Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 2, С. 46–57

УДК **517.955**

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Ф. Тедеев

В данной работе рассматриваются задачи Коши ньютоновской упругой фильтрации и изучается поведение разности решений уравнений при разных режимах.

Ключевые слова: слабое решение, задача Коши, локальная оценка, оценка градиента.

1. Введение

Пусть $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $N \leqslant 1$, $S_T \equiv \mathbb{R}^N x(0,T)$, $0 < T < \infty$, $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < \rho\}$, $\rho > 0$.

Рассмотрим в области S_T задачу Коши для уравнения ньютоновской упругой фильтрации

$$\begin{gathered} u_\tau - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0, \quad p > 2, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{gathered} \tag{1}$$

Вместе с уравнением (1) будем рассматривать задачу Коши для уравнения:

$$\begin{gathered} v_\tau - \operatorname{div}(|Dv|^{q-2}Dv) = 0, \quad q > 2, \\ v(x,0) = v_0(x). \end{gathered} \tag{2}$$

Для определенности будем предполагать $p > q$.

В данной работе оценивается разность $w = u - v$ решений (1) и (2) в некоторой норме $L_{\ae}(B_\rho)$ в зависимости от близости начальных данных и близости p и q. Здесь всюду рассматриваются только положительные решения уравнений (1) и (2).

В доказательстве основной теоремы используется метод предложенный в [1], а также некоторые результаты работы [2].

2. Некоторые вспомогательные результаты и обозначения

Обозначим через

$$\begin{aligned} &X_{\mathrm{loc}}(S_T) \equiv L^p_{\mathrm{loc}}(0,T; W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)), \quad Y_{\mathrm{loc}}(S_T) \equiv L^q_{\mathrm{loc}}(0,T; W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)), \\ &\overset{0}{X}_{\mathrm{loc}}(S_T) \equiv \Big\{\varphi \in X_{\mathrm{loc}}(S_T) : (\exists\, r > 0)\ \varphi \in L^p_{\mathrm{loc}}(0,T; \overset{0}{W}{}^{1,p})(|x| < r)\Big\}, \\ &\overset{0}{Y}_{\mathrm{loc}}(S_T) \equiv \Big\{\varphi \in Y_{\mathrm{loc}}(S_T) : (\exists\, r > 0)\ \varphi \in L^q_{\mathrm{loc}}(0,T; \overset{0}{W}{}^{1,q})(|x| < r)\Big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Измеримую функцию $u\,:\,S_T\to\mathbb{R}^+$ назовем *слабым решением* уравнения (1), если для любого $\xi\in\overset{0}{X}(S_T)$ выполняется соотношение

$$\iint\limits_{S_T}\{u_\tau\xi+|Du|^{p-2}\,Du\,D\xi\}\,dx\,d\tau=0. \tag{4}$$

Аналогично определяется слабое решение для уравнения (2).

Если $|Du|\in L^p_{\text{loc}}(S_T)$, $u_\tau\in L^1_{\text{loc}}(S_T)$, то приведенное определение слабого решения уравнения (1) эквивалентно следующему:

Функция u — является *слабым решением* уравнения (1), если для любых $\psi\in X_{\text{loc}}(S_T)$ и $\xi\in C_0^\infty(S_T)$ имеет место равенство

$$\iint\limits_{S_T}\left\{u_\tau(\psi-u)_+\xi+|Du|^{p-2}\,DuD[(\psi-u)_+\xi]\right\}\,dx\,d\tau=0, \tag{5}$$

где

$$(\psi-u)_+=\begin{cases}0, & \psi\leqslant u,\\ \psi-u, & \psi>u.\end{cases}$$

Доказательство эквивалентности определений (4) и (5) приводится в [1] для случая $1<p<2$. Для случая $p>2$ доказательство полностью повторяется и мы не будем его приводить. Пусть $x\to\psi(x)$ — гладкая срезающая функция в $B_{(1+\sigma)\rho}$, $\sigma>0$, такая, что $\varsigma(x)=1$, $x\in B\rho$, $\varsigma(x)=0$, $|x|\geqslant(1+\sigma)\rho$, $0\leqslant\varsigma(x)\leqslant1$, $|D\varsigma|\leqslant(\sigma\rho)^{-1}$.

Полагая в равенстве (5) $\xi=\varsigma^p$, мы получим

$$\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left\{u_\tau(\psi-u)_+\varsigma^p+|Du|^{p-2}DuD[(\psi-u)_+\varsigma^p]\right\}\,dx\,d\tau=0. \tag{6}$$

Здесь всюду мы будем предполагать выполненными условия

$$c_1u(x,t)\leqslant\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\leqslant c_2u(x,t), \tag{7}$$

$$c_1v(x,t)\leqslant\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\leqslant c_2v(x,t), \tag{8}$$

c_1 и c_2 — положительные постоянные.

