Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 3, С. 3–16

УДК **514.765**

О КОНФОРМНО ПОЛУПЛОСКИХ 4-МЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский

В статье дается классификация конформно полуплоских алгебр Ли вещественных четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, конформно полуплоские группы Ли.

В статье исследуются римановы многообразия, для которых автодуальная или антиавтодуальная составляющая тензора Вейля W равна нулю (см., например, [1]). Такие многообразия принято называть конформно полуплоскими [1, 2], в отличие от конформно плоских ($W = 0$). Конформно плоские римановы метрики исследовались в [3, 4]. Однородные конформно плоские римановы многообразия классифицированы Д. В. Алексеевским и Б. Н. Кимельфельдом в [5]. Вопрос о классификации конформно полуплоских однородных римановых многообразий в общем случае остается открытым. В настоящей работе дана классификация конформно полуплоских вещественных четырехмерных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой. При этом существенно использовались классификация Г. М. Мубаракзянова вещественных четырехмерных алгебр Ли [7] и результаты работ А. Г. Кремлева и Ю. Г. Никонорова [8, 9].

Пусть (M, g) — ориентированное риманово многообразие размерности n, а X, Y, T, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)T = [\nabla_Y, \nabla_X]T + \nabla_{[X,Y]}T$ — тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим соответственно как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$ и $s = \mathrm{tr}(r)$. Разделим тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни — Номидзу [1], получим тензор Вейля W и тензор одномерной кривизны A:

$$R = W + A \owedge g, \tag{1}$$

где

$$(A \owedge g)(X,Y,T,V) = A(X,T)g(Y,V) + A(Y,V)g(X,T) - A(X,V)g(Y,T) - A(Y,T)g(X,V),$$

$$A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right).$$

Будем считать далее, что $\dim M = 4$. Тогда риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2\rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j)).$$

© 2011 Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.

Оператор Ходжа $* : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, задаваемый соотношением

$$\langle *\alpha, \beta \rangle \,\mathrm{vol} = \alpha \wedge \beta \quad (\forall\, \alpha, \beta \in \Lambda^2_x M,\ x \in M),$$

где vol — форма объема на M, обладает тем свойством, что $*^2 = \mathrm{Id}$. Отсюда

$$\Lambda^2_x M = \Lambda^+_x \oplus \Lambda^-_x, \tag{2}$$

где Λ^+_x и Λ^-_x обозначают соответственно собственные пространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 оператора $*$.

Риманову тензору кривизны в любой точке можно поставить в соответствие оператор

$$\mathscr{R} : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M,$$

определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathscr{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X, Y, T, V), \tag{3}$$

где $R_x(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V)$.

Матрицу оператора кривизны $\mathscr{R}$ относительно разложения (2) можно представить в блочном виде [10]:

$$\mathscr{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array} \right), \tag{4}$$

где W^+ и W^- — матрицы *автодуальной* и *антиавтодуальной* составляющих тензора Вейля W.

Любой ортонормированный базис E_1, E_2, E_3, E_4 пространства $T_x M$ определяет ортонормированный базис

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(E_1 \wedge E_2 \pm E_3 \wedge E_4\bigr), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(E_1 \wedge E_3 \pm E_4 \wedge E_2\bigr), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(E_1 \wedge E_4 \pm E_2 \wedge E_3\bigr) \end{gathered} \tag{5}$$

пространства $\Lambda^{\pm}_x M$ (см., например, [1]).

Отметим, что матрицы W^+ и W^- являются симметричными и их компоненты в ортонормированном базисе (5) находятся по формулам:

$$\begin{gathered} W^+_{11} = \frac{1}{2}(R_{1212} + 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12}, \\ W^+_{22} = \frac{1}{2}(R_{1313} - 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12}, \\ W^+_{33} = \frac{1}{2}(R_{1414} + 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12}, \\ W^+_{12} = \frac{1}{2}(R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442}), \\ W^+_{13} = \frac{1}{2}(R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423}), \\ W^+_{23} = \frac{1}{2}(R_{1314} + R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}), \end{gathered} \tag{6}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned}
W_{44}^- &= \frac{1}{2}(R_{1212} - 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12},\\
W_{55}^- &= \frac{1}{2}(R_{1313} + 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12},\\
W_{66}^- &= \frac{1}{2}(R_{1414} - 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12},\\
W_{45}^- &= \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} - R_{3413} + R_{3442}),\\
W_{46}^- &= \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} - R_{3414} + R_{3423}),\\
W_{56}^- &= \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} - R_{4214} + R_{4223}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Пусть, далее, $M = G$ — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Фиксируем в $\mathfrak{g}$ базис E_1, E_2, E_3, E_4 левоинвариантных векторных полей G и положим

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k, \quad \nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k, \quad \langle E_i, E_j \rangle = g_{ij}, \tag{8}$$

где $\{c_{ij}^k\}$ — структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор. Пусть $c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}$. Тогда символы Кристоффеля первого и второго рода вычисляются соответственно по формулам

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}), \quad \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}, \tag{9}$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица обратная к $\|g_{ks}\|$.

Из (8) и (9) очевидно следует, что тензоры Римана R_{ijkt}, Риччи r_{ik}, скалярная кривизна s и тензор Вейля W_{ijkt} являются функциями структурных констант c_{ij}^k и компонент метрического тензора g_{ij} (см. также [3]). Следовательно, тем же свойством обладают компоненты W^+ и W^-.

Нам понадобятся следующие результаты работ [8, 9].

Лемма 1. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на четырехмерной действительной разложимой унимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис, в котором ненулевые структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид* [8]:

$$c_{1,2}^3 = A, \quad c_{1,2}^4 = -AM, \quad c_{2,3}^1 = B, \quad c_{2,3}^4 = -BK, \quad c_{1,3}^2 = -C, \; c_{1,3}^4 = CL,$$

где $K, L, M \in \mathbb{R}$ — произвольные, $A, B, C \in \mathbb{R}$ и $A \leqslant B \leqslant C$.

