Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 4, С. 18–27

УДК **517.9**

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

В. А. Варзиев, С. Н. Мелихов

В работе доказан критерий того, что оператор представления рядами экспонент аналитических в выпуклой ограниченной области G функций полиномиального роста вблизи границы G имеет линейный непрерывный правый обратный. Показателями рассматриваемых рядов экспонент являются нули специальной целой функции.

Ключевые слова: ряды экспонент, аналитические функции полиномиального роста, оператор представления, линейный непрерывный правый обратный.

В настоящей работе идет речь о линейной непрерывной зависимости коэффициентов разложений в ряды экспонент функций f, аналитических в ограниченной выпуклой (плоской) области G и полиномиального роста вблизи ее границы, от f. Показателями рассматриваемых рядов экспонент являются нули специальной целой функции, рост которой определяется опорными функциями области G и некоторого выпуклого компакта K. В терминах теории операторов решаемая задача является проблемой существования линейного непрерывного правого обратного (коротко: правого обратного) к соответствующему оператору представления рядами экспонент. Для функций, аналитических в выпуклой ограниченной области $\mathbb{C}$ (без ограничений на их рост) эта «проблема коэффициентов» решена в статьях [2, 7]. В статье [9] эта задача решена для функций, аналитических в некоторой окрестности ограниченного выпуклого множества с непустой внутренностью, обладающего счетным базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей, а в [19] — для функций, аналитических в окрестности ограниченного выпуклого локального замкнутого множества. В упомянутых выше работах [2, 7, 9, 19] критерии существования правого обратного к оператору представления получены в терминах комформных отображений, и существование правого обратного к оператору представления существенно зависит от геометрических свойств границ соответствующих множеств. Постановка решаемой здесь задачи аналогична той, которая дана в [2, 7, 9, 19]. Для выпуклого компакта K в $\mathbb{C}$ мы фиксируем минимальную (в смысле работы [14]) абсолютно представляющую систему (АПС) экспонент в пространстве $A^{-\infty}(G+K)$ функций, аналитических в $G+K$ и полиномиального роста вблизи границы $G+K$, и выясняем, как эта «добавка» влияет на существование правого обратного к оператору представления функций из $A^{-\infty}(G)$. Показано (теорема 3), что оператор представления имеет правый обратный тогда и только тогда, когда компакт K отличен от точки. Таким образом, для минимальной АПС экспонент в $A^{-\infty}(G)$, т. е. когда K — точка, оператор представления не имеет правого обратного, а любая «экспоненциальная добавка» к ней (с помощью отличного от точки выпуклого компакта K) приводит к его существованию.

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, $d_G(z) := \inf_{t\in\mathbb{C}\setminus G}|z-t|,\ z \in G$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем банахово пространство

$$A^{-n}(G) := \Big\{ f \in A(G) \ : \ \|f\|_n := \sup_{z\in G} |f(z)|(d_G(z))^n < \infty \Big\}$$

и положим $A^{-\infty}(G) := \mathrm{ind_{n\to}A^{-n}(G)}$. Для ограниченного множества $M \subset \mathbb{C}$ через H_M обозначим опорную функцию M:

$$H_M(z) := \sup_{t\in M} \mathrm{Re}(zt), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть

$$A_G^{-\infty} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) \ : \ p_n(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{(1+|z|)^n|f(z)|}{\exp H_G(z)} < \infty \ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \right\}.$$

Естественная топология, в которой $A_G^{-\infty}$ является пространством Фреше, задается системой преднорм p_n, $n \in \mathbb{N}$.

Положим $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Для локально выпуклого пространства E символ E' обозначает топологическое сопряженное к E. Согласно [18, теорема 4] преобразование Лапласа $\mathscr{F}(\varphi)(\lambda) := \widehat{\varphi}(\lambda) := \varphi(e_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in A^{-\infty}(G)'$, является линейным топологическим изоморфизмом сильного сопряженного $A^{-\infty}(G)'_\beta$ к пространству $A^{-\infty}(G)$ на $A_G^{-\infty}$.

Пусть M — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Для последовательности $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство числовых последовательностей

$$\Lambda^{-n}(M) := \left\{ c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \ : \ |c|_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|c_j| \exp H_M(\lambda_j)}{(1+|\lambda_j|)^n} < \infty \right\},$$

и положим $\Lambda^{-\infty}(M) := \mathrm{ind_{n\to}\Lambda^{-n}(M)}$.

Поскольку $A^{-\infty}(M)$ — (DFS)-пространство [18, замечание 1], то согласно [11] $A^{-\infty}(M)$ является регулярным индуктивным пределом. По [5, теорема 5] ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ сходится абсолютно в $A^{-\infty}(M)$ тогда и только тогда, когда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ абсолютно сходится в $A^{-n}(M)$. Согласно [18, лемма 2] для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $C < \infty$, для которого

$$\frac{\exp H_M(\lambda)}{C(1+|\lambda|)^n} \leqslant \|e_\lambda\|_n \leqslant C \frac{\exp H_M(\lambda)}{(1+|\lambda|)^n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поэтому $\Lambda^{-\infty}(M)$ является пространством всех тех и только тех последовательностей $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$, для которых ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ абсолютно сходится в $A^{-\infty}(M)$. *Оператор представления* $\Pi(c) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$ линейно и непрерывно отображает $\Lambda^{-\infty}(M)$ в $A^{-\infty}(M)$.

