Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, Выпуск 1, С. 53–67

УДК **519.17**

О РЕБЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ, В КОТОРЫХ КАЖДАЯ ВЕРШИНА ЛЕЖИТ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ В ОДНОЙ ХОРОШЕЙ ПАРЕ[1]

А. А. Махнев, Н. В. Чуксина

Пусть Γ является связным реберно регулярным графом с параметрами (v,k,λ) и $b_1 = k-\lambda-1$. Пара вершин $\{u,w\}$ называется хорошей, если $d(u,w)=2$ и $\mu(u,w)=k-2b_1+1$. Если $k=3b_1+\gamma$, $\gamma \geqslant 5b_1/12-5$, то каждая вершина лежит не более чем в одной хорошей паре.

Ключевые слова: реберно регулярный граф, μ-подграф, хорошая пара вершин.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-подграфом.

Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ) и $b_1=k-\lambda-1$. Пара вершин u, w называется *(почти) хорошей*, если $d(u,w)=2$ и $\mu(u,w)$ равно $k-2b_1+1$ (равно $k-2b_1+2$). Тройка вершин $(u;w,z)$ называется *(почти) хорошей*, если $w,z\in\Gamma_2(u)$ и $\mu(u,w)+\mu(u,z)$ не больше $2k-4b_1+3$ (равно $2k-4b_1+4$).

Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф, с долями порядков $m_1,\ldots,m_n$. Если $m_1=\ldots=m_n=m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m\geqslant 2$, то граф $K_{1,m}$ называется m-*лапой. Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X|=m$ и пары $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X\times Y$ называется $m\times n$-*решеткой*, если $|X|=m$, $|Y|=n$ и вершины

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00009.

(x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф Клебша (граф Шлефли) — это единственный сильно регулярный граф с параметрами (16, 10, 6, 6) (с параметрами (27, 16, 10, 8)). Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

В [1, предложение и лемма 1.9] доказано, что если Γ — связный реберно регулярный граф диаметра 2 с параметрами (v, k, λ) и $k = 3b_1 + \gamma$, $\gamma \geqslant -2$, то выполняются следующие утверждения:

(1) если Γ содержит такую 3-коклику Δ, что любые ее две вершины образуют хорошие пары, то $\gamma \leqslant -1$ и Γ является шестиугольником, графом икосаэдра или реберным графом тривалентного графа без треугольников, имеющим диаметр больше 2;

(2) если некоторая вершина u графа Γ лежит в хорошей паре, то либо $\gamma \leqslant b_1 - 6$, либо $b_1 = 1$ и Γ — многоугольник, либо $b_1 = 2$ и Γ — граф икосаэдра или граф с $k = 4$ диаметра, большего 2;

(3) если $\gamma \geqslant 0$ и для некоторой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины, образующие хорошие пары с u, то $\gamma < b_1/2 - 2$.

Уточнение утверждения (2) получено в [5]. В данной работе с помощью предложения о почти хороших тройках получено усиление утверждения (3).

Предложение 1. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), $k = 3b_1 + \gamma$ и $\gamma \geqslant 0$. Если (u, w, z) — почти хорошая тройка и $\delta = |[u] \cap [w] \cap [z]|$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *вершины w, z не смежны и $\delta = 0$;*

(2) *вершины w, z смежны и либо*

(i) *подграф $[u] \cap [w] \cap [z]$ является 2-кликой, $\gamma = 0$, $\mu(u, w) = \mu(u, z) = b_1 + 2$, $\Gamma_2(u) \cap ([w] \cup [z]) = \{w, z\} \cup ([w] \cap [z])$ и $b_1 \geqslant 8$, либо*

(ii) *подграф $[u] \cap [w] \cap [z]$ является 3-кликой, $\gamma = 1$, $\mu(u, w) = \mu(u, z) = b_1 + 3$, $b_1 = 3$ и Γ — граф Клебша, либо*

(iii) *подграф $[u] \cap [w] \cap [z]$ является 4-кликой, $\gamma = 1$, $\mu(u, w) = \mu(u, z) = b_1 + 3$, $b_1 = 5$ и Γ — граф Шлефли.*

Теорема. *Пусть Γ — связный неполный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $k = 3b_1 + \gamma$, $\gamma \geqslant 0$. Если $\gamma \geqslant 5b_1/12 - 5$, то каждая вершина графа Γ лежит не более чем в одной хорошей паре.*

Для конкретных параметров аналогичный результат можно получить при более слабых предположениях.