В зависимости от знаков чисел A, B и C получаются различные алгебры Ли. Все они с точностью до изоморфизма приведены в таблице 1, основанной на результатах Дж. Милнора о трехмерных унимодулярных алгебрах Ли [11]. Здесь $4A_1$ — коммутативная алгебра Ли, а каждая $A_{3,i}$ есть унимодулярная алгебра Ли размерности 3 (см. [7]).

Таблица 1

Алгебра Ли	Знаки A, B, C
$\mathbb{A}_1$	$0, 0, 0$
$\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$	$0, 0, +$
$\mathbb{A}_{3,4} \oplus \mathbb{A}_1$	$-, 0, +$
$\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$	$0, +, +$
$\mathbb{A}_{3,8} \oplus \mathbb{A}_1$	$-, +, +$
$\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$	$+, +, +$

Таблица 2

Алгебра Ли	Структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_{4,1}$	$c_{2,4}^1 = A$, $c_{3,4}^1 = B$, $c_{3,4}^2 = C$	$A > 0$, $C > 0$
$\mathbb{A}_{4,2}^{-2}$	$c_{1,4}^1 = -2A$, $c_{2,4}^1 = B$, $c_{2,4}^2 = A$, $c_{3,4}^1 = C$, $c_{3,4}^2 = D$, $c_{3,4}^3 = A$	$A > 0$, $D > 0$
$\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\,-1-\alpha}$, $\alpha \in (-1, \frac{1}{2}]$	$c_{1,4}^1 = A$, $c_{2,4}^1 = B$, $c_{2,4}^2 = C$, $c_{3,4}^1 = D$, $c_{3,4}^2 = F$, $c_{3,4}^3 = -A - C$	$A > 0$, $C < 0$
$\mathbb{A}_{4,6}^{-2\beta,\beta}$, $\beta \in (0, +\infty)$	$c_{1,4}^1 = -2A$, $c_{2,4}^1 = B$, $c_{2,4}^2 = A + C$, $c_{2,4}^3 = D$, $c_{3,4}^1 = F$, $c_{3,4}^2 = G$, $c_{3,4}^3 = A - C$	$A > 0$, $D < 0$, $G > 0$
$\mathbb{A}_{4,8}$	$c_{2,3}^1 = A$, $c_{2,4}^1 = B$, $c_{2,4}^2 = C$, $c_{3,4}^1 = D$, $c_{3,4}^2 = F$, $c_{3,4}^3 = -C$	$A > 0$, $C > 0$
$\mathbb{A}_{4,10}$	$c_{2,3}^1 = A$, $c_{2,4}^1 = B$, $c_{2,4}^3 = C$, $c_{3,4}^1 = D$, $c_{3,4}^2 = G$	$A > 0$, $C < 0$, $G > 0$

Таблица 3

Алгебра Ли	Структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1$	$c_{1,2}^2 = A$, $c_{1,2}^3 = B$	$A > 0, B \geqslant 0$
$2\mathbb{A}_2$	$c_{1,2}^2 = A$, $c_{1,3}^2 = B$, $c_{1,3}^4 = C$, $c_{3,4}^4 = G$, $c_{1,4}^2 = F(A - D)$, $c_{1,4}^4 = D$, $c_{3,4}^2 = -FG$,	$A > 0$, $G > 0$
$\mathbb{A}_{3,2} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A$, $c_{1,3}^4 = B$, $c_{2,3}^1 = C$, $c_{2,3}^4 = D$	$A > 0$, $C > 0$
$\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A$, $c_{2,3}^4 = B$	$A > 0$, $B \geqslant 0$
$\mathbb{A}_{3,5}^{\alpha} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = A$, $c_{1,3}^4 = B$, $c_{2,3}^1 = C$, $c_{2,3}^2 = A\alpha$, $c_{2,3}^4 = D$	$A > 0$, $0 < \|\alpha\| < 1$
$\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = \alpha L$, $c_{1,3}^2 = -AL$, $c_{13}^4 = BL$, $c_{2,3}^1 = L/A$, $c_{23}^4 = CL$	$L > 0$, $A > 0$, $\alpha > 0$

Таблица 4

Алгебра Ли	Структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_{4,2}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1 = \alpha L$, $c_{2,4}^1 = A(\alpha - 1)L$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L$, $c_{3,4}^1 = (B(\alpha - 1) - AC)L$, $c_{3,4}^2 = CL$,	$C > 0$, $L > 0$, $\alpha \neq 0, -2$
$\mathbb{A}_{4,3}$	$c_{1,4}^1 = L$, $c_{2,4}^1 = AL$, $c_{3,4}^1 = BL$, $c_{3,4}^2 = CL$	$C > 0$, $L > 0$
$\mathbb{A}_{4,4}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L$, $c_{2,4}^1 = AL$, $c_{3,4}^1 = BL$, $c_{3,4}^2 = CL$,	$A > 0$, $C > 0$, $L > 0$
$\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$c_{2,4}^1 = A(\alpha - 1)L$, $c_{2,4}^2 = \alpha L$, $c_{3,4}^3 = \beta L$, $c_{3,4}^2 = C(\alpha - \beta)L$, $c_{1,4}^1 = L$, $c_{3,4}^1 = (AC(\alpha - 1) + B(\beta - 1))L$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$	$L > 0$, $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq -1$
$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = \alpha L$, $c_{2,4}^1 = AL$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \beta L$, $c_{2,4}^3 = -\frac{L}{C}$, $c_{3,4}^1 = BL$, $c_{3,4}^2 = CL$	$C > 0$, $L > 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geqslant 0$
$\mathbb{A}_{4,7}$	$c_{1,4}^1 = 2A$, $c_{2,3}^1 = B$, $c_{2,4}^1 = C$, $c_{2,4}^2 = A$, $c_{3,4}^1 = D$, $c_{3,4}^2 = F$, $c_{3,4}^3 = A$	$A > 0$, $B > 0$, $F > 0$
$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$c_{1,4}^1 = A(\beta + 1)$, $c_{2,3}^1 = B$, $c_{2,4}^1 = C$, $c_{2,4}^2 = A$, $c_{3,4}^1 = D$, $c_{3,4}^2 = F(1 - \beta)$, $c_{3,4}^3 = A\beta$	$A > 0$, $B > 0$, $-1 < \beta \leqslant 1$
$\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1 = 2A\alpha$, $c_{2,3}^1 = B$, $c_{2,4}^1 = C$, $c_{2,4}^2 = A\alpha$, $c_{2,4}^3 = -AD$, $c_{3,4}^1 = F$, $c_{3,4}^2 = \frac{A}{D}$, $c_{3,4}^3 = A\alpha$	$A > 0$, $B > 0$, $D > 0$, $\alpha > 0$
$\mathbb{A}_{4,12}$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A$, $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = B$, $c_{1,4}^2 = C$, $c_{2,4}^1 = D$, $c_{3,4}^1 = F$, $c_{3,4}^2 = G$	$A > 0$, $C < 0$, $D > 0$