В дальнейшем все несущественные постоянные мы будем обозначать одной и той же буквой c.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Если u — решение уравнения* (1) *и, кроме того,*

$$\sup_{0<t\leqslant T}\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}u^pdx=M_u(\rho)<\infty\ \ \text{при } \rho>0,$$

то имеет место оценка

$$\int\limits_{B\rho}|Du|^p\,dx\leqslant c\rho^{-p}M_u(2\rho). \tag{9}$$

◁ Положив в (6) $\psi = 2u$, получим

$$\int_s^t \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ u_\tau u\varsigma^p + |Du|^{p-2} DuD(u\varsigma^p) \right\} \, dx\, d\tau = 0,$$

отсюда

$$\int_s^t \int_{R^N} \left\{ u_\tau u\varsigma^p + |Du|^p \varsigma^p + p|Du|^{p-2} Duu\varsigma^{p-1} D\varsigma \right\} \, dx\, d\tau = 0.$$

Продифференцировав последнее равенство по t и учитывая (7) получим

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \varsigma^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |Du|^p \varsigma^p \, dx - p \int_{\mathbb{R}^N} |Du|^{p-1} \varsigma^{p-1} u |D\varsigma| \, dx \leqslant 0.$$

Опуская положительное слагаемое в левой части, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^p \varsigma^p \, dx \leqslant p \int_{\mathbb{R}^N} |Du|^{p-1} \varsigma^{p-1} u |D\varsigma| \, dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |Du|^p \varsigma^p \, dx + c \int_{R^N} u^p |D\varsigma|^p \, dx,$$

откуда

$$\int_{B\rho} |Du|^p \, dx \leqslant c\rho^{-p} \int_{B2\rho} u^p \, dx. \quad \triangleright$$

Аналогично для решения v уравнения (2) справедливо

$$\int_{B\rho} |Du|^q \, dx \leqslant c\rho^{-q} (N_v(2\rho)), \tag{10}$$

где $N_v(\rho) = \sup\limits_{0<t\leqslant T} \int\limits_{B(1+\varsigma)\rho} v^q \, dx$.

В силу локальной суммируемости функции u имеет место следующая

Лемма 2. *Если u — решение уравнения* (1)*, то для $0 < s < t \leqslant T$ и любых $\rho > 0$, $c < 1$ выполняется*

$$\lim_{k\to\infty} \int_s^t \int_{B\rho} |u_\tau| \chi\{k < u < ck\} \, dx\, d\tau = 0.$$

Записав равенство (4) для функции v и выбрав ξ равным $(\psi - u)_+ \varsigma^p$, получим:

$$\int_s^t \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ v_\tau (\psi - u)_+ \varsigma^p + |Dv|^{q-2} DvD[(\psi - u)_+ \varsigma^p] \right\} \, dx\, d\tau = 0. \tag{11}$$

Используя (6) и (11), приходим к равенству

$$\int_s^t \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} W(\psi - u)_+ \varsigma^p + JD(\psi - u)_+ \varsigma^p \right\} \, dx\, d\tau = -p \int_s^t \int_{\mathbb{R}^N} J(\psi - u)_+ \varsigma^{p-1} D\varsigma \, dx\, d\tau \tag{12}$$

для любого $\psi \in X_{\mathrm{loc}}(S_T)$, где $W = u - v$ и $J = |Du|^{p-2} Du - |Dv|^{q-2} Dv$.

Представим J в виде $J = J' + J''$, где

$$J' = |Du|^{p-2}Du - |Dv|^{p-2}Dv \tag{13}$$

и

$$J'' = |Dv|^{p-2}Dv - |Dv|^{q-2}Dv. \tag{14}$$

Тогда равенство (12) перепишется так:

$$\begin{gathered}\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial t}W(\psi-u)_+\varsigma^p + \int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} J'D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau + \int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} J''D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau \\ = -p\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} J'(\psi-u)_+\varsigma^{p-1}D\varsigma\,dx\,d\tau - p\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} J''(\psi-u)_+\varsigma^{p-1}D\varsigma\,dx\,d\tau.\end{gathered} \tag{15}$$

Полученное равенство (15) является отправным в наших рассуждениях. Имеет место следующая

Теорема. *Если u и v — слабые решения уравнений (1) и (2) соответственно, $w = (u-v)(t) \to 0$ в $L'_{\mathrm{loc}}(R^N)$ при $t \to 0$, если, кроме того, выполнены условия:*

$$M_u(\rho) = \sup_{0<t\leqslant T}\int\limits_{B\rho} u^p\,dx < \infty \quad \text{и} \quad N_v(\rho) = \sup_{0<t\leqslant T}\int\limits_{B\rho} v^q\,dx < \infty \quad \text{при } \rho > 0,$$

