *Хренников А. Ю., Петерсон Х.* Теорема Пэли — Винера для обобщенных целых функций на бесконечномерных пространствах // Изв. РАН. Сер. мат.—2001.—Т. 65, вып. 2.—С. 201–224.
9. *Кондаков В. П.* О представлении в виде пространств Кёте пространств голоморфных функций // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 4.—С. 22–29.
10. *Кондаков В. П.* О дифференцируемости отображений и строении пространств голоморфных функций на пространствах числовых последовательностей // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 2.—С. 9–21.
11. *Dineen S., Timoney R. M.* Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr // Stud. Math.—1989.—Vol. 94.—P. 227–234.

Статья поступила 5 июля 2011 г.

Кондаков Владимир Петрович
Южный федеральный университет,
заведующий каф. теории функций
и функционального анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
заведующий лабораторией вещественного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: kond@math.rsu.ru

ON BASES IN SPACES OF CONTINUOUS n-HOMOGENEOUS POLYNOMIALS IN NUCLEAR KÖTHE SPACES

Kondakov V. P.

A basis in the space of continuous n-homogeneous polynomials mappings a nuclear Köthe — Frechet space into itself is constructed. The space of polynomials is considered with the compact open topology. Some related problems are also discussed.

Key words: holomorphie mapping, n-homogeneous polynomial, basis.