Лемма 2. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на четырехмерной действительной неразложимой унимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице* 2 [8].

Лемма 3. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице* 3 [9].

Лемма 4. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице* 4 [9].

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть G — вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда*

1) $W^+ = 0$ *в том и только том случае, если* $W = 0$;

2) $W^- = 0$ *в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий: либо* $W = 0$, *либо алгебра Ли группы* G *есть одна из алгебр следующего списка: алгебра Ли* $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$ $(-1 < \beta \leqslant 1)$ *с набором структурных констант* $c_{1,4}^1 = 2A$, $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A > 0$, $\beta = 1$ *или* $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A > 0$, $\beta = 1$; *алгебра Ли* $\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ *с набором структурных констант* $c_{1,4}^1 = 2A\alpha$, $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A\alpha$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -A$, $A > 0$ *или* $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A\alpha$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A\alpha$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -A$, $A > 0$.

$\lhd$ Фиксируя базис работы [8] на 4-мерной унимодулярной разложимой алгебре Ли и применяя формулы (6) и (7), определяем элементы блоков W^+ и W^- в матрице оператора кривизны (4):

$$W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{1}{6}(AC - 2A^2 - 2A^2M^2 + C^2 + B^2 + AB + C^2L^2 + B^2K^2 - 2CB),$$
$$W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{1}{6}(AC + A^2 + A^2M^2 - 2C^2 + B^2 - 2AB - 2C^2L^2 + B^2K^2 + CB),$$
$$W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{1}{6}(A^2 + A^2M^2 + C^2 - 2AC - 2B^2 + AB + C^2L^2 - 2B^2K^2 + CB),$$
$$W_{12}^+ = \frac{1}{4}(2AMCL - BKA + CBK), \quad W_{13}^+ = \frac{1}{4}(CLB - ACL - 2AMBK),$$
$$W_{23}^+ = \frac{1}{4}(AMB - CAM + 2BKCL), \quad W_{45}^- = \frac{1}{4}(2AMCL + BKA - CBK),$$
$$W_{46}^- = \frac{1}{4}(2AMBK - CLA + CLB), \quad W_{56}^- = \frac{1}{4}(AMB - 2BKCL - CAM).$$

Находим решения систем уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ относительно структурных констант A, B, C, K, L, M. Получаем, что решения данных систем уравнений совпадают и равны:

1. $A = B = C = 0$, $K, L, M \in \mathbb{R}$.
2. $A = B$, $C = K = M = 0$, $B, L \in \mathbb{R}$.
3. $A = C$, $B = L = M = 0$, $C, K \in \mathbb{R}$.
4. $A = K = L = 0$, $B = C$, $C, M \in \mathbb{R}$.
5. $A = B = CL^2 + C$, $K = M = 0$, $C, L \in \mathbb{R}$.
6. $A = C = B + BK^2$, $L = M = 0$, $B, K \in \mathbb{R}$.
7. $B = C = A + AM^2$, $K = L = 0$, $A, M \in \mathbb{R}$.

Сопоставляя полученные результаты с данными таблицы 1, получаем, что все четырехмерные действительные разложимые унимодулярные алгебры Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой и $W^{\pm} = 0$, исчерпываются следующими алгебрами: $4\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$ с ограничениями из леммы 1. Отметим, что для указанных алгебр Ли тензор Вейля W тривиален.

Далее мы последовательно рассмотрим все вещественные четырехмерные унимодулярные неразложимые алгебры Ли, чем и завершим доказательство теоремы в унимодулярном случае.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,1}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и, применяя формулы (6) и (7), вычислим компоненты блоков W^+ и W^- в разложении оператора кривизны. Получаем следующие нетривиальные компоненты:

$$W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{1}{6}(A^2 - 2B^2 - 2C^2), \quad W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{1}{6}(B^2 + C^2 - 2A^2),$$
$$W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{1}{6}(A^2 + B^2 + C^2), \quad W_{12}^+ = W_{45}^- = \frac{1}{2}AB, \quad W_{13}^+ = -W_{46}^- = -\frac{1}{4}AC.$$

Ввиду того, что структурные константы A и C положительны, ни одна из систем уравнений $W^+=0$ и $W^-=0$ решений не имеет.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,2}^{-2}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и находим компоненты матриц W^+ и W^-, используя (6) и (7):

$$W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{1}{6}(6A^2+B^2-2C^2-2D^2), \quad W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{1}{6}(6A^2-2B^2+C^2+D^2),$$
$$W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{1}{6}(-12A^2+B^2+C^2+D^2), \quad W_{12}^+ = W_{45}^- = \frac{1}{2}(CB+2AD),$$
$$W_{13}^+ = -W_{46}^- = \frac{1}{4}(5AC-BD), \quad W_{23}^+ = -W_{56}^- = -\frac{5}{4}AB.$$