то существуют такие постоянные α_0, ρ_0, T_{0a}, $\alpha > 1$, что для всех $0 < \alpha < \alpha_0$, $\rho \geqslant \rho_0$, $0 < t \leqslant T_0$, $a > 1$ и достаточно малом $p - q$ выполняется оценка

$$\begin{gathered}\frac{1}{a+1}\int\limits_{B\rho\times\{t\}} |W|^{a+1}\,dx \\ \leqslant c\left(t^{\frac{1}{k_p}}\rho^{\frac{p-2}{k_p}} + t^{\frac{1}{k_q}}\rho^{\frac{q-2}{k_q}} + t^{1+\frac{1}{q}+\frac{p-q+\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}\rho^{\frac{N}{p}(p-\alpha)}K_{uv}(\rho)\left(\int\limits_0^t\int\limits_{B_2\rho}|W|^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}\right).\end{gathered}$$

Здесь k_p и k_q — постоянные Баренблата уравнений (1) и (2), $K(\rho)$ — выражение, зависящее от $M_u(\rho)$ и $N_v(\rho)$.

$\lhd$ Положим

$$U_n = \begin{cases} u, & u \leqslant n, \\ n, & u > n, \end{cases} \quad W_n^+ \equiv (u-v)_n^+ = \begin{cases} 0, & w \leqslant 0, \\ w_+, & w < n, \\ n, & w \geqslant n. \end{cases} \tag{16}$$

В равенстве (15) выберем пробную функцию равной

$$\psi \equiv u_{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon}(W_n^+ + \varepsilon)^a \in X_{\mathrm{loc}}(S_T), \tag{17}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\psi \in X_{\mathrm{loc}}(S_T) \cap Y_{\mathrm{loc}}(S_T)$.

Тогда из (15) будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} W(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx-\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{s\}} W(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx-\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} W\frac{\partial}{\partial t}(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau$$
$$+\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} J'D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau+\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} J''D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau \tag{18}$$
$$=-p\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} J'(\psi-u)_+\varsigma^{p-1}\,dx\,d\tau-p\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} J''D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau.$$

Перемножим обе части равенства (18) на ε и перейдем к пределу в полученном равенстве при $\varepsilon\to 0$.

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости первые два слагаемых левой части равенства (18) стремятся к выражениям

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{t\}} W(W_n^+)^a\varsigma^p\,dx\quad\text{и}\quad\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{s\}} W(W_n^+)^a\varsigma^p\,dx \tag{19}$$

соответственно. Третье слагаемое равенства (18) после умножения на ε можно переписать в виде:

$$-\varepsilon\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} W\frac{\partial}{\partial t}(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau$$
$$=-a\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} W(W_n^++\varepsilon)^{a-1}\frac{\partial W_n^+}{\partial\tau}\chi\left\{u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}\varsigma^p\,dx\,d\tau \tag{20}$$
$$-\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} W\frac{\partial}{\partial t}(1-\varepsilon u)\chi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}\varsigma^p\,dx\,d\tau=L_1(\varepsilon)+L_2(\varepsilon).$$

Последнее слагаемое в силу леммы 2 стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, при фиксированных S и n, действительно:

$$|L_2(\varepsilon)|\leqslant\varepsilon\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}|W|\left|\frac{\partial}{\partial\tau}u\right|\chi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}\varsigma^p\,dx\,d\tau$$
$$\leqslant\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}(u+v)\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\right|\chi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}\varsigma^p\,dx\,d\tau$$
$$\leqslant\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\tau^{-\frac{N}{k_p}}\rho^{\frac{p}{p-2}}\left|\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|\chi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}\varsigma^p\,dx\,d\tau$$
$$+c\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\tau^{-\frac{N}{k_q}}\rho^{\frac{q}{q-2}}\left|\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|\chi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}\varsigma^p\,dx\,d\tau$$

$$\leqslant cs^{-\frac{N}{k_p}}\rho^{\frac{p}{p-2}}\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|\chi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(n+1)^a\right\}\varsigma^p\,dx\,d\tau$$

$$+\,cs^{-\frac{N}{k_q}}\rho^{\frac{q}{q-2}}\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|\chi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(n+1)^a\right\}\varsigma^p\,dx\,d\tau,$$

каждое из которых стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Первое слагаемое равенства (2) стремится к выражению $-a\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}(W_n^+)^a\frac{\partial W_n^+}{\partial\tau}\varsigma^p\,dx\,d\tau$, которое можно представить в виде

$$-a\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}(W_n^+)^a\frac{\partial W_n^+}{\partial\tau}\varsigma^p\,dx\,d\tau=-\frac{a}{a+1}\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{t\}}(W_n^+)^{a+1}\varsigma^p\,dx+\frac{a}{a+1}\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{s\}}(W_n^+)^{a+1}\varsigma^p\,dx,$$