Предложение 2. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами $k = 17$ и $b_1 = 6$. Тогда $v = 30$, Γ не содержит почти хороших пар, и каждая вершина графа Γ лежит не более чем в одной хорошей паре.*

§ 1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные утверждения. Для вполне регулярного графа с параметрами (v, k, λ, μ) хорошо известно неравенство $\mu \geqslant k - 2b_1 + 1$ [2, теорема 1.2.3].

Лемма 1.1. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ) и $b_1 = k-\lambda-1$. Если вершины u, w находятся на расстоянии 2 в Γ, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *степень любой вершины в μ-подграфе из Γ не меньше $k-2b_1$;*

(2) *вершина d имеет степень α в графе $[u]\cap[w]$ тогда и только тогда, когда $[d]$ содержит точно $\alpha-(k-2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$;*

(3) *если $\mu(u,w) = k-2b_1+1$, то подграф $[u]\cap[w]$ является кликой и $[d] \subset u^\perp \cup w^\perp$ для любой вершины $d \in [u]\cap[w]$;*

(4) *если $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$ содержит единственную вершину z, то $\mu(u,z) = \mu(w,z)$.*

$\lhd$ Пусть $d \in [u]\cap[w]$. Тогда $\big|[d]-[u]\big| = \big|[d]-[w]\big| = b_1$. Поэтому по крайней мере $k-2b_1$ вершин из $[d]$ содержится в $[u]\cap[w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d \in [u]\cap[w]$ и степень d в этом μ-подграфе равна α. Тогда $k = \alpha + 2b_1 - \big|[d]-(u^\perp \cup w^\perp)\big|$. Поэтому $[d]$ содержит $\alpha-(k-2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (1), (2).

Пусть $\{z\} = \Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$. Так как число ребер между $[u]-[w]$ и $[w]-[u]$ равно $b_1\big|[u]-[w]\big| - \mu(u,z)$, то $\mu(u,z) = \mu(w,z)$. $\rhd$

Лемма 1.2. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ), в котором $b_1 = 2$. Тогда Γ является одним из следующих графов:*

(1) *тривалентный граф без треугольников;*

(2) *реберный граф тривалентного графа без треугольников;*

(3) *полный многодольный граф $K_{r\times 3}$;*

(4) 3×3 *решетка, треугольный граф $T(5)$ или граф Петерсена;*

(5) *граф икосаэдра.*

$\lhd$ Это предложение 1 из [3]. $\rhd$

Лемма 1.3. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ), в котором $b_1 = 3$. Тогда Γ является одним из следующих графов:*

(1) *четырехвалентный граф без треугольников;*

(2) *реберный граф четырехвалентного графа без треугольников (в том числе 4×4 решетка);*

(3) *локально шестиугольный граф (в том числе граф Пэли с параметрами $(13,6,2,3)$ и граф Шрикханде);*

(4) *полный многодольный граф $K_{r\times 4}$;*

(5) *треугольный граф $T(6)$ или граф Клебша.*

$\lhd$ Это предложение 2 из [3]. $\rhd$

Пусть $w,z \in \Gamma_2(u)$. Пару вершин (u,w) назовем почти хорошей, если $\mu(u,w) = k-2b_1+2$. Тройку вершин (u,w,z) назовем (почти) хорошей, если $\mu(u,w)+\mu(u,z)$ не больше $2k-4b_1+3$ (равно $2k-4b_1+4$). Свойства почти хороших троек вершин изучаются в следующих четырех леммах.