Система $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$ называется *абсолютно представляющей системой* (АПС) в $A^{-\infty}(M)$, если оператор представления $\Pi : \Lambda^{-\infty}(M) \to A^{-\infty}(M)$ сюръективен, т. е. если каждая функция $f \in A^{-\infty}(M)$ [1] может быть разложена в ряд экспонент $f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$, который абсолютно сходится (к f) в $A^{-\infty}(M)$.

Для ограниченного выпуклого множества $M \subset \mathbb{C}$ положим

$$A_M^{\infty} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) \ : \ (\exists\, n \in \mathbb{N}) \ |\widetilde{f}|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^n \exp H_M(z)} < \infty \right\}.$$

В A_M^{∞} вводится естественная топология (LB)-пространства.

Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, μ — аналитический функционал на $\mathbb{C}$ (т. е. $\mu \in A(\mathbb{C})'$) такой, что $\hat{\mu} \in A_K^{\infty}$. Оператор свертки T_μ определяется следующим образом [13]:

$$T_\mu(f)(z) := \mu_t(f(t+z)), \quad z \in G, \quad f \in A^{-\infty}(G+K).$$

Оператор T_μ линейно и непрерывно отображает $A^{-\infty}(G+K)$ в $A^{-\infty}(G)$ [13]. Кроме того, $T_\mu(e_\lambda) = \hat{\mu}(\lambda)e_\lambda$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Из [1, теорема 3.1], с учетом того, что по [13] существует сюръективный оператор свертки $T_\mu : A^{-\infty}(G+K) \to A^{-\infty}(G)$, вытекает

Лемма 1. *Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Если $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$ — АПС в $A^{-\infty}(G+K)$, то $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$ — АПС и в $A^{-\infty}(G)$.*

Всюду далее K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, а функция $L \in A_{G+K}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям, введенным в [14]:

(L1) Существуют $p_0 \in \mathbb{N}$ и последовательность $R_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $R_k \uparrow +\infty$, такие, что

$$\log|L(\lambda)| \geqslant H_G(\lambda) + H_K(\lambda) - p_0\log(1+|\lambda|), \quad |\lambda| = R_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(L2) $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность всех (попарно различных) нулей L, каждый нуль λ_j простой и

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\log|L'(\lambda_k)| - H_G(\lambda_j) - H_K(\lambda_j)}{\log(1+|\lambda_j|)} > -\infty.$$

Замечание 1. (а) Согласно [14, теорема 1.2] $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$ — АПС в $A^{-\infty}(G+K)$.

(б) Пусть $A^{\infty}(\overline{G+K})$ — пространство Фреше всех аналитических в $G+K$ функций, бесконечно дифференцируемых на $\overline{G+K}$ ($\overline{G+K}$ — замыкание $G+K$ в $\mathbb{C}$). Согласно [10] (см. также [20, замечание 3.10]) $\mathscr{F}$ — линейный топологический изоморфизм сильного сопряженного $A^{\infty}(\overline{G+K})'_\beta$ к $A^{\infty}(\overline{G+K})$ на A_{G+K}^{∞}. Пусть функционалы $\varphi_j \in A^{\infty}(\overline{G+K})'$ таковы, что $\hat{\varphi}_j(z) = \frac{L(z)}{L'(\lambda_j)(z-\lambda_j)}$, $j \in \mathbb{N}$. Согласно [6] каждая функция $f \in A^{\infty}(\overline{G+K})$ разлагается в ряд экспонент

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(f)e_{\lambda_j},$$

абсолютно сходящийся в $A^{-\infty}(G+K)$. Отсюда и из [18, теорема 5] следует, что $(e_{\lambda_j})_{j\in\mathbb{N}}$ — АПС в $A^{-\infty}(G+K)$, а значит, по лемме 1 и в $A^{-\infty}(G)$.