Нетрудно заметить, что при ограничениях на структурные константы $A>0$ и $D>0$ системы уравнений $W^+=0$ и $W^-=0$ не имеют решений.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,-1-\alpha}$, $\alpha\in(-1,\frac{1}{2}]$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и вычислим компоненты блоков W^+ и W^- в разложении оператора кривизны:

$$W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{1}{6}(B^2-2A^2-2D^2-2C^2-2F^2-8AC),$$
$$W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{1}{6}(4A^2-2B^2+D^2-2C^2+F^2+4AC),$$
$$W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{1}{6}(B^2+D^2-2A^2+4C^2+F^2+4AC),$$
$$W_{12}^+ = W_{45}^- = \frac{1}{4}(2BD-AF+2CF),$$
$$W_{13}^+ = -W_{46}^- = \frac{1}{4}(DC-BF-2AD),$$
$$W_{23}^+ = -W_{56}^- = \frac{1}{4}B(3A+C).$$

Легко проверить, что системы уравнений $W^+=0$ и $W^-=0$ не имеют решений в силу ограничений на структурные константы $A>0$, $C<0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,6}^{-2\beta,\beta}$, $\beta\in(0,+\infty)$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и вычислим компоненты матриц W^+ и W^- в разложении оператора кривизны:

$$W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{1}{6}(6A^2+B^2-2F^2-2C^2-GD+D^2-2G^2+12AC),$$
$$W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{1}{6}(6A^2-2B^2+F^2-2C^2-GD-2D^2+G^2-12AC),$$
$$W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{1}{6}(B^2+F^2-12A^2+4C^2+2GD+D^2+G^2),$$
$$W_{12}^+ = W_{45}^- = \frac{1}{2}(BF+2AD+2AG-DC+2GC),$$
$$W_{13}^+ = -W_{46}^- = \frac{1}{4}(5AF+CF-BG),$$
$$W_{23}^+ = -W_{56}^- = \frac{1}{4}(FD-5AB+BC).$$

Так как $A>0$, $D<0$ и $G>0$, то, как легко заметить, ни одна из систем уравнений $W^+=0$ и $W^-=0$ решений не имеет.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,8}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и найдем компоненты блоков W^+ и W^- в разложении оператора кривизны:

$$\begin{gathered}
W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{1}{6}(A^2 + B^2 - 2D^2 - 2F^2 - 2C^2 - 3AC),\\
W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{1}{6}(A^2 - 2B^2 + D^2 + F^2 - 2C^2 + 3AC),\\
W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{1}{6}(B^2 - 2A^2 + D^2 + F^2 + 4C^2),\\
W_{12}^+ = \frac{1}{4}(2BD - AF + 2CF), \quad W_{13}^+ = \frac{1}{4}(DC - BF - 2AD), \quad W_{23}^+ = \frac{1}{4}B(2A + C),\\
W_{45}^- = \frac{1}{4}(2BD + AF + 2CF), \quad W_{46}^- = \frac{1}{4}(-DC + BF - 2AD), \quad W_{56}^- = \frac{1}{4}B(2A - C).
\end{gathered}$$

Поскольку A и C положительны, то системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ не имеют решений.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,10}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и вычислим компоненты блоков W^+ и W^- в разложении оператора кривизны. Соответственно, имеем

$$\begin{gathered}
W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{1}{6}(A^2 + B^2 - 2D^2 - 2G^2 + C^2 - GC),\\
W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{1}{6}(A^2 - 2B^2 + D^2 + G^2 - 2C^2 - GC),\\
W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{1}{6}(B^2 - 2A^2 + D^2 + (G + C)^2),\\
W_{12}^+ = \frac{1}{4}(2BD - AC - AG), \quad W_{13}^+ = -\frac{1}{4}(2AD + BG), \quad W_{23}^+ = \frac{1}{4}(2AB + DC),\\
W_{45}^- = \frac{1}{4}(2BD + AC + AG), \quad W_{46}^- = -\frac{1}{4}(BG - 2AD), \quad W_{56}^- = \frac{1}{4}(2AB - DC).
\end{gathered}$$

Очевидно, что системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ не разрешимы при заданных ограничениях на структурные константы $A > 0$, $C < 0$, $G > 0$.

Теперь рассмотрим последовательно каждую неунимодулярную разложимую алгебру Ли из таблицы 3.

Алгебра $\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 3. С помощью формул (6) и (7) определим компоненты W^+ и W^- в разложении оператора кривизны (4).

$$\begin{gathered}
W_{11}^+ = W_{44}^- = -\frac{1}{3}(A^2 + B^2), \quad W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{1}{6}(A^2 + B^2),\\
W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{1}{6}(A^2 + B^2).
\end{gathered}$$

Решая систему уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ относительно структурных констант A, B и принимая во внимание, что $A > 0$, получим, что настоящие системы уравнений решений не имеют.

Алгебра $2\mathbb{A}_2$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 3. Применяя (6) и (7), находим компоненты W^+ и W^-:

$$\begin{gathered}
W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{1}{6}(AD(1 - 2F^2) - 2G^2 + B^2 - 2A^2 + C^2\\
+D^2 + F^2A^2 + F^2D^2 - 2F^2G^2 + 3AFG),
\end{gathered}$$

$$W^+_{22} = W^-_{55} = \frac{1}{6}(A^2 - 2AD(F^2+1) + G^2 - 2B^2 - 2C^2 + D^2 + F^2A^2 + F^2D^2 + F^2G^2),$$

$$W^+_{33} = W^-_{66} = \frac{1}{6}(4F^2AD + G^2 + AD + B^2 + A^2 + C^2$$
$$-2D^2 - 2F^2(A^2 + D^2) + F^2G^2 - 3AFG),$$

$$W^+_{12} = \frac{1}{4}(FCD - FCA - 2AB + 2BFG - 2GC + BD),$$

$$W^+_{13} = \frac{1}{2}(AFD - A^2F + F^2GA - F^2GD - GD),$$

$$W^+_{23} = \frac{1}{4}(2BFD - 2BFA - 2CD - FGC - BG + AC),$$

$$W^-_{45} = \frac{1}{4}(FCD - FCA - 2AB - 2BFG + 2GC + BD),$$

$$W^-_{46} = \frac{1}{2}(AFD - A^2F - F^2GA + F^2GD - GD),$$

$$W^-_{56} = \frac{1}{4}(2BFD - 2BFA - 2CD + FGC + BG + AC).$$

Решая системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D, F, G, получим, что данные системы уравнений решений не имеют.