отсюда и из (19), после предельного перехода при $\varepsilon\to 0$ для первых трех слагаемых равенства (18), получим выражение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{t\}}W^+(W_n^+)^a\varsigma^p\,dx-\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{s\}}W^+(W_n^+)^a\varsigma^p\,dx$$

$$-\frac{a}{a+1}\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{t\}}(W_n^+)^{a+1}\varsigma^p\,dx+\frac{a}{a+1}\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{s\}}(W_n^+)^{a+1}\varsigma^p\,dx,$$

которое оценивается снизу выражением

$$\frac{a}{a+1}\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{t\}}(W_n^+)^{a+1}\varsigma^p\,dx-\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\{t\}}W^+(W_n^+)^a\varsigma^p\,dx.\tag{21}$$

Докажем, что четвертое слагаемое в равенстве (18) имеет неотрицательный предел при $\varepsilon\to 0$. В самом деле,

$$\varepsilon\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}J'D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau=a\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}J'DW_n^+(W_n^++\varepsilon)^{a-1}\varsigma^p\chi\left\{u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}dx\,d\tau$$

$$+\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}J'D(1-\varepsilon u)\varsigma^p\chi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}dx\,d\tau;$$

второе слагаемое данного равенства стремится к 0 при $\varepsilon\to 0$, поскольку функции $|Du|$ и $|Dv|$ — локально ограничены [2, теорема 1].

J' можно представить в виде

$$J'=|Du|^{p-2}Du-|Dv|^{p-2}Dv=\int\limits_0^1\frac{d}{d\xi}\left\{|D(\xi u+(1-\xi)v)|^{p-2}D(\xi u+(1-\xi)v)\right\}d\xi$$

$$=\left(\int\limits_0^1|D(\xi u+(1-\xi)v)|^{p-2}\,d\xi\right)DW$$

$$+(p-2)\left(\int_0^1 |D(\xi u+(1-\xi)v)|^{p-4}D(\xi u+(1-\xi)v)\right)DW\,d\xi.$$

Перемножая обе части последнего равенства на DW скалярно, получим:

$$J'DW=\int_0^1 |D(\xi u+(1-\xi)v)|^{p-2}\,d\xi|DW|^2+(p-2)\int_0^1 |D(\xi u+(1-\xi)v)|^{p-2}\,d\xi|DW|^2$$

$$=(p-1)\int_0^1 |D(\xi u+(1-\xi)v)|^{p-2}\,d\xi|DW|^2,$$

отсюда следует, что $J'DW\geqslant 0$.

Поскольку $J'DW_n^+=J'DW\chi\{(x,t):\,0\leqslant u-v\leqslant n\}$, то и $J'DW_n^+\geqslant 0$, следовательно,

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N} J'D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau\geqslant 0. \qquad (22)$$

Оценим пятое слагаемое равенства (18) сверху после умножения на ε:

$$\left|\varepsilon\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N} J'D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau\right|$$

$$\leqslant a\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N} |J''|(W_n^++\varepsilon)^{a-1}|DW_n^+|\varsigma^p\chi\left(\left\{(x,t):\,u(x,t)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}\right)dx\,d\tau$$

$$+\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N}|J''|D(1-\varepsilon u)\varsigma^p\chi\left\{(x,t):\,\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}dx\,d\tau,$$

последнее слагаемое стремится к 0 при $\varepsilon\to 0$ в силу локальной ограниченности функции $|Dv|$ и $|Du|$.

Что касается первого слагаемого, то его можно оценить так:

$$a\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N}|J''|(W_n^++\varepsilon)^{a-1}|DW_n^+|\varsigma^p\chi\left\{(x,t):u(x,t)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}dx\,d\tau$$

$$\leqslant ac\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N}|Dv|^p(W_n^++\varepsilon)^{a-1}\varsigma^p\,dx\,d\tau+ac\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N}|Du|^p(W_n^++\varepsilon)^{a-1}\varsigma^p\,dx\,d\tau$$

$$+ac(p-q)\int_s^t\int_{\mathbb{R}^N}(W_n^++\varepsilon)^{a-1}\varsigma^p\,dx\,d\tau$$

$$\leqslant ac\Bigg(\int_s^t\tau^{-(1+\frac{N}{kq})(p-q+\alpha)}\rho^{\frac{2(p-q+\alpha)}{q-2}}\int_{\mathbb{R}^N}|Dv|^{q-\alpha}(W_n^++\varepsilon)^{a-1}\varsigma^p\,dx\,d\tau$$

$$+\int_s^t\tau^{-(1+\frac{N}{kp})\alpha}\rho^{\frac{2a}{p-2}}\int_{\mathbb{R}^N}|Du|^{p-\alpha}(W_n^++\varepsilon)^{a-1}\varsigma^p\,dx\,d\tau$$