Лемма 1.4. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с $k \geqslant 3b_1-3$, $\mu(u,w)+\mu(u,z) = 2k-4b_1+4$ для двух вершин w,z из $\Gamma_2(u)$, $\Delta = [u]\cap[w]\cap[z]$ и $\delta = |\Delta|$. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) *вершины w, z несмежны, $\delta \leqslant 1$ и в случае $\delta = 1$ имеем $k = 3b_1-3$;*

(2) *Δ содержит две несмежные вершины, $\delta = 2$ и $k \leqslant 3b_1-1$;*

(3) *вершины w, z смежны, Δ является кликой и если $\delta > 1$, то либо*

(i) *подграф Δ содержит единственную вершину d, смежную с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, $\delta \leqslant 2$, $k \leqslant 3b_1 - 2$ и для $e \in \Delta(d)$ подграф $[d] \cup [e]$ содержит $[w] \cap [z] - [u]$, а $[d] \cap [e]$ содержится в $\{u, w, z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, либо*

(ii) *подграф Δ не содержит вершин, смежных с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, и для любых двух вершин $d, e \in \Delta$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит $\lambda - 1 + \gamma$ вершин из $\{u, w, z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, где $\gamma = \big|[w] \cap [z] - ([d] \cup [e])\big|$.*

$\lhd$ Все утверждения леммы, кроме оценок для k, следуют из леммы 1.7 [1].

Пусть вершины w, z смежны, и d — вершина из Δ, смежная с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$. Если $\delta = 1$, то $\big|[u] \cap [d]\big| \geqslant 2(k - 2b_1 + 1)$ и $k = 3b_1 - 3$. Аналогичные рассуждения применимы к случаю, когда вершины w, z несмежны, и $d \in \Delta$.

Если $\delta = 2$, то $\big|[u] \cap [d]\big| \geqslant 1 + 2(k - 2b_1)$ и $k \leqslant 3b_1 - 2$.

Пусть Δ содержит две несмежные вершины a, b. Тогда $\delta = 2$, $\big|[u] \cap [d]\big| \geqslant 2(k - 2b_1)$ и $k \leqslant 3b_1 - 1$. $\rhd$

Лемма 1.5. *Пусть Γ — реберно регулярный граф. Тогда*

(1) *если Γ содержит хорошую тройку $(u; w, z)$, то $\big|[u] \cap [w] \cap [z]\big| < 2$;*

(2) *если $k = 3b_1 + \gamma$, $\gamma \geqslant 0$ и Γ содержит хорошую пару $\{u, w\}$, то $\mu(u, z) \geqslant b_1 + \gamma + 3$ для любой вершины $z \in [w] - [u]$, и $b_1 \geqslant 8$;*

(3) *если $k \geqslant 3b_1$, $b_1 \leqslant 6$ и Γ содержит почти хорошую пару $\{u, w\}$, то либо $b_1 = 1$ и Γ — граф $K_{n \times 2}$, $n \geqslant 3$, либо $b_1 = 3$ и Γ — граф Клебша, либо $b_1 = 5$ и Γ — граф Шлефли.*

$\lhd$ Утверждение (1) следует из лемм 4, 5 [4].

Пусть $z \in [w] - [u]$. Если $\mu(u, z) = b_1 + \gamma + 1$, то $\gamma = 0$ и ввиду утверждения (1) подграф $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит единственную вершину a и $[a] \cap [u]$ содержит по $b_1 + \gamma$ вершин из $[w] - [z]$ и из $[z] - [w]$, противоречие с тем, что $\lambda = 2b_1 + \gamma - 1$. Если $\mu(u, z) = b_1 + \gamma + 2$, то по утверждению (1) имеем $\big|[u] \cap [w] \cap [z]\big| \leqslant 1$, и $[z] - w^\perp$ содержит $b_1 + \gamma + 1$ вершин из $[u]$, противоречие. Значит, $\mu(u, z) \geqslant b_1 + \gamma + 3$ для любой вершины $z \in [w] - [u]$.