Алгебра $\mathbb{A}_{3,2} \bigoplus \mathbb{A}_1$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 3. С помощью формул (6) и (7) замечаем, что в этом базисе элементы блоков W^+ и W^- равны:

$$W^+_{11} = W^-_{44} = \frac{1}{6}(C^2 + B^2 + D^2), \quad W^+_{22} = W^-_{55} = \frac{1}{6}(C^2 - 2B^2 + D^2),$$
$$W^+_{33} = W^-_{66} = \frac{1}{6}(-2C^2 + B^2 - 2D^2),$$
$$W^+_{12} = -W^-_{45} = -\frac{1}{4}(AB), \quad W^+_{13} = W^-_{56} = \frac{1}{4}(BC - AD), \quad W^+_{23} = W^-_{56} = -\frac{1}{2}(AC + BD).$$

Очевидно, что при имеющихся ограничениях на структурные константы A и C ($A>0$, $C > 0$) системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ не разрешимы.

Алгебра $\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$. Фиксируем соответствующий ортонормированный базис. Компонентами матриц W^+ и W^- с учетом (6) и (7) являются:

$$W^+_{11} = W^-_{44} = \frac{1}{6}B^2, \quad W^+_{22} = W^-_{55} = \frac{1}{6}B^2, \quad W^+_{33} = W^-_{66} = -\frac{1}{3}B^2, \quad W^+_{13} = W^-_{46} = -\frac{1}{4}AB.$$

Решая системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ относительно структурных констант A, B и принимая во внимание, что $A > 0$, получим одно действительное решение $A > 0$, $B = 0$. Заметим, что для данного набора структурных констант тензор Вейля $W = 0$.

Алгебра $\mathbb{A}^{\alpha}_{3,5} \bigoplus \mathbb{A}_1$, $0 < |\alpha| < 1$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 3. Согласно (6), (7) компоненты блоков W^+ и W^- задаются равенствами:

$$W^+_{11} = W^-_{44} = \frac{1}{6}(C^2 - 2A^2\alpha + A^2 + B^2 + \alpha^2A^2 + D^2),$$

$$W^+_{22} = W^-_{55} = \frac{1}{6}(C^2 + A^2\alpha - 2A^2 - 2B^2 + \alpha^2A^2 + D^2),$$

$$W^+_{33} = W^-_{66} = \frac{1}{6}(A^2\alpha - 2C^2 + A^2 + B^2 - 2\alpha^2A^2 - 2D^2),$$

$$W^+_{12} = -W^-_{45} = -\frac{1}{4}\alpha AB, \quad W^+_{13} = W^-_{46} = \frac{1}{4}(BC - AD), \quad W^+_{23} = -W^-_{56} = -\frac{1}{2}(CA + DB).$$

Нетрудно заметить, что ни одна из систем уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ не имеет решений при заданных ограничениях на структурные константы A, B, C, D и параметр α леммы 3.

Алгебра $\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha} \bigoplus \mathbb{A}_1$, $\alpha > 0$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем соответствующий ортонормированный базис. Используя равенства (6), (7), находим компоненты W^+ и W^-:

$$
\begin{gathered}
W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{G^2}{6A^2}(1 + A^4 + B^2A^2 + C^2A^2 - 2A^2),\\
W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{G^2}{6A^2}(1 - 2A^4 - 2B^2A^2 + C^2A^2 + A^2),\\
W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{G^2}{6A^2}(-2 + A^4 + B^2A^2 - 2C^2A^2 + A^2),\\
W_{12}^+ = -W_{45}^- = -\frac{G^2}{4}(\alpha B + CA), \quad W_{13}^+ = W_{46}^- = -\frac{G^2}{4A}(\alpha CA - B),\\
W_{23}^+ = -W_{56}^- = \frac{G^2}{2A}(-\alpha + A^2\alpha - CBA).
\end{gathered}
$$

Решая системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L и параметра α, для каждой из них получим следующее действительное решение:

$$
A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad L > 0, \quad \alpha > 0.
$$

Отметим, что для данного набора структурных констант тензор Вейля W тривиален.

Рассмотрим теперь последовательно каждую неунимодулярную неразложимую алгебру Ли из таблицы 4, что завершит доказательство теоремы.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,2}^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -2$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4. С учетом (6) и (7) нетривиальные компоненты блоков W^+ и W^- имеют вид:

$$
\begin{gathered}
W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{L^2}{6}\big(4BAC - 4B\alpha AC + 2C^2 + \alpha - \alpha^2 + 2A^2\alpha\\
-A^2\alpha^2 - A^2 + 2A^2C^2 - 4B^2\alpha + 2B^2\alpha^2 + 2B^2\big),\\
W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{L^2}{6}\big(2BAC + C^2 - 2B\alpha AC - \alpha + \alpha^2 + 4A^2\alpha\\
-2A^2\alpha^2 - 2A^2 + A^2C^2 - 2B^2\alpha + B^2\alpha^2 + B^2\big),\\
W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{L^2}{6}\big(2BAC - 2B\alpha AC + C^2 + 2\alpha - 2\,\alpha^2 - 2A^2\alpha\\
+A^2\alpha^2 + A^2 + A^2C^2 - 2B^2\alpha + B^2\alpha^2B^2\big),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
W_{12}^+ = W_{45}^- = -\frac{L^2}{4}\big(\alpha C - 2AB\alpha^2 + 4AB\alpha - 2AB + 2A^2\alpha C - 2\,A^2C - 2C\big),\\
W_{13}^+ = -W_{46}^- = \frac{L^2}{4}\big(\alpha AC + 3B\alpha - B - 2B\alpha^2\big), \quad W_{23}^+ = -W_{56}^- = \frac{L^2A}{4}(2\alpha - 1)(\alpha - 1).
\end{gathered}
$$