$$
+(p-q)(t-s)^{\frac{p-\alpha}{p}}\rho^{N\left(\frac{p-\alpha}{p}\right)}\left(\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}\right)
$$

$$
\leqslant ac\left(\rho^{\frac{2(p-q+\alpha)}{q-2}}\int\limits_s^t\tau^{-(1+\frac{N}{k_q})(p-q+\alpha)}\left(\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}|Dv|^q\,dx\right)^{\frac{q-\alpha}{q}}\left(\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{q}{\alpha}}\,dx\right)^{\frac{\alpha}{q}}d\tau\right.
$$

$$
+\int\limits_s^t\tau^{-(1+\frac{N}{k_p})^{\alpha}}\rho^{\frac{2\alpha}{p-2}}\left(\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}|Du|^p\,dx\right)^{\frac{p-\alpha}{p}}\left(\int\limits_{B(+\delta)\rho}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\right)^{\frac{\alpha}{p}}d\tau
$$

$$
\left.+(p-q)(t-s)^{\frac{p-\alpha}{p}}\rho^{N\frac{p-\alpha}{p}}\left(\int\limits_s\int\limits_{B(1+\sigma)\sigma}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}\right)
$$

$$
\leqslant ac\left(\rho^{\frac{2(p-q+\alpha)}{q-2}+\alpha-q}(N_v(4\rho))\right)^{\frac{q-\alpha}{q}}\left(\int\limits_s^t\tau^{-\frac{q}{q-\alpha}}\left(1+\frac{N}{k_q}\right)(p-q+\alpha)d\tau\right)^{\frac{q-\alpha}{q}}
$$

$$
\times\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma\rho)}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{q}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{q}}
$$

$$
+\rho^{\frac{2a}{p-2}}(M_u(4\rho))^{\frac{p-\alpha}{p}}\int\limits_s^t\tau^{-(1+\frac{N}{k_p})\alpha}\left(\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\right)^{\frac{\alpha}{p}}d\tau
$$

$$
+(p-q)(t-s)^{\frac{p-\alpha}{p}}\rho^{N\frac{p-\alpha}{p}}\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}\int(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}
$$

$$
\leqslant ac\left(\rho^{\frac{2(p-q+\alpha)}{q-2}+\alpha-q}(N_v(4\rho))\right)^{\frac{q-\alpha}{q}}\left(t^{1-\frac{q}{q-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})(p-q+\alpha)}-s^{1-\frac{q}{q-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})(p-q+\alpha)}\right)^{\frac{q-\alpha}{q}}
$$

$$
\times\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{q}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{q}}+\rho^{\frac{2\alpha}{p-2}}(M_u(4\rho))^{\frac{p-\alpha}{p}}
$$

$$
\times\left(t^{1-\frac{p}{p-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})\alpha}-s^{1-\frac{p}{p-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})\alpha}\right)^{\frac{p-\alpha}{p}}\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}
$$

$$
+(p-q)(t-s)^{\frac{p-\alpha}{p}}\rho^{N\frac{p-\alpha}{p}}\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}
$$

$$
\leqslant ac\left(\rho^{\frac{2(p-q+\alpha)}{q-2}+\alpha-q+\frac{N\alpha}{pq}}(N_v(4\rho))^{\frac{q-\alpha}{q}}(t-s)^{\frac{\alpha}{pq}}\left(t^{1-\frac{q}{q-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})(p-q+\alpha)}-s^{1-\frac{q}{q-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})(p-q+\alpha)}\right)^{\frac{q-\alpha}{q}}\right.
$$

$$
+\rho^{\frac{2\alpha}{p-2}+\alpha-p}(M_u(4\rho))^{\frac{p-\alpha}{p}}\left(t^{1-\frac{p}{p-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})\alpha}-s^{1-\frac{p}{p-\alpha}(1+\frac{N}{k_p})\alpha}\right)^{\frac{p-\alpha}{p}}
$$

$$
\left.+(p-q)(t-s)^{\frac{p-\alpha}{p}}\rho^{N(\frac{p-\alpha}{p})}\right)\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)p}(W_n^+ +\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}.
$$

Из последнего неравенства при выполнении условий

$$1-\frac{q}{q-\alpha}\left(1+\frac{N}{k_q}\right)(p-q+\alpha)>0 \quad \text{и} \quad 1-\frac{p}{p-\alpha}\left(1+\frac{N}{k_q}\right)\alpha>0 \tag{23}$$

(условие (23) достигается за счет малости α и $(p-q)$), получим

$$\left|\varepsilon\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} J''D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau\right| \leqslant ac\Big(\rho^{\frac{2(p-q+\alpha)}{q-2}+\alpha-q+\frac{N\alpha}{pq}p-q}t^{1+\frac{\alpha(p-q)}{pq}-\frac{q}{q-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})(p-q+\alpha)}$$

$$\times(N_v(4\rho))^{\frac{q-\alpha}{q}}+\rho^{\frac{2\alpha}{p-2}}t^{\frac{p-\alpha}{p}-(1+\frac{N}{k_p})\alpha}(M_u(4\rho))^{\frac{p-\alpha}{p}}+(p-q)t^{\frac{p-\alpha}{p}}\rho^{\frac{N}{p}(p-a)}\Big)$$

$$\times\left(\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{B(1+\sigma)p}(W_n^++\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}},$$

