Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 2, С. 58–62

УДК **514.74**

ОБОБЩЕННЫЕ ТЕРНАРНЫЕ КОЛЬЦА ХОЛЛА С УЛУЧШЕННОЙ СМЕЖНОСТЬЮ

Шатохин Н. Л.

В работе изучаются конгруенции произвольных обобщенных тернарных колец Холла со смежностью, которые индуцируются АН-морфизмами. Описаны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы элементы кольца вступали в отношения улучшенной смежности. Введены условия, при выполнении которых фактор-алгебра по отношению к улучшенной смежности является тернарным кольцом Холла со смежностью.

Ключевые слова: проективная плоскость, аффинная плоскость, ельмслевовы плоскости, тернар, гомоморфизмы, изотопии, смежные точки, смежные прямые.

В статье рассматриваются конгруенции π произвольных обобщенных тернарных колец Холла, со смежностью **GHTR** [3, определение 6]), которые индуцируются их АН-морфизмами.

Эти конгруенции определяют на множестве T произвольного **GHTR** отношения эквивалентности $\sim_\pi$, которое является подмножеством отношения смежности $\sim$. Следуя [1, 2], такие отношения будем называть улучшенной смежностью.

Понятия обобщенного тернарного кольца Холла со смежностью и АН-морфизма таких колец описаны в статьях [3, 4].

Пусть φ — невырожденный АН-морфизм **GHTR** $T_1 = \langle T; t, 0, 1, \sim\rangle$ в **GHTR** в $T_1' = \langle T'; t, 0, 1, \sim\rangle$.

Определение 1. Отношение эквивалентности π, заданное условием

$$(\forall\, a, b \in T) \quad a\pi b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b), \tag{1}$$

называется *отношением конгруенции* **GHTR** T_1, индуцированным АН-морфизмом φ (в обозначении $\pi(\varphi)$).

Укажем некоторые простейшие свойства конгруенций $\pi(\varphi)$.

Предложение 1. *Для произвольного отношения конгруентности $\pi(\varphi)$ некоторого* **GHTR** T_1 *справедливо включение $\pi \subseteq\sim$.*

$\lhd$ Справедливость предложения 1 следует из [4, теорема 1]. $\rhd$

Учитывая предложение 1, в дальнейшем вместо записи $a\pi b$ будем писать $a \sim_{\pi(\varphi)} b$.

Теорема 1. *Разбиение множества T некоторого* **GHTR** T_1, *определяемое конгруенцией $\pi(\varphi)$, однозначно задается любым своим элементом.*

$\lhd$ Пусть $[a]_{\pi(\varphi)}$ — произвольный класс фактор-множества $T/\pi(\varphi)$ с представителем a. Как известно [3, теорема 4], алгебры $\langle T; +\rangle$ и $\langle T'; +\rangle$ являются лупами с нейтралом 0. Рассмотрим эти лупы.

Используя условие (1) из [3] и предложение 1 из [4], имеем, что $c = a + b = t(1, a, b)$, а следовательно, $\varphi(c) = \varphi(a + b) = \varphi(t(1, a, b)) = t(\varphi(1), \varphi(a), \varphi(b)) = t(1, \varphi(a), \varphi(b)) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Таким образом, $\varphi(a + b) = \varphi(c) = \varphi(a) + \varphi(b)$, а это означает, что АН-морфизм φ является гомоморфизмом лупы $\langle T; +\rangle$ в лупу $\langle T'; +\rangle$.