Определим пространство последовательностей

$$K_G^{-\infty} := \left\{ c = (c)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C} \ : \ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \ q_n(c) := \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|c_j|(1+|\lambda_j|)^n}{\exp H_G(\lambda_j)} < \infty \right\}$$

и снабдим его естественной топологией пространства Фреше. Согласно [15, теорема 4.7] $\Lambda^{-\infty}(G)$ и $K_G^{-\infty}$ — монтелевские, а значит, и рефлексивные локально выпуклые пространства. В силу [15, следствие 2.8] сильное сопряженное к $\Lambda^{-\infty}(G)$ пространство посредством отображения $\psi \mapsto (\psi(e_{(j)}))_{j\in\mathbb{N}}$, где $e_{(j)} := (\delta_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$, а δ_{jk} — символ Кронекера, можно отождествить с $K_G^{-\infty}$. При таком отождествлении двойственность между $\Lambda^{-\infty}(G)$ и $K_G^{-\infty}$ задается билинейной формой $\langle c, d\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} c_j d_j$, $c \in \Lambda^{-\infty}(G)$, $d \in K_G^{-\infty}$. Если сопряженное к $\Lambda^{-\infty}(G)$ отождествить таким образом с $K_G^{-\infty}$, а сопряженное к $A^{-\infty}(G)$ (посредством преобразования Лапласа) — с $A_G^{-\infty}$, то оператор $R(f) := (f(\lambda_j))_{j\in\mathbb{N}}$, $f \in A_G^{-\infty}$, является сопряженным к оператору представления Π и линейно и непрерывно отображает пространство $A_G^{-\infty}$ в $K_G^{-\infty}$.

Замечание 2. Поскольку $\Lambda^{-\infty}(G)$ и $A^{-\infty}(G)$ — (DFS)-пространства, то оператор $\Pi : \Lambda^{-\infty}(G) \to A^{-\infty}(G)$ имеет линейный непрерывный правый обратный тогда и только тогда, когда оператор $R : A_G^{-\infty} \to K_G^{-\infty}$ имеет линейный непрерывный левый обратный.

Следующая лемма доказывается стандартным образом (см., например, [3, Гл. IV, §4], [4, Гл. IV, §6], [8, лемма 1.4]).

Лемма 2. *Для любой функции $f \in A_{G+K}^{-\infty}$ справедливо разложение*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{L(z)}{L'(\lambda_j)(z-\lambda_j)} f(\lambda_j), \quad z \in \mathbb{C},$$

где ряд равномерно сходится на компактах в $\mathbb{C}$.

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *Оператор $\Pi : \Lambda^{-\infty}(G) \to A^{-\infty}(G)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.*

(ii) *Существует функция $Q \in A(\mathbb{C}^2)$ такая, что $Q(z,z) = L(z)$, $z \in \mathbb{C}$, и для любого n существуют m и $C > 0$ такие, что*

$$|Q(z,\mu)| \leqslant C \exp\big(H_G(z) + H_K(\mu) - n\log(1+|z|) + m\log(1+|\mu|)\big), \quad z,\, \mu \in \mathbb{C}.$$

$\lhd$ Мы воспользуемся методом, примененным в [8] при доказательстве теоремы 1.8. В [8] он использован в случае, когда оператор R определен на индуктивном пределе последовательности весовых банаховых пространств целых функций.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Стандартным образом, применяя принцип максимума модуля к целым функциям $Q_j(z) := \frac{Q(z,\lambda_j)}{(z-\lambda_j)L'(\lambda_j)}$ и учитывая оценки сверху для $|Q|$ в (ii) и оценки снизу (L2) для $|L'(\lambda_j)|$, существуют s, $C_2 > 0$, для которых для любого n найдутся m и $C_1 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} |Q_j(z)| &\leqslant \frac{C_1 \exp(H_G(z) + H_K(\lambda_j) - n\log(1+|z|) + m\log(1+|\lambda_j|))}{C_2 \exp(H_G(\lambda_j) + H_K(\lambda_j) - s\log(1+|\lambda_j|))} \\ &= \frac{C_1(1+|\lambda_j|)^{m+s} \exp H_G(z)}{C_2(1+|z|)^n \exp H_G(\lambda_j)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

Из неравенства (1) следует, что $Q_j \in A_G^{-\infty}$, $j \in \mathbb{N}$.

Покажем, что для любого $c \in K_G^{-\infty}$ ряд $\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j Q_j$ абсолютно сходится в $A_G^{-\infty}$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и выберем s, m, C_1, C_2, как в (1). Тогда

$$p_n(Q_j) = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{(1+|z|)^n |Q_j(z)|}{\exp H_G(z)} \leqslant \frac{C_1}{C_2} \exp\big((m+s)\log(1+|\lambda_j|) - H_G(\lambda_j)\big).$$

Поэтому для любого $c \in K_G^{-\infty}$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j| p_n(Q_j) \leqslant \frac{C_1}{C_2} \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j| \exp\big((m+s)\log(1+|\lambda_j|) - H_G(\lambda_j)\big)$$

$$\leqslant \frac{C_1}{C_2} \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j| \exp\big((m+s+2)\log(1+|\lambda_j|) - 2\log(1+|\lambda_j|) - H_G(\lambda_j)\big) \leqslant \frac{C_1 C_3}{C_2} q_{m+s+2}(c),$$

где $C_3 := \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{(1+|\lambda_j|)^2} < \infty$.