отсюда вытекает, что существуют такие $\alpha_0>0$ и $\rho_0>0$, что при всех $0<\alpha<\alpha_0$, $\rho\geqslant\rho_0$ и $0<t\leqslant T$ выполняется неравенство

$$\left|\varepsilon\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} J''D(\psi-u)_+\varsigma^p\,dx\,d\tau\right| \leqslant act^{1+\frac{\alpha(p-q)}{pg}-\frac{q}{q-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})(p-q+\alpha)}\rho^{\frac{N(p-\alpha)}{p}}$$

$$\times\Big((N_v(4\rho))^{\frac{q-\alpha}{q}}+(M_u(4\rho))^{\frac{p-\alpha}{p}}\Big)\left(\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{B(1+\sigma)p}(W_n^++\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}dxd\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}+O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

следовательно, при выбранных α,ρ имеет место неравенство

$$\varlimsup_{\varepsilon\to0}\left|\varepsilon\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} J''D(\psi-u)_+\varsigma^p dxd\tau\right| \leqslant act^{1+\frac{\alpha(p-q)}{pq}-\frac{q}{q-\alpha}(1+\frac{N}{k_q})(p-q+\alpha)}\rho^{\frac{N}{p}(p-\alpha)}$$
$$\times\Big((N_v(4\rho))^{\frac{q-\alpha}{q}}+(M_u(4\rho))^{\frac{p-\alpha}{p}}\Big)\left(\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}, \tag{24}$$

здесь c зависит от p, q, α_0, ρ_0, T.

Правую часть равенства (18) после умножения на ε можно представить в виде:

$$-p\,\varepsilon\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{R^N} J(\psi-u)_+\varsigma^{p-1}D\varsigma\,dx\,d\tau$$

$$=-p\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{B(1+\sigma)\rho} J(W_n^++\varepsilon)^aD\varsigma\chi\left\{(x,t)^{u(x,t)}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}dx\,d\tau$$

$$-p\,\varepsilon\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} J(1-\varepsilon u)D\varsigma\chi\left\{(x,t):\frac{1}{\varepsilon}\leqslant u(x,t)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}(W_n^++\varepsilon)^a\right\}dx\,d\tau,$$

откуда будем иметь:

$$\left|p\,\varepsilon\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} J(\psi-u)_+\varsigma^{p-1}D\varsigma\,dx\,d\tau\right| \leqslant p\int_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}|Du|^{p-1}(W_n^++\varepsilon)^a|D\varsigma|\,dx\,d\tau$$

$$+p\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}|Dv|^{q-1}(W_n^++\varepsilon)^a|D\varsigma|\,dx\,d\tau+p\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}\left(|Du|^{p-1}+|Dv|^{q-1}\right)|D\varsigma|\,dx\,d\tau$$

$$+p\,\varepsilon\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|Du|^{p-1}+|Dv|^{q-1})u|D\varsigma|\,dx\,d\tau \leqslant \frac{cp}{\rho}\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}|Du|^{p-1}(W_n^++\varepsilon)^a\,dx\,d\tau$$

$$+\frac{cp}{\rho}\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|Dv|^{q-1}(W_n^++\varepsilon)^a)\,dx\,d\tau+\frac{cp}{\rho}\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|Du|^{p-1}+|Dv|^{q-1})\,dx\,d\tau$$

$$+O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\leqslant\frac{c}{\rho}\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|Du|^{p-1}(W_n^++\varepsilon))^{\frac{p}{p-\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{p-\alpha}{p}}$$

$$\times\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^++\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}+\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|Dv|^{q-1}(W_n^++\varepsilon))^{\frac{p}{p-\alpha}}a\,dx\,d\tau\right)^{\frac{p-\alpha}{p}}$$

$$\times\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^++\varepsilon)^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}+c\left(t^{\frac{1}{k_p}}\rho^{\frac{k_p}{p-2}}+t^{\frac{1}{k_q}}\rho^{\frac{k_q}{q-2}}\right)+O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Из последнего неравенства после предельного перехода получим