Зафиксируем элемент $a \in T$ и рассмотрим совокупность уравнений $x + a = b$ для произвольного b из $[a]^{\pi(\varphi)}$. Предположим, что для некоторого элемента b это уравнение имеет корень x_0. Тогда $\varphi(x_0) + \varphi(a) = \varphi(b)$, а значит, так как $\varphi(a) = \varphi(b)$ получаем, что $\varphi(x_0) = 0$. Отсюда, с учетом предложения 1 из [4], имеем, что $\varphi(x_0) = 0 = \varphi(0)$, а значит, $x_0 \in [0]_{\pi(\varphi)}$. Обратно, если $x_0 \in [0]_{\pi(\varphi)}$ и $x_0 + a = b$, то $\varphi(b) = \varphi(x_0 + a) = \varphi(x_0) + \varphi(a) = 0 + \varphi(a) = \varphi(a)$. Таким образом, $\varphi(a) = \varphi(b)$, а значит, $b \in [a]_{\pi(\varphi)}$. Поэтому учитывая, что в лупе $\langle T; +\rangle$ для любых a и b из T уравнение $x + a = b$ однозначно разрешимо и при фиксированном a, в силу алгебраичности операции «+», различным b соответствуют различные корни этого уравнения получаем, что при каждом фиксированном a между множеством решений уравнения $x + a = b$, составляющим класс $[0]_{\pi(\varphi)}$, и элементами произвольного класса $[a]_{\pi(\varphi)}$ существует биективное соответствие. Кроме этого класс $[a]_{\pi(\varphi)}$ однозначно определяется любым своим представителем и классом $[0]_{\pi(\varphi)}$. $\rhd$

Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Мощности любых двух классов $[a]_{\pi(\varphi)}$ и $[b]_{\pi(\varphi)}$ фактор-множества $T/\pi(\varphi)$ одинаковы.*

Следствие 2. *Элементы a и b из множества T некоторого* **GHTR** *в том и только том случае принадлежат одному классу фактор-множества $T/\pi(\varphi)$, когда корень уравнения $x + a = b$ принадлежит классу $[0]_{\pi(\varphi)}$.*

Рассуждениями, аналогичными тем, которые были проведены при доказательстве теоремы 1, можно установить справедливость следующего утверждения.

Следствие 3. *Элементы a и b множества T некоторого* **GHTR** *в том и только том случае принадлежат одному классу фактор-множества $T/\pi(\varphi)$, когда корень уравнения $a + x = b$ принадлежит классу $[0]_{\pi(\varphi)}$.*

Следствие 4. *Элементы a и b множества T некоторого* **GHTR** *в том и только том случае принадлежат одному классу фактор-множества $T/\pi(\varphi)$, когда корень уравнения $a + x = b$ принадлежит классу $[0]_{\pi(\varphi)}$.*

Следствие 5. *Пусть $\pi(\varphi)$ — произвольная конгруенция некоторого* **GHTR** *T_1 и пусть множество $D_{\pi(\varphi)} = [0]_{\pi(\varphi)}$. Тогда алгебра $\langle D_{\pi(\varphi)}; +\rangle$ — подлупа лупы $\langle D; +\rangle$.*

$\lhd$ Пусть $d_1, d_2 \in D_{\pi(\varphi)}$. Тогда $\varphi(d_1) = \varphi(d_2) = \varphi(0) = 0$, а, следовательно, $\varphi(d_1 + d_2) = \varphi(d_1) + \varphi(d_2) = 0 = \varphi(0)$, откуда $(d_1 + d_2) \in D$. $\rhd$

Предложение 2. *Рассмотрим некоторое* **GHTR** *$T_1 = \langle T; t, 0, 1, \sim\rangle$ и пусть $a, b \in T$ и $a \nsim 0$. Тогда элементы a и b в том и только том случае принадлежат одному классу фактор-множества $T/\pi(\varphi)$, когда корень уравнения $x \cdot a = b$ принадлежит классу $[1]_{\pi(\varphi)}$.*

$\lhd$ Пусть $a \nsim 0$ и $x_0 \cdot a = b$ — верное равенство. Тогда, учитывая (3) из [3], имеем $b = x_0 \cdot a = t(x_0, a, 0)$. Отсюда $\varphi(b) = \varphi(x_0 \cdot a) = \varphi(t(x_0, a, 0)) = t(\varphi(x_0), \varphi(a), \varphi(0)) = t(\varphi(x_0), \varphi(a), 0) = \varphi(x_0) \cdot \varphi(a)$. Итак, $\varphi(x_0) \cdot \varphi(a) = \varphi(b)$ и, в силу теоремы 1 из [4], $\varphi(a) \nsim \varphi(0)$, следовательно, $\varphi(a) \nsim 0$. Отсюда, если $x_0 \in [1]_{\pi(\varphi)}$, то $\varphi(x_0) = 1$ и, следовательно, $\varphi(a) = \varphi(b)$. С другой стороны, если $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(x_0) \cdot \varphi(a) = \varphi(a) = 1 \cdot \varphi(a)$, следовательно, из теоремы 4 статьи [3] вытекает, что $\varphi(x_0) = 1$. Последнее означает, что $x_0 \in [1]_{\pi(\varphi)}$. $\rhd$

Аналогично устанавливается справедливость следующего утверждения.