Нетрудно проверить, что системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^+ = 0$ не имеют решений при заданных ограничениях $C > 0$, $L > 0$, $\alpha \neq 0, -2$ на структурные константы A, B, C, L и параметр α.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,3}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Нетривиальными компонентами матриц W^+ и W^- согласно (6), (7) являются

$$W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{L^2}{6}\big(A^2 - 2B^2 + 1 - 2C^2\big), \quad W_{22}^+ = W_{55}^- = -\frac{L^2}{6}\big(2A^2 - B^2 - 1 - C^2\big),$$
$$W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{L^2}{6}\big(A^2 + B^2 - 2 + C^2\big), \quad W_{12}^+ = W_{45}^- = \frac{L^2}{4}(2AB - C),$$
$$W_{13}^+ = -W_{46}^- = -\frac{L^2}{4}(2B + AC), \quad W_{23}^+ = -W_{56}^- = \frac{1}{2}L^2 A.$$

Очевидно, что системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ неразрешимы при имеющихся ограничениях $C > 0$, $L > 0$ на структурные константы A, B, C, L.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,4}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Заметим, что в данном базисе согласно (6) и (7) компоненты блоков W^+ и W^- соответственно равны:

$$W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{L^2}{6}(A^2 - 2B^2 - 2C^2), \quad W_{22}^+ = W_{55}^- = -\frac{L^2}{6}(2A^2 - B^2 - C^2),$$
$$W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{L^2}{6}(A^2 + B^2 + C^2), \quad W_{12}^+ = W_{45}^- = \frac{L^2}{4}(C + 2AB),$$
$$W_{13}^+ = -W_{46}^- = -\frac{L^2}{4}(AC + B), \quad W_{23}^+ = -W_{56}^- = \frac{1}{4}L^2 A.$$

Легко заметить, что системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ не имеют решений, удовлетворяющих условиям леммы 4.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$, $\alpha\beta \neq 0$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, $\alpha+\beta \neq -1$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4 и, применяя (6), найдем элементы матрицы W^+ в разложении оператора кривизны.

$$\begin{gathered}W_{11}^+ = -\frac{G^2}{6}(2A^2C^2\alpha^2 - 4A^2C^2\alpha - 1 + 2\beta^2 - \alpha^2 - 4B^2\beta \\ -4AC\alpha B - 4ACB\beta + 2B^2\beta^2 + 2A^2C^2 + 4AC\alpha B\beta + 4ACB + 2A^2\alpha \\ -A^2\alpha^2 2\alpha - \alpha\beta + 2C^2\beta^2 + 2C^2\alpha^2 - \beta - A^2 + 2B^2 - 4C^2\alpha\beta),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}W_{22}^+ = \frac{G^2}{6}(1 - 2A^2C^2\alpha + A^2C^2\alpha^2 + \beta^2 - 2B^2\beta - 2AC\alpha B - 2ACB\beta \\ +B^2\beta^2 + A^2C^2 + 2ACB + 2AC\alpha B\beta + 4A^2\alpha - 2A^2\alpha^2 + \alpha + \alpha\beta + C^2\beta^2 + C^2\alpha^2 \\ -2\beta - 2A^2 + B^2 - 2C^2\alpha\beta - 2\alpha^2),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}W_{33}^+ = \frac{G^2}{6}(\beta^2 - 2A^2C^2\alpha - 2 + A^2C^2\alpha^2 - 2B^2\beta - 2AC\alpha B \\ -2ACB\beta + B^2\beta^2 + A^2C^2 + 2ACB + 2AC\alpha B\beta - 2A^2\alpha + A^2\alpha^2 + \alpha \\ -2\alpha\beta + C^2\beta^2 + C^2\alpha^2 + \beta + A^2 + B^2 - 2C^2\alpha\beta + \alpha^2),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}W_{12}^+ = \frac{G^2}{4}(2A^2C\alpha^2 - 4A^2C\alpha + 2A\alpha B\beta + C\beta \\ -2A\alpha B + 2A^2C - 2AB\beta + 2AB - C\alpha + 2C\alpha^2 - 2C\alpha\beta),\end{gathered}$$

$$W_{13}^+ = \frac{G^2}{4}(\alpha B\beta - 2AC\alpha - \alpha B + AC\alpha\beta + 2B + 2AC - 2B\beta - AC\beta),$$

$$W_{23}^+ = -\frac{AG^2}{4}(\beta - 2)(\alpha - 1),$$

Аналогично, используя (7), заключаем, что $W_{44}^- = W_{11}^+$, $W_{55}^- = W_{22}^+$, $W_{66}^- = W_{33}^+$, $W_{45}^- = W_{12}^+$, $W_{46}^- = -W_{13}^+$ и $W_{56}^- = -W_{23}^+$.

Непосредственно проверяется, что системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ при заданных ограничениях $L > 0$, $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha+\beta \neq -1$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ на структурные константы A, B, C, L и параметры α, β имеют единственное действительное решение

$$A, B, C \in \mathbb{R}, \quad L > 0, \quad \alpha = \beta = 1.$$

Отметим, что для данного набора структурных констант тензор Вейля W тривиален.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geqslant 0$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Используя формулы (6), (7), найдем компоненты W^+ и W^-:

$$\begin{gathered}
W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{L^2}{6C^2}(A^2C^2 - C^2\alpha\beta - 2B^2C^2 + C^2\alpha^2 + 1 - 2C^4 + C^2),\\
W_{22}^+ = W_{55}^- = -\frac{L^2}{6C^2}(2A^2C^2 + C^2\alpha\beta - B^2C^2 - C^2\alpha^2 + 2 - C^4 - C^2),\\
W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{L^2}{6C^2}(A^2C^2 + 2C^2\alpha\beta + B^2C^2 - 2C^2\alpha^2 + 1 + C^4 - 2C^2),\\
W_{12}^+ = W_{45}^- = \frac{L^2}{4C}(2ACB + \alpha - C^2\alpha - 2\beta + 2C^2\beta),\\
W_{13}^+ = -W_{46}^- = -\frac{L^2}{4}(-B\beta + AC + 2\alpha\, B), \quad W_{23}^+ = -W_{56}^- = \frac{L^2}{4C}(-B - AC\beta + 2\, AC\alpha).
\end{gathered}$$