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|p\varepsilon\int\limits_s^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}J(\psi-u)_+\zeta^{p-1}D\zeta dx\,d\tau\right|\leqslant\frac{c}{\rho}\Bigg[\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|Du|^{p-1}(W_n^+))^{\frac{p}{p-a}}dx\,d\tau\right)^{\frac{p}{p-a}}$$

$$+\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|D\nu|^{q-1}(W_n^+))^{\frac{p-a}{p}}dx\,d\tau\right)^{\frac{p-a}{p}}\Bigg] \tag{25}$$

$$\times\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+)^{(a-1)\frac{p}{a}}dx\,d\tau\right)^{a/p}+c\Big(t^{\frac{1}{k_p}}\rho^{\frac{p-2}{k_p}}+t^{\frac{1}{k_q}}\rho^{\frac{q-2}{k_q}}\Big).$$

Оценим выражение стоящее в квадратных скобках соотношения (25):

$$\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|Du|^{p-1}(W_n^+))^{\frac{p-a}{p}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{p-a}{p}}+\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|D\nu|^{q-1}(W_n^+))^{\frac{p-a}{p}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{p-a}{p}}$$

$$\leqslant\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}u^p\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}\left(|Du|^{\frac{(p-1)p}{p-\alpha-1}}\,dx\,d\tau\right)^{\frac{p-\alpha-1}{p}}dx\,d\tau\right)^{\frac{p-\alpha-1}{p}}$$

$$+\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}u^p\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac1p}\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}\Bigg(|D\nu|^{\frac{(q-1)p}{p-\alpha-1}}\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac{p-\alpha-1}{p}}\leqslant c\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}u^p\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac1p}$$

$$\times\Bigg(\int\limits_s^t\tau^{-(1+\frac{N}{k_p})\frac{2\alpha p}{p-\alpha-1}}\rho^{\frac{4\alpha p}{(p-2)(p-\alpha-1)}}\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}\Bigg(|Du|^{\frac{p-2\alpha-1}{p-\alpha-1}}\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac{p-\alpha-1}{p}}$$

$$+c\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}u^p\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac1p}\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}|D\nu|^q\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac{q-1}{q}}t^{\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}\rho^{N\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}$$

$$\leqslant c\rho^{\frac{4\alpha}{p-2}+\frac{\alpha N}{p}}\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}u^p\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac1p}\Bigg(\int\limits_s^t\tau^{-(1+\frac{N}{k_p})\frac{2\alpha p}{p-\alpha-1}}\Bigg(\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(|Du|^pdx\Bigg)^{\frac{p-2\alpha-1}{p-\alpha-1}}d\tau\Bigg)^{\frac{p-\alpha-1}{p}}$$

$$+ct^{\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}\rho^{N\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}u^p\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac1p}\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}|D\nu|^q\,dx\,d\tau\Bigg)^{\frac{q-1}{q}}$$

$$\leqslant ct^{1+\frac1p-(1+\frac{N}{k_p})\frac{2\alpha p}{p-\alpha-1}}\rho^{\frac{4\alpha}{p-2}+\frac{\alpha N}{p}-(p-2\alpha-1)}(M_u(4\rho))^{\frac{p-2\alpha}{p}}$$

$$+t^{1+\frac1p\frac1p+\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}\rho^{N\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}(M_u(4\rho))^{\frac1p}(N_v(4\rho))^{\frac{q-1}{q}}\Bigg).$$

Отсюда при соответствующем подборе α_0 и ρ_0 из (25) при всех $0<\alpha<\alpha_0$, и $0<t\leqslant T$ получим оценку

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to0}}\left|p\varepsilon\int\limits_s^t\int\limits_{R^N}J(\psi-u)_+\zeta^{p-1}D\zeta\,dx\,d\tau\right|\leqslant c\Big(t^{\frac{1}{k_p}}\rho^{\frac{p-2}{k_p}}+t^{\frac{1}{k_q}}\rho^{\frac{q-2}{k_q}}+t^{1+\frac1p\frac1q+\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}$$

$$\times(M_u(4\rho))^{\frac{p-2\alpha}{p}}(M_u(4\rho))^{\frac1p}(N_v(4\rho))^{\frac{q-1}{q}}\Big)\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+)^{(a-1)\frac{p}{a}}\,dx\,d\tau\Bigg)^{a/p},\qquad(26)$$

где c зависит от p, q, α_0, N, T, ρ_0.

Итак, из (18) на основании (21), (22), (24), (26) будем иметь

$$\frac{1}{a+1}\int\limits_{B\rho\times\{t\}}(W_n^+)^{a+1}\,dx-\int\limits_{B\rho\times\{s\}}W^+(W_n^+)^a\,dx$$

$$\leqslant c\Big(t^{\frac{1}{k_p}}\rho^{\frac{p-2}{k_p}}+t^{\frac{1}{k_q}}\rho^{\frac{q-2}{k_q}}+t^{1+\frac1p-\frac1q+\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}\rho^{\frac{N}{p}(p-\alpha)}\big((N_v(4\rho))^{\frac{q-\alpha}{q}}(M_u(4\rho))^{\frac{p-\alpha}{p}}\big)$$

$$+(M_u(4\rho))^{\frac{p-2\alpha}{p}}+(M_u(4\rho))^{\frac1p}(N_v(4\rho))^{\frac{q-1}{q}}\Big)\Bigg(\int\limits_s^t\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+)^{(a-1)\frac{p}{a}}\,dx\,d\tau\Bigg)^{a/p}.$$