Предложение 3. *Пусть $a \nsim 0$. Элементы a и b тогда и только тогда принадлежат одному классу фактор-множества $T/\pi(\varphi)$, когда корень уравнения $a \cdot x = b$ принадлежит классу $[1]_{\pi(\varphi)}$.*

Теорема 2. *Множество $\{\pi_i(\varphi)\}$ отношений конгруентности $\pi(\varphi)$* **GHTR** *T_1, тогда и только тогда линейно упорядочено по включению, когда для любых i и j $(i \neq j)$ $[0]_{\pi_i(\varphi)} \subseteq [0]_{\pi_j(\varphi)}$ или $[0]_{\pi_j(\varphi)} \subseteq [0]_{\pi_j(\varphi)}$.*

$\lhd$ Предположим, что множество $\{\pi_i(\varphi)\}$ — представляет собой некоторую совокупность отношений конгруентности **GHTR** T_1 и для любых i и j $(i \neq j)$ имеем, что $[0]_{\pi_i(\varphi)} \subseteq [0]_{\pi_j(\varphi)}$. Тогда для любого $b \in [a]_{\pi_i(\varphi)}$, используя следствие 2, имеем, что корень уравнения $x + a = b$ принадлежит $[0]_{\pi_i(\varphi)}$, а значит,— и $[0]_{\pi_j(\varphi)}$. Откуда в силу того же следствия $b \in [a]_{\pi_j(\varphi)}$, а поэтому $[a]_{\pi_i(\varphi)} \subseteq [a]_{\pi_j(\varphi)}$. Справедливость обратного утверждения очевидна. $\rhd$

Из предложения 1 следует, что любые два элемента принадлежащие одному классу фактор-множества $T/\pi(\varphi)$ смежны и поэтому элементы любых двух различных классов либо смежны, либо попарно несмежны друг другу. Учитывая это, дадим следующее определение.

Определение 2. Пусть $[a]_{\pi(\varphi)}$ и $[b]_{\pi(\varphi)}$ элементы фактор-множества $T/\pi(\varphi)$. Тогда $[a]_{\pi(\varphi)}$ будем называть *смежным* $[b]_{\pi(\varphi)}$ (и обозначать $[a]_{\pi(\varphi)} \sim [b]_{\pi(\varphi)}$), если найдутся такие элементы $a' \in [a]_{\pi(\varphi)}$ и $b' \in [b]_{\pi(\varphi)}$, что $a' \sim b'$.

Очевидно, что таким образом определенное на элементах фактор-множества $T/\pi(\varphi)$ отношение смежности является отношением эквивалентности.

Рассмотрим теперь отношение эквивалентности π определенное на множестве T произвольного **GHTR** $T_1 = \langle T; t, 0, 1, \sim \rangle$, удовлетворяющее условию

$$(\forall\, a,\, b \in T)\ a\pi b \ \Rightarrow\ a \sim b. \tag{2}$$

Примерами таких отношений являются конгруенции $\pi(\varphi)$ заданные в (1).

Учитывая, что из условия $c_1 \sim_\pi c_2$ следует, что $c_1 \sim c_2$, а обратное, вообще говоря, неверно, введем следующее определение.

Определение 3. Всякое отношение $\sim_\pi$ отличное от отношения смежности $\sim$ будем называть отношением *улучшенной смежности* на множестве-носителе T произвольного **GHTR** T_1.

Замечание 1. Если элементы $a, b \in T$ таковы, что $a \sim b$, но $a \nsim_\pi b$, то в дальнейшем будем писать $a \sim b$.