Таким образом, ряд $\sum_{j\in\mathbb{N}} c_jQ_j$ сходится в $A_G^{-\infty}$ для любой последовательности $c\in K_G^{-\infty}$, и линейный оператор $\kappa(c):=\sum_{j\in\mathbb{N}} c_jQ_j$ непрерывно отображает $K_G^{-\infty}$ в $A_G^{-\infty}$.

Покажем, что κ — левый обратный к R. Отметим, что $Q(z,\cdot)f\in A_{G+K}^{-\infty}$ для всякой функции $f\in A_G^{-\infty}$ и произвольного $z\in\mathbb{C}$. Поэтому по лемме 2 для любых $f\in A_G^{-\infty}$, $z\in\mathbb{C}$

$$L(z)\kappa(R(f))(z)=L(z)\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{Q(z,\lambda_j)}{(z-\lambda_j)L'(\lambda_j)}f(\lambda_j)$$

$$=\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{L(z)}{(z-\lambda_j)L'(\lambda_j)}Q(z,\lambda_j)f(\lambda_j)=Q(z,z)f(z)=L(z)f(z)$$

Отсюда следует, что $\kappa(R(f))=f$, $f\in A_G^{-\infty}$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): По замечанию 2 существует линейный непрерывный левый обратный κ к оператору R. Положим $f_j:=\kappa(e_{(j)})$, где $e_{(j)}:=(\delta_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$, $j\in\mathbb{N}$. Поскольку оператор $\kappa: K_G^{-\infty}\to A_G^{-\infty}$ непрерывен, для любого $n\in\mathbb{N}$ существуют $k\in\mathbb{N}$, $B<\infty$ такие, что $p_n(\kappa(c))\leqslant Bq_k(c)$, $c\in K_G^{-\infty}$. При $c:=e_{(j)}$ получим

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{(1+|z|)^n|f_j(z)|}{\exp H_G(z)}\leqslant B\frac{(1+|\lambda_j|)^k}{\exp H_G(\lambda_j)},\quad j\in\mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$|f_j(z)|\leqslant B\frac{(1+|\lambda_j|)^k}{(1+|z|)^n}\exp(H_G(z)-H_G(\lambda_j)),\quad z\in\mathbb{C},\quad j\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Так как для всякой последовательности $c\in K_G^{-\infty}$ ряд $\sum_{j\in\mathbb{N}} c_je_{(j)}$ сходится абсолютно в $K_G^{-\infty}$ (к c), то для любой функции $f\in A_G^{-\infty}$

$$f=\kappa(R(f))=\kappa\Bigg(\sum_{j\in\mathbb{N}}f(\lambda_j)e_{(j)}\Bigg)=\sum_{j\in\mathbb{N}}f(\lambda_j)\kappa(e_{(j)})=\sum_{j\in\mathbb{N}}f(\lambda_j)f_j, \tag{3}$$

причем последний ряд сходится абсолютно в $A_G^{-\infty}$.

Зафиксируем $z\in\mathbb{C}$ и положим

$$T_z(f)(\mu):=\sum_{j\in\mathbb{N}}L_j(\mu)f_j(z)(z-\lambda_j)f(\lambda_j),\quad f\in A_G^{-\infty},\quad \mu\in\mathbb{C},$$

где $L_j(\mu):=\frac{L(\mu)}{\mu-\lambda_j}$. В силу того, что ряд, стоящий в правой части последнего равенства, равномерно сходится на компактах в $\mathbb{C}$ (по μ), оператор T_z линейно и (по теореме Банаха — Штейнгауза) непрерывно отображает $A_G^{-\infty}$ в $A(\mathbb{C})$. Пусть M — оператор умножения на независимую переменную: $M(f)(t):=tf(t)$, $t\in\mathbb{C}$, $f\in A_G^{-\infty}$. Покажем, что $M\circ T_z=T_z\circ M$. Учитывая равенство (3), получим

$$\mu T_z(f)(\mu)-T_z(M(f))(\mu)=\sum_{j\in\mathbb{N}}L_j(\mu)f_j(z)(z-\lambda_j)\mu f(\lambda_j)$$

$$-\sum_{j\in\mathbb{N}}L_j(\mu)f_j(z)(z-\lambda_j)\lambda_jf(\lambda_j)=L(\mu)\sum_{j\in\mathbb{N}}f_j(z)(z-\lambda_j)f(\lambda_j)$$

$$=L(\mu)\Bigg(z\sum_{j\in\mathbb{N}}f_j(z)f(\lambda_j)-\sum_{j\in\mathbb{N}}f_j(z)\lambda_jf(\lambda_j)\Bigg)=L(\mu)(zf(z)-zf(z))=0.$$

По [8, лемма 1.7] для любого $z \in \mathbb{C}$ существует целая функция a_z такая, что для любых $f \in A_G^{-\infty}$ и $\mu \in \mathbb{C}$

$$a_z(\mu)f(\mu) = T_z(f)(\mu) = \sum_{j\in\mathbb{N}} L_j(\mu)f_j(z)(z-\lambda_j)f(\lambda_j). \tag{4}$$

Положим $Q(z,\mu) := a_z(\mu)$, $z,\mu \in \mathbb{C}$. Так как ряд (4) сходится в $A_G^{-\infty}$ (по z), то для всякого $\mu \in \mathbb{C}$ функция $Q(z,\mu)$ целая в $\mathbb{C}$ (по z), и, следовательно, $Q(z,\mu) \in A(\mathbb{C}^2)$.