Переходя к пределу при $s \to 0$ в последнем неравенстве, получим оценку

$$\frac{1}{a+1}\int\limits_{B(1+\sigma)\rho}(W_n^+)^{a+1}\,dx \leqslant c\Big(t^{\frac{1}{kp}}\rho^{\frac{p-2}{kp}}+t^{\frac{1}{kq}}\rho^{\frac{q-2}{kq}}+t^{1+\frac{1}{p}\frac{1}{q}+\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}\rho^{\frac{N}{p}(p-\alpha)}$$
$$\times((N_v(4\rho))^{\frac{q-\alpha}{q}}(M_u(4\rho))^{\frac{p-\alpha}{p}}+(M_u(4\rho))^{\frac{p-2\alpha}{p}}+(M_u(4\rho))^{\frac{1}{p}}(N_v(4\rho))^{\frac{q-1}{q}}) \qquad (27)$$
$$\times\Bigg(\int\limits_0^t\int\limits_{B2p}(W_n^+)^{(a-1)\frac{p}{a}}\,dx\,d\tau\Bigg)^{a/p}.$$

Меняя местами u и v, и записав (27) в этом случае, мы приходим к оценке

$$\frac{1}{a+1}\int\limits_{B\rho\times\{t\}}|W_n^+|^{a+1}\,dx \leqslant c\Bigg(t^{\frac{1}{kp}}\rho^{\frac{p-2}{kp}}+t^{\frac{1}{kq}}\rho^{\frac{q-2}{kq}}+t^{1+\frac{1}{p}\frac{1}{q}+\frac{p-q-\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}\rho^{\frac{N}{p}(p-\alpha)}$$
$$\times K_{uv}(\rho)\Bigg(\int\limits_0^t\int\limits_{B2p}|W_n^+|^{(a-1)\frac{p}{a}}\,dx\,d\tau\Bigg)^{\alpha/p}\Bigg), \qquad (28)$$

где

$$K_{uv}(\rho)=(N_v(4\rho))^{\frac{q-\alpha}{q}}(M_u(4\rho))^{\frac{p-\alpha}{p}}+(M_u(4\rho))^{\frac{p-2\alpha}{p}}+(M_u(4\rho))^{\frac{1}{p}}(N_v(4\rho))^{\frac{q-1}{q}}.$$

Окончательно для $0<\alpha<\alpha_0$, $\rho>\rho_0$, $0<t\leqslant T$, после предельного перехода в неравенстве (28) будем иметь

$$\frac{1}{a+1}\int\limits_{B\rho\times\{x\}}|W|^{a+1}\,dx \leqslant c\Bigg(t^{\frac{1}{kp}}\rho^{\frac{p-2}{kp}}+t^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{p-q+\alpha q}{q(p-\alpha-1)}}\rho^{\frac{N}{p}(p-\alpha)}K_{uv}(\rho)$$
$$\times\Bigg(\int\limits_0^t\int\limits_{B2\rho}|W|^{(a-1)\frac{p}{\alpha}}dx\,d\tau\Bigg)^{\frac{\alpha}{p}}\Bigg). \quad \triangleright$$

Литература

1. *Benedetto E. D., Herrero M. A.* Non-negative Solutions of the Evolution p-Laplacian Equation. Initial Traces and Cauchy Problem when $1 < p < 2$ // Trans. Amer. Math. Soc.—1989.—V. 314.—P. 225–290.
2. *Benedetto E. D., Herrero M. A.* On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation. // AMS.—1989.—V. 314, № 1.—61 p.
3. *Shelepov V. Yu., Alexander F., Tedeev A. F.* On an inequality for solutions of elliptic equations and its application in the theory of boundary properties // Soviet Math. Dokl.—1991.—V. 42, № 3.—P. 732–736.
4. *Тедеев Ал. Ф., Шелепов В. Ю.* Об L_p-граничных решениях эллиптических уравнениях в негладких пространственных областях // Нелинейные граничные задачи.—Донецк: АНУ ИПММ.—1992.—№ 4.—С. 52–100.
5. *Шелепов В. Ю.* О граничных свойствах решений эллиптических уравнений в многомерных областях, представимых с помощью разности выпуклых функций // Мат. сб.—1987.—Т. 133 (175), № 4.—С. 446–468.

Статья поступила 10 января 2007 г.

Тедеев Александр Федорович
Северо-Осетинский госуниверситет
им. К. Л. Хетагурова
Владикавказ, 362040, РОССИЯ