Решаем системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L и параметров α, β. Учитывая, что $C > 0$, $L > 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geqslant 0$, получаем одно действительное решение

$$A = B = 0, \quad C = 1, \quad L > 0, \quad \alpha = \beta > 0.$$

Заметим, что для данного набора структурных констант тензор Вейля $W = 0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,7}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 4 и найдем компоненты блоков W^+ и W^- в разложении оператора кривизны, применяя равенства (6) и (7):

$$\begin{gathered}
W_{11}^+ = W_{44}^- = \frac{1}{6}(B^2 + C^2 + 2A^2 - 2D^2 - 2F^2 + 3AB),\\
W_{22}^+ = W_{55}^- = \frac{1}{6}(B^2 - 2C^2 + 2A^2 + D^2 + F^2 + 3AB),\\
W_{33}^+ = W_{66}^- = \frac{1}{6}(C^2 - 2B^2 - 4A^2 + D^2 + F^2 - 6AB),\\
W_{12}^+ = \frac{1}{4}(2CD - BF), \quad W_{13}^+ = -\frac{1}{4}(2BD + 3AD + CF), \quad W_{23}^+ = \frac{1}{4}C(2B + 3A),\\
W_{45}^- = \frac{1}{4}(2CD + BF), \quad W_{46}^- = -\frac{1}{4}(2BD - 3AD - CF), \quad W_{56}^- = \frac{1}{4}C(2B - 3A).
\end{gathered}$$

Нетрудно заметить, что системы уравнений $W^+ = 0$ и $W^- = 0$ не разрешимы при заданных ограничениях на структурные константы $A > 0$, $B > 0$, $F > 0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$, $-1 < \beta \leqslant 1$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Тогда, учитывая (6), получаем:

$$\begin{gathered}
W_{11}^+ = \frac{1}{6}(C^2 + B^2 + 2A^2\beta + 4F^2\beta - 2F^2\beta^2 - 2F^2 - 2D^2 + 3AB\beta),\\
W_{22}^+ = \frac{1}{6}(-2C^2 + B^2 + 2A^2\beta - 2F^2\beta + F^2\beta^2 + F^2 + D^2 + 3AB),
\end{gathered}$$

$$W_{33}^{+}=\frac{1}{6}(C^2-2B^2-4A^2\beta-2F^2\beta+F^2\beta^2+F^2+D^2-3AB\beta-3AB),$$
$$W_{12}^{+}=\frac{1}{4}(2CD+AF\beta^2+AF-BF+BF\beta-2AF\beta),$$
$$W_{13}^{+}=\frac{1}{4}(-2BD-AD-CF+CF\beta-2\beta AD),\quad W_{23}^{+}=\frac{1}{4}C(2B+\beta A+2A).$$

Очевидно, что система уравнений $W^+=0$ не имеет решений при заданных ограничениях $A>0$, $B>0$, $-1<\beta\leqslant 1$.

Применяя равенства (7), находим:

$$W_{44}^{-}=\frac{1}{6}(C^2+B^2+2A^2\beta+4F^2\beta-2F^2\beta^2-2F^2-2D^2-3AB\beta),$$
$$W_{55}^{-}=\frac{1}{6}(-2C^2+B^2+2A^2\beta-2F^2\beta+F^2\beta^2+F2+D^2-3AB),$$
$$W_{66}^{-}=\frac{1}{6}(C^2-2B^2-4A^2\beta-2F^2\beta+F^2\beta^2+F^2+D^2+3AB\beta+3AB),$$
$$W_{45}^{-}=\frac{1}{4}(2CD+AF\beta^2+AF+BF-BF\beta-2AF\beta),$$
$$W_{46}^{-}=\frac{1}{4}(-2BD+AD+CF-CF\beta+2\beta AD),\quad W_{56}^{-}=\frac{1}{4}C(2B-\beta A-2A).$$

Решая систему уравнений $W^-=0$ относительно структурных констант A, B, C, D, F и параметра β, получаем следующие действительные решения:

1. $B=2A>0$, $C=D=0$, $F\in\mathbb{R}$, $\beta=1$;

2. $B=A>0$, $C=D=0$, $F\in\mathbb{R}$, $\beta=1$.

Отметим, что для первого набора структурных констант тензор Вейля имеет следующие ненулевые компоненты: $W_{1212}=W_{1234}=W_{3124}=W_{2424}=W_{3434}=A^2$, $W_{1414}=W_{1423}=W_{2323}=-2A^2$. Для второго набора структурных констант таковыми являются: $W_{1212}=W_{1234}=W_{3124}=W_{2424}=W_{3434}=\frac{1}{2}A^2$, $W_{1414}=W_{1423}=W_{2323}=-A^2$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$, $\alpha>0$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Применяя (6) и (7) в данном базисе, находим:

$$W_{11}^{+}=\frac{1}{6D^2}(B^2D^2+C^2D^2+2A^2\alpha^2D^2-2F^2D^2+A^2D^4-2A^2+A^2D^2+3BA\alpha D^2),$$
$$W_{22}^{+}=\frac{1}{6D^2}(B^2D^2-2C^2D^2+2A^2\alpha^2D^2+F^2D^2-2A^2D^4+A^2+A^2D^2+3BA\alpha\, D^2),$$
$$W_{33}^{+}=-\frac{1}{6D^2}(2B^2D^2-C^2D^2+4A^2\alpha^2D^2-A^2-A^2D^4+2A^2D^2+6BA\alpha D^2-F^2D^2),$$
$$W_{12}^{+}=\frac{1}{4D}(2CFD-AB+AD^2B),\quad W_{13}^{+}=\frac{1}{4D}(2BFD+3A\alpha FD+AC),$$
$$W_{23}^{+}=\frac{1}{4}(2BC-ADF+3CA\alpha),$$

$$W_{44}^{-}=\frac{1}{6D^2}(B^2D^2+C^2D^2+2\,A^2\alpha^2D^2-2F^2D^2+A^2D^4-2A^2+A^2D^2-3BA\alpha D^2),$$
$$W_{55}^{-}=\frac{1}{6D^2}(B^2D^2-2C^2D^2+2A^2\alpha^2D^2+F^2D^2-2A^2D^4+A^2+A^2D^2-3BA\alpha D^2),$$
$$W_{33}^{-}=-\frac{1}{6D^2}(2B^2D^2-C^2D^2+4A^2\alpha^2D^2-A^2-A^2D^4+2A^2D^2-6BA\alpha D^2-F^2D^2),$$
$$W_{45}^{-}=\frac{1}{4D}(2CFD+AB-AD^2B),\quad W_{46}^{-}=\frac{1}{4D}(-2BFD+3A\alpha FD+AC),$$
$$W_{56}^{-}=\frac{1}{4}(2BC+ADF-3CA\alpha).$$