Покажем, что $|Q|$ удовлетворяет оценкам сверху в (ii). Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Найдутся $m_0 \in \mathbb{N}$ и постоянная B_1 такие, что

$$|L_j(\mu)| \leqslant B_1 \exp(H_G(\mu) + H_K(\mu) + m_0 \log(1+|\mu|)), \quad j \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Из равенства (4) следует, что для любых $z,\mu \in \mathbb{C}$

$$Q(z,\mu)e_\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} L_j(\mu)f_j(z)(z-\lambda_j)e_{\lambda_j}, \tag{6}$$

причем последний ряд сходится в $A^{-\infty}(G)$. По [18, лемма 2] существует $B_2 < \infty$ такое, что

$$\frac{\exp H_G(\lambda)}{B_2(1+|\lambda|)^{k+3}} \leqslant \|e_\lambda\|_{k+3} \leqslant B_2 \frac{\exp H_G(\lambda)}{(1+|\lambda|)^{k+3}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

где k выбрано по n, как в неравенстве (2). Тогда, с учетом (2), (5)–(7),

$$\begin{aligned}
|Q(z,\mu)|\ \|e_\mu\|_{k+3} &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |L_j(\mu)|\ |f_j(z)|(|z|+|\lambda_j|)\|e_{\lambda_j}\|_{k+3} \leqslant BB_1B_2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \exp(H_G(\mu) \\
&+ H_K(\mu) + m_0\log(1+|\mu|) + k\log(1+|\lambda_j|) - n\log(1+|z|) + H_G(z) \\
&- H_G(\lambda_j) + H_G(\lambda_j) - (k+3)\log(1+|\lambda_j|) + \log(1+|z|) + \log(1+|\lambda_j|)) \\
&= BB_1B_2B_3 \exp(H_G(\mu) + H_K(\mu) + m_0\log(1+|\mu|) - (n-1)\log(1+|z|) + H_G(z)),
\end{aligned}$$

где $B_3 := \sum_{j\in\mathbb{N}}(1+|\lambda_j|)^{-2} < \infty$. Вследствие (7) для любых $z,\mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{gathered}
|Q(z,\mu)| \leqslant BB_1B_2^2B_3 \exp(H_G(z) + H_K(\mu) \\
-(n-1)\log(1+|z|) + (m_0+k+3)\log(1+|\mu|)).
\end{gathered}$$

Значит, функция Q удовлетворяет оценкам сверху в (ii). Отсюда следует, что $Q(z,\cdot)f \in A_{G+K}^{-\infty}$ для любой функции $f \in A_G^{-\infty}$ и произвольного $z \in \mathbb{C}$.

Покажем, что $Q(z,z) = L(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Возьмем функцию $f \in A_G^{-\infty}$ такую, что $f(\lambda_j) = 1$. Из (4) следует, что $Q(z,\lambda_j) = L'(\lambda_j)(z-\lambda_j)f_j(z)$, $j \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. По лемме 2 для $f \in A_G^{-\infty}$

$$L(z)f(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} L(z)f_j(z)f(\lambda_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} L(z)\frac{Q(z,\lambda_j)f(\lambda_j)}{L'(\lambda_j)(z-\lambda_j)} = Q(z,z)f(z).$$

Поэтому $Q(z,z) = L(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Таким образом, функция Q удовлетворят условиям в (ii).

При доказательстве леммы 3 мы будем использовать приводимое ниже следствие (доказательства) теоремы [12, теорема 4.4.3].

Теорема 2. *Пусть v — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^2$, Σ — комплексная одномерная плоскость в $\mathbb{C}^2$. Для любой аналитической функции f на Σ, для которой*

$\int_\Sigma |f|^2\exp(-v)d\sigma<\infty$ (*$d\sigma$ обозначаем меру Лебега на* Σ), *существует целая в* $\mathbb{C}^2$ *функция* F *такая, что* $F=f$ *на* Σ *и*

$$\int\limits_{\mathbb{C}^2}|F|^2(1+|z|)^{-3}\exp(-v_1)d\lambda\leqslant C\int\limits_{\Sigma}|f|^2\exp(-v)\,d\sigma,$$

где $v_1(z):=\sup_{|t|\leqslant 1}v(z+t)$, $z\in\mathbb{C}^2$, $d\lambda$ — *мера Лебега в* $\mathbb{C}^2$, $|t|:=(|t_1|^2+|t_2|^2)^{1/2}$, $t\in\mathbb{C}^2$, *константа* C *не зависит от* f.