Пусть T/π — фактор-множество множества T по отношению π, а t_π — тернарная операция, определенная на этом множестве условием

$$t(a, b, c) = d \ \Rightarrow\ t_\pi([a]_\pi, [b]_\pi, [c]_\pi) = [d]_\pi. \tag{3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Тернарная алгебра $\langle T/\pi; t + \pi, [0]_\pi, [1]_\pi \rangle$, определенная на структуре некоторого* **GHTR** *в том и только том случае является* **TR** [3, *определения* 1–3] *с нулем $[0]_\pi$ и единицей $[1]_\pi$, когда отношение улучшенной смежности $\sim_\pi$ будет конгруенцией операций t и $t^r(a, b, c)$* [3, *замечание* 1].

Определение 4. Пусть $\sim_\pi$ — отношение улучшенной смежности на множестве-носителе T произвольного **GHTR** T_1. Тогда отношение $\sim_\pi$, которое является конгруенцией операций t, $t^r(a, b, c)$, $t^l(a, b; c, d)$ и пары операций $\{t^{mS}, t^{rS}\}$ [3, (5, 10, 11)], будем называть улучшенной смежностью кольца T_1, если выполняются следующие условия (аксиомы улучшенной смежности **GHTR**):

TU1. $a_1 \sim_\pi b_1$, $a_2 \sim b_2$, $t(a_1, a_2, a_3) \sim_\pi t(b_1, b_2, b_3) \Rightarrow (\exists\, a'_i, b'_i)$ $(i \in \{1, 2, 3\})$: $a_1 \sim a'_1$, $a'_1 \sim_\pi b'_1$, $a_i \sim_\pi a'_i$, $b_i \sim_\pi b'_i$, $(i \in \{2, 3\})$, $(a'_1, a'_2, a'_3) \sim_\pi t(b'_1, b'_2, b'_3)$.

TU2. $a_1 \sim b_1$, $a_i \sim_\pi b_i$, $(i \in \{2, 3\})$, $t(a_1, a_2, a_3) = a_4 \& t(b_1, b_2, b_3) = b_4 \Rightarrow (\exists\, a'_i, b'_i)$ $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$ $a_2 \sim a'_2$, $a_i \sim_\pi a'_i$, $b_j \sim_\pi b'_j$, $a'_k \sim_\pi b'_k$, $t(a'_i, a'_2, a'_3) = a'_4 \& t(b'_1, b'_2, b'_3) = b'_4$.

Понятно, что аксиомы **TU1** и **TU2** для $\sim_\pi$, совпадающих с отношением равенства на множестве T, выполняются в любом **GHTR**, и поэтому они играют существенную роль лишь в случае, когда $\sim_\pi \subset \sim$. Справедливо утверждение.

Теорема 3. *Пусть дано некоторое* **GHTR** $T_1 = \langle T; t, 0, 1, \sim\rangle$. *Тогда фактор-алгебра* $T_1/\pi = \langle T/\pi; t_\pi, [0]_\pi, [1]_\pi, \sim\rangle$ *в том и только том случае является некоторым* **GHTR**, *если отношение* $\sim_\pi$ *является улучшенной смежностью кольца* T_1.

$\lhd$ Пусть отношение $\sim_\pi$ удовлетворяет **TU1, TU2** и (13–16) из [3], а тернарная операция t_π определена условием (3). Тогда согласно предложению 4 тернарная алгебра $\langle T/\pi; t_\pi, [0]_\pi, [1]_\pi\rangle$ является некоторым тернарным кольцом **TR** с нулем $[0]_\pi$ и единицей $[1]_\pi$, и поэтому для доказательства теоремы остается установить справедливость аксиом **TH1** и **TH2** из [3].