Нетрудно заметить, что система уравнений $W^+ = 0$ не имеет решений при заданных ограничениях $A > 0$, $B > 0$, $D > 0$, $\alpha > 0$, а действительными решениями системы уравнений $W^- = 0$ являются:

1. $B = \alpha A > 0$, $C = F = 0$, $D = 1$;

2. $B = 2\alpha A > 0$, $C = F = 0$, $D = 1$.

Отметим, что для первого набора структурных констант тензор Вейля имеет следующие ненулевые компоненты: $W_{1212} = W_{1234} = W_{3124} = W_{2424} = W_{3434} = \frac{1}{2}A^2\alpha^2$, $W_{1414} = W_{1423} = W_{2323} = -A^2$. Для второго набора структурных констант таковыми являются $W_{1212} = W_{1234} = W_{3124} = W_{2424} = W_{3434} = A^2\alpha^2$, $W_{1414} = W_{1423} = W_{2323} = -2A^2\alpha^2$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,12}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Из (6) заключаем, что нетривиальными элементами матрицы W^+ являются:

$$
\begin{gathered}
W_{11}^+ = \frac{1}{6}(D^2 + C^2 - 2F^2 - 2G^2 + 2DC),\\
W_{22}^+ = \frac{1}{6}(-2D^2 + C^2 + F^2 + G^2 - DC + 3AC + 3AD),\\
W_{33}^+ = \frac{1}{6}(D^2 - 2C^2 + F^2 + G^2 - DC - 3AC - 3AD),\\
W_{12}^+ = \frac{1}{4}(2FD + FC + BG - AF), \quad W_{13}^+ = \frac{1}{4}(-AG - BF - GD - 2GC),\\
W_{23}^+ = \frac{1}{2}B(D + C).
\end{gathered}
$$

Легко проверить, что система уравнений $W^+ = 0$ не имеет решений, удовлетворяющих условиям леммы 4.

Применяя (7), находим компоненты блока W^- в разложении оператора кривизны:

$$
\begin{gathered}
W_{44}^- = \frac{1}{6}(D^2 + C^2 - 2F^2 - 2G^2 + 2DC),\\
W_{55}^- = \frac{1}{6}(-2D^2 + C^2 + F^2 + G^2 - DC - 3AC - 3AD),\\
W_{66}^- = \frac{1}{6}(D^2 - 2C^2 + F^2 + G^2 - DC + 3AC + 3AD),\\
W_{45}^- = \frac{1}{4}(2FD + FC + BG + AF), \quad W_{46}^- = \frac{1}{4}(-AG + BF + GD + -2GC),\\
W_{56}^- = -\frac{1}{2}B(D + C).
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений $W^- = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D, F, G, получаем следующие действительные решения:

$$
A > 0, \quad B \in \mathbb{R}, \quad C = -D, \quad D > 0, \quad F = G = 0.
$$

Отметим, что для указанного набора структурных констант тензор Вейля W тривиален. Тем самым доказательство теоремы завершено. $\triangleright$

Литература

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна.—М.: Мир, 1990.—704 с.
2. *Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M.* Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry // Proc. Roy. Soc. London Ser. A.—1978.—Vol. 362, № 1711.—P. 425–461.

3. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
4. *Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // J. of Math. Sciences.—2007.—Vol. 146, № 6.—P. 6313–6390.
5. *Алексеевский Д. В., Кимельфельд Б. Н.* Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Мат. заметки.—1978.—Т. 24, № 1.— С. 103–110.
6. *Арсеньева О. Е.* О геометрии конформно-полуплоских обобщенных эрмитовых поверхностей // Успехи мат. наук.—1997.—Т. 52, № 6.—С. 149–150.
7. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Сер. мат.—1963.—Т. 32, № 1.—С. 144–123.
8. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды.—2008.—Т. 11, № 2.—С. 115–147.
9. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды.—2009.—Т. 12, № 1.—С. 40–116.
10. *Singer I. M., Thorpe J. A.* The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analysis.—1969.—P. 355–365.
11. *Milnor J.* Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in Math.—1976.—Vol. 21.—P. 293–329.

Статья поступила 26 октября 2010 г.

Гладунова Олеся Павловна
Алтайский государственный университет,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 656049, Барнаул, ГСП-1, пр. Ленина, 61
E-mail: gladunova_olesya@mail.ru

Родионов Евгений Дмитриевич
Алтайская государственная педагогическая академия,
профессор кафедры геометрии и мат. методов в экономике
РОССИЯ, 656031, Барнаул, ул. Молодежная, 55
E-mail: edr2002@mail.ru

Славский Виктор Владимирович
Алтайская государственная педагогическая академия,
профессор кафедры геометрии и мат. методов в экономике
РОССИЯ, 656031, Барнаул, ул. Молодежная, 55
E-mail: slavsky@uriit.ru,slavsky2004@mail.ru

ON HALF CONFORMALLY FLAT 4-DIMENSIONAL LIE GROUPS

Gladunova O. P., Rodionov E. D., Slavskii V. V.

Classification of half conformally flat Lie algebras of real four-dimensional Lie groups with left-invariant Riemannian metrics is given.

Key words: Lie algebras and Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, half conformally flat Lie groups.