Лемма 3. *Следующие условия равносильны:*

(I) *Существует функция* Q, *такая как в* (ii) *теоремы 5.*

(II) *Существует плюрисубгармоническая в* $\mathbb{C}^2$ *функция* P *такая, что* $P(z,z)\geqslant H_G(z)+H_K(z)$, $z\in\mathbb{C}$, *и для любого* n *существуют* m *и* $C<\infty$ *такие, что*

$$P(z,\mu)\leqslant H_G(z)+H_K(\mu)-n\log(1+|z|)+m\log(1+|\mu|)+C,\quad z,\mu\in\mathbb{C}.$$

(III) *Существуют субгармонические в* $\mathbb{C}$ *функции* u_t, v_t, $t\in\mathbb{C}$, *такие, что* $u_t(t)\geqslant 0$, $v_t(t)\geqslant 0$, $t\in\mathbb{C}$, *и для любого* n *существуют* m *и* $C<\infty$ *такие, что*

(*a*) $u_t(z)\leqslant H_G(z)-H_G(t)-n\log(1+|z|)+m\log(1+|t|)+C$, $z,t\in\mathbb{C}$;

(*b*) $v_t(\mu)\leqslant H_K(\mu)-H_K(t)-n\log(1+|t|)+m\log(1+|\mu|)+C$, $\mu,t\in\mathbb{C}$.

$\lhd$ (II) $\Rightarrow$ (III): Положим

$$u_t(z):=P(z,t)-P(t,t),\quad v_t(\mu):=P(t,\mu)-P(t,t),\quad z,\mu,t\in\mathbb{C}.$$

(III) $\Rightarrow$ (II): Пусть

$$P_0(z,\mu):=\sup_{t\in\mathbb{C}}(u_t(z)+v_t(\mu)+H_K(t)+H_K(t)),\quad z,\mu\in\mathbb{C}.$$

Поскольку $u_t(t)\geqslant 0$, $v_t(t)\geqslant 0$, выполняется неравенство $P_0(z,z)\geqslant H_G(z)+H_K(z)$, $z\in\mathbb{C}$. Зафиксируем $n\in\mathbb{N}$. Существуют $k=k(n)$, $m=m(k)$, $C_1=C_1(n)<\infty$, $C_2=C_2(k)<\infty$ такие, что

$$u_t(z)\leqslant H_G(z)-H_G(t)-n\log(1+|z|)+k\log(1+|t|)+C_1,\quad z,t\in\mathbb{C},$$

и

$$v_t(\mu)\leqslant H_K(\mu)-H_K(t)-k\log(1+|t|)+m\log(1+|\mu|)+C_2,\quad \mu,t\in\mathbb{C}.$$

Поэтому

$$P_0(z,\mu)\leqslant H_G(z)+H_K(\mu)-n\log(1+|z|)+m\log(1+|\mu|)+C_1+C_2,\quad z,\mu\in\mathbb{C}.$$

В качестве P можно взять полунепрерывную сверху регуляризацию P_0^* функции P_0.

(I) $\Rightarrow$ (II): Пусть функция $Q\in A(\mathbb{C}^2)$ удовлетворяет условиям в (ii) теоремы 1. Тогда плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^2$ функция $\log|Q|$ удовлетворяет оценкам сверху в (ii). В силу [13, замечание 1.3] существуют $p_0\in\mathbb{N}$ и последовательность (попарно непересекающихся) кругов $B_k:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-\mu_k|<r_k\}$, $\mu_k\to\infty$, $\sum_{k=1}^\infty r_k<\infty$, такие, что

$$\log|L(z)|\geqslant H_G(z)+H_K(z)-p_0\log(1+|z|),\quad z\notin\mathscr{B}:=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k.$$

Заметим, что существует $A>0$ такое, что

$$H_G(z)+H_K(z)\leqslant\inf_{|t|\leqslant 1}(H_G(z+t)+H_K(z+t))+A,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Положим

$$P_1(z,\mu) := \sup_{|h_1|\leqslant 1,\, |h_2|\leqslant 1} \log|Q(z+h_1,\mu+h_2)| + p_0\log(1+|z|), \quad z,\mu\in\mathbb{C}.$$

Функция P_1 плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^2$ и удовлетворяет оценкам сверху из (ii).

Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$, то существует число $R>0$ со следующим свойством: если $|z|\geqslant R$, то найдется $w_z\in\mathbb{C}$ такое, что $|w_z - z| < 1$ и $w_z\notin\mathscr{B}$, а значит,

$$\log|L(w_z)| \geqslant H_G(w_z) + H_K(w_z) - p_0\log(1+|w_z|).$$

Поэтому, если $|z|\geqslant R$, то

$$\begin{gathered}P_1(z,z) \geqslant \sup_{|t|\leqslant 1}(\log|L(z+t)| + p_0\log(1+|z+t|))\\ \geqslant \log|L(w_z)| + p_0\log(1+|w_z|) \geqslant H_G(w_z)+H_K(w_z) \geqslant H_G(z)+H_K(z) - A.\end{gathered}$$

Заметим, что $B := \inf_{|z|\leqslant R} P_1(z,z) > -\infty$ и $C := \sup_{|z|\leqslant R}(H_G(z)+H_K(z)) < \infty$. Поэтому плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^2$ функция $P := P_1 + A + |C-B|$ удовлетворяет условиям в (II).