Рассмотрим уравнение $t_\pi(x, [a]_\pi, [b]_\pi) = t_\pi(x, [x]_\pi, [d]_\pi)$ и предположим, что $[a]_\pi \nsim [c]_\pi$. Тогда для любых элементов $a' \in [a]_\pi$ и $c' \in [c]_\pi$ имеем, что $a' \nsim c'$. Отсюда следует, что уравнение $t(x, a', b') = t(x, c', d')$ однозначно разрешимо в **GHTR** T_1, а значит, учитывая (3) и соотношение (15) из [3], получаем, что уравнение $t_\pi(x, [a]_\pi, [b]_\pi) = t_\pi(x, [c]_\pi, [d]_\pi)$ однозначно разрешимо в алгебре $\langle T/\pi; t_\pi\rangle$.

Пусть теперь уравнение $t_\pi(x, [a]_\pi, [b]_\pi) = t_\pi(x, [c]_\pi, [d]_\pi)$ имеет единственное решение $[x_0]_\pi$. Докажем, что тогда $[a]_\pi \nsim [c]_\pi$. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $[x_0]_\pi$ — единственное решение данного уравнения и $[a]_\pi \sim [c_\pi]$. Тогда, если $[a]_\pi = [c]_\pi$, то в силу **T1** из [3] имеем, что $[b]_\pi = [d]_\pi$, а значит, рассматриваемое уравнение удовлетворяется на множестве T/π тождественно. Если же $[a]_\pi \sim [c]_\pi$, но $[a]_\pi \neq [c]_\pi$, то для любых $a' \in [a]_\pi$ и $c' \in [c]_\pi$ имеем, что $a' \sim c'$. Поэтому с учетом **TU1** имеем, что исходное уравнение имеет, по крайней мере, еще одно решение $[x_1]_\pi \neq [x_0]_\pi$. Таким образом, в алгебре T_1/π выполняется **TH1**.

Аналогичными рассуждениями, с учетом **TU2**, можно проверить, что в T_1/π справедлива аксиома **TH2**. Следовательно, алгебра T_1/π будет некоторым **GHTR**. Нетрудно установить справедливость и обратного утверждения теоремы. $\rhd$

Замечание 2. Из вышеизложенного очевидно следует, что исходное **GHTR** T_1 и **GHTR** T_1/π, полученное при факторизации по отношению $\sim_\pi$, будут иметь один и тот же канонический гомоморфный образ [3, определение 7].

Теорема 4. *Пусть* φ — *невырожденный* AH-*морфизм* **GHTR** $T_1 = \langle T; t, 0, 1, \sim\rangle$ *в* **GHTR** $T'_1 = \langle T'; t, 0, 1, \sim\rangle$. *Тогда образ* $\varphi(T_1)$ *кольца* T_1 *в том и только том случае является некоторым* **GHTR**, *если конгруенция* $\pi(\varphi)$, **GHTR** T_1 *индуцированная* AH-*морфизмом* φ, *является улучшенной смежностью кольца* T_1.

$\lhd$ Справедливость данного утверждения вытекает из того, что гомоморфный образ $\varphi(T_1)$ **GHTR** $T_1 = \langle T; t, 0, 1, \sim\rangle$, в случае произвольного невырожденного AH-морфизма φ, изоморфен фактор-алгебре $T_1/\pi(\varphi) = \langle T/\pi(\varphi);\, t_{/\pi(\varphi)}, [0]_{/\pi(\varphi)}, [1]_{/\pi(\varphi)}, \sim\rangle$. $\rhd$

Литература

1. *Artman B.* Hvarphielmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen // Math. Z.—1969.—V. 112.—P. 163–180.
2. *Drake D. A.* Affine Hvarphielmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaften // Math. Z.—1975.—V. 143.—P. 15–26.
3. *Шатохин Н. Л.* Обобщенные тернарные кольца Холла со смежностью // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—Ростов-на-Дону, 2008.—№ 3.—В печати.
4. *Шатохин Н. Л.* AH-морфизмы обобщенных тернарных колец Холла со смежностью // Межвуз. сб. научн. тр. «Исследования по краевым задачам комплексного анализа и диф. уравнениям».—Смоленск: СмолГУ, 2007.—Вып. 8.—С. 100–104.

Статья поступила 22 октября 2007 г.

Шатохин Николай Леонидович
Смоленский государственный университет
Смоленск, 214036, РОССИЯ
E-mail: `shatohinn@mail.ru`