(II) $\Rightarrow$ (I): Пусть $\Sigma := \{(z,z) : z\in\mathbb{C}\}$; $m_0\in\mathbb{N}$ и $M<\infty$ таковы, что $|L(z)| \leqslant M\exp(H_Q(z) + H_K(z) + m_0\log(1+|z|))$, $z\in\mathbb{C}$. По теореме 2, примененной к функциям $f=L$, $v(z,\mu) = 2P(z,\mu) + (2m_0+3)\log(1+|z|)$, $z,\mu\in\mathbb{C}$, существует целая в $\mathbb{C}^2$ функция Q со свойствами, как в (II). (При этом используется стандартная процедура перехода от интегральных оценок к равномерным.) $\rhd$

Лемма 4. *Для любой ограниченной выпуклой области $G\subset\mathbb{C}$ существуют субгармонические в $\mathbb{C}$ функции u_t, $t\in\mathbb{C}$, такие, как в* (III) *леммы* 3.

$\lhd$ Без ограничения общности можно считать, что $0\in G$. Тогда существуют $\alpha,\beta>0$ такие, что $\alpha|z|\leqslant H_G(z)\leqslant\beta|z|$, $z\in\mathbb{C}$. Пусть $|t|\geqslant 1$. Положим

$$u_t(z) := \left(1 - \frac{\log(1+|t|)}{|t|}\right)(H_G(z) - H_G(t)), \quad z\in\mathbb{C}.$$

Функции u_t субгармонические в $\mathbb{C}$ и $u_t(t)=0$. Возьмем $n\in\mathbb{N}$. Имеем

$$\begin{aligned}u_t(z) &= H_G(z) - H_G(t) - \frac{\log(1+|t|)}{|t|}H_G(z) + \frac{\log(1+|t|)}{|t|}H_G(t)\\ &\leqslant H_G(z) - H_G(t) - \frac{\log(1+|t|)}{|t|}\,\alpha|z| + \frac{\log(1+|t|)}{|t|}\beta|t|\\ &= H_G(z) - H_G(t) - \frac{\log(1+|t|)}{|t|}\,\alpha|z| + \beta\log(1+|t|)\\ &= H_G(z) - H_G(t) - n\log(1+|z|) + (n+\beta)\log(1+|t|) + g(z,t),\end{aligned}$$

где $g(z,t) = n\log(1+|z|) - n\log(1+|t|) - \alpha\frac{|z|}{|t|}\log(1+|t|)$, $z\in\mathbb{C}$.

Для любых $t\in\mathbb{C}$, $|t|\geqslant 1$, $z\in\mathbb{C}$

$$\frac{1+|z|}{1+|t|} \leqslant 1 + \frac{|z|}{|t|}$$

и

$$g(z,t) = n\log(1+|z|) - n\log(1+|t|) - \alpha\frac{|z|}{|t|}\log(1+|t|) \leqslant n\log\left(1+\frac{|z|}{|t|}\right) - \alpha\frac{|z|}{|t|}\log 2.$$

Поэтому существует постоянная C такая, что $g(z,t) \leqslant C$ для любых $t \in \mathbb{C}$, $|t| \geqslant 1$, и $z \in \mathbb{C}$. Если $|t| < 1$, то положим $u_t \equiv 0$. Возьмем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $m \geqslant n + \beta$. Тогда найдется постоянная C_1, для которой

$$u_t(z) \leqslant H_G(z) - H_G(t) - n\log(1+|t|) + m\log(1+|t|) + C_1$$

для любых $t, z \in \mathbb{C}$. $\rhd$

Лемма 5. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *Существуют субгармонические функции v_t, $t \in \mathbb{C}$, такие, что $v_t(t) \geqslant 0$ и для любого n существуют k и $C < \infty$ такие, что*

$$v_t(z) \leqslant H_K(z) - H_K(t) + k\log(1+|z|) - n\log(1+|t|) + C, \quad z, t \in \mathbb{C}.$$

(II) *Компакт K отличен от точки.*

$\lhd$ (I) $\Rightarrow$ (II): Пусть существует семейство субгармонических функций v_t, $t \in \mathbb{C}$, как в (I). Предположим, что компакт K совпадает с точкой w_0. Функция $H_K(z) = \mathrm{Re}(zw_0)$, $z \in \mathbb{C}$, является гармонической в $\mathbb{C}$. Тогда субгармонические в $\mathbb{C}$ функции $\widetilde{v}_t(z) := v_t(z) - H_K(z) + H_K(t)$, $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяют следующим условиям: $\tilde{v}_t(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{C}$, и для любого n существуют k и $C < \infty$ такие, что

$$\tilde{v}_t(t) \leqslant k\log(1+|z|) - n\log(1+|t|) + C, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Согласно доказательству теоремы 2.6 из [17, с. 374] такого семейства функций $\widetilde{v}_t$, $t \in \mathbb{C}$, не существует. Получено противоречие.

(II) $\Rightarrow$ (I): Пусть компакт K отличен от точки. Если $\operatorname{int} K = \varnothing$, то семейство функций v_t, $t \in \mathbb{C}$, как в (I), существует ввиду [16, лемма 4.10, см. также ее доказательство]. Если же $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, то семейство $v_t, t \in \mathbb{C}$, как в (I), существует согласно [20, с. 21, доказательство замечания 3.10]. $\rhd$

Из теоремы 1 и лемм 3–5 вытекает основной результат работы.

Теорема 3. *Оператор представления $\Pi : \Lambda_G^{-\infty} \to A^{-\infty}(G)$ имеет линейный непрерывный правый обратный тогда и только тогда, когда выпуклый компакт K отличен от точки.*

Авторы выражают признательность проф. А. В. Абанину за ценные замечания.

Литература

1. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы: теория и приложения.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—336 с.—(Итоги науки. ЮФО. Мат. монография. Вып. 1).
2. Коробейник Ю. Ф, Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34.—С. 70–84.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
4. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
5. Мелихов С. Н. Об абсолютно сходящихся рядах в канонических индуктивных пределах // Мат. заметки.—1986.—Т. 39, № 6.—С. 877–886.
6. Мелихов С. Н. Нетривиальные разложения нуля и представительные подпространства // Изв. вузов. Математика.—1990.—№ 8.—С. 53–65.
7. Мелихов С. Н. Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 7.—С. 105–128.
8. Мелихов С. Н. О левом обратном к оператору сужения на весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2002.—Т. 14, вып. 1.—С. 99–133.

9. Мелихов С. Н. Выпуклые конформные отображения и правые обратные к оператору представления рядами экспонент // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 14.: материалы междунар. науч. конф. (Казань, 18–24 марта 2002 г.).—Казань: Казанское математическое общество.—2002.—С. 213–227.
10. Муллаев М. Ю. Ряды Дирихле для пространства $H_\infty(D)$ // Проблемы аппроксимации функций комплексного и действительного переменного.—Уфа, 1983.—С. 120–129.
11. Райков Д. А. О двух классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Тр. семинара по функц. анализу.—Воронеж, 1957.—№ 5.—С. 22–34.
12. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.—М.: Мир, 1968.—280 с.
13. Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi. Surjectivity criteria for convolution operators in $A^{-\infty}$ // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.—2010.—Vol. 348.—P. 253–256.
14. Abanin A. V., Le Hai Khoi, Nalbandyan Yu. S. Minimal absolutely representing systems of exponentials for $A^{-\infty}(\Omega)$ // J. Approx. Theory.—2011.—Vol. 163, № 10.—P. 1534–1545.
15. Bierstedt K.-D., Meise R., Summers W. H. Köthe sets and Köthe sequence spaces // Funcional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory (Rio de Janeiro, 1980).—Amsterdam: North-Holland Math. Stud., 1982.—Vol. 71.—P. 27–91.
16. Langenbruch M. The splitting conditions for the weghted $\overline{\partial}$-complex // Results Math.—1992.—Vol. 22.—P. 560–597.
17. Melikhov S. N. Generalized Fourier expansions for distribution and ultradistribution // Revista Math. Compl.—1999.—Vol. 12, № 2.—P. 349–379.
18. Melikhov S. N. (DFS)-spaces of holomorphic functions invariant under differentiation // Math. Anal. Appl.—2004.—Vol. 297.—P. 577–586.
19. Melikhov S. N., Momm S. On the expansions of analytic functions on convex locally closed sets in exponential series // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 1.—С. 44–58.
20. Momm S. An extremal plurisubharmonic funcion associated Green function with pole at infinity // J. Reine Angew. Math.—1996.—Vol. 471.—P. 139–163.

Статья поступила 19 июля 2011 г.

Варзиев Владислав Аликович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник лаб. комплексного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: varzi@yandex.ru

Мелихов Сергей Николаевич
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
заведующий лаб. комплексного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
профессор кафедры теории функций и функц. анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: melih@math.rsu.ru

ON COEFFICIENTS OF EXPONENTIAL SERIES FOR ANALYTIC FUNCTIONS OF POLYNOMIAL GROWTH

Varziev V. A., Melikhov S. N.

In this article a criterion is obtained that the operator of the representation of analytic functions on a bounded convex domain G of polynomial growth near the boundary of G by exponential series, exponents of which are zeroes of a special entire function, has a continuous linear right inverse.

Key words: exponential series, analytic functions of polynomial growth, representation operator, continuous linear right inverse.