Ввиду леммы 1.8 из [1], если $k \geqslant 3b_1$ и Γ содержит хорошую пару u, w, то $k \leqslant 4b_1 - 6$. В случае $b_1 = 6$ имеем $k = 18$ и число ребер между $[u]$ и $[w] - [u]$ не больше 101. Так как $11 \cdot 10 = 110$, то $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$ и $[w] - [u]$ содержит либо 9 вершин z с $\mu(u, z) = 9$ и 2 вершины y с $\mu(u, z) = 10$, либо 10 вершин z с $\mu(u, z) = 9$ и 1 вершину y с $\mu(u, z) = 11$.

Пусть $\mu(u, z) = 9$, $[u] \cap [w] \cap [z] = \{a_1, a_2, a_3\}$. Тогда $[u] \cap [a_i]$ содержит 6 вершин из $[u] \cap [w]$ и не менее 4 вершин из $[u] \cap [z] - [w]$, $[a_i] \cap [a_j]$ содержит u, w, z, 5 вершин из $[u] \cap [w]$, и не менее 2 вершин из $[u] \cap [z] - [w]$. Положим $\Omega = \{z \in [w] - [u] \mid \mu(u, z) = 9\}$. Тогда число ребер между $[u] \cap [w]$ и Ω не меньше 27, поэтому найдется вершина $a \in [u] \cap [w]$, смежная с 4 вершинами z_i из Ω. Без ограничения общности, вершины z_1, z_2 смежны. Противоречие с тем, что $[z_1] \cap [z_2]$ содержит не менее 10 вершин из $[u] \cap a^\perp$ и не менее 8 вершин из $w^\perp - [u]$.

В случае $b_1 = 7$ имеем $k = 22$, $\lambda = 14$ и v делится на 3. Отсюда $v \geqslant 39$, число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $7 \cdot 22$, но не меньше $9 + 13 \cdot 11 + 19$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $k = 3b_1 + \gamma$, $\gamma \geqslant 0$ и Γ содержит почти хорошую пару (u, w). Заметим, что диаметр Γ равен 2, и если Γ — сильно регулярный граф, то он имеет собственное значение -2.

Если $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или граф $K_{n \times 2}$. В первом случае $k = 2b_1$, а во втором каждая пара несмежных вершин является почти хорошей и $n \geqslant 3$.

Если $b_1 = 2$, то ввиду леммы 1.3 Γ — 3×3 решетка, треугольный граф $T(5)$ или граф Петерсена. В любом случае $k < 3b_1$.

Если $b_1 = 3$, то ввиду леммы 1.4 Γ — граф Клебша.

Если $b_1 = 4$ и $k \geqslant 10$, то по предложению 3 из [3] Γ является полным многодольным графом $K_{r\times 5}$ или треугольным графом $T(7)$. В первом случае -2 не является собственным значением Γ, а во втором $k < 3b_1$.

Если $b_1 = 5$ и $k \geqslant 15$, то по теореме из [6] Γ является полным многодольным графом $K_{r\times 6}$ или графом Шлефли. Но в первом случае -2 не является собственным значением Γ.

Пусть $b_1 = 6$ и $k \geqslant 18$. Если граф Γ сильно регулярен, то он имеет собственное значение -2 и $k < 3b_1$. Поэтому граф Γ не является сильно регулярным и $|u^\perp \cup w^\perp| = 30 + \gamma$.

Допустим, что $\mu(u, z) = 8 + \gamma$ для смежной с w вершины z из $\Gamma_2(u)$. Положим $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ и $\delta = |\Delta|$. Если $\delta \leqslant 2$, то $\gamma = 0$, $\Gamma_2(u) \subset \{w, z\} \cup ([w] \cap [z])$ и $|\Gamma_2(u)| = 11$. Далее, число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$ равно 92. Положим $[w] \cap [z] = \{a, b\}$, $\Sigma_1 = [a] - ([u] \cup \{w, z\})$, $\Sigma_2 = [b] - ([u] \cup \{w, z\})$. Пусть $c \in \Sigma_1$. Если $c^\perp$ содержит Σ_1, то степень a в графе $[u] \cap [c]$ равна 6, $[u] \cap [c]$ содержит по 3 вершины из $[u] \cap [w] - [z]$, $[u]\cap[z]-[w]$ и из $[u]-([w]\cup[z])$, поэтому $\mu(u, c) = 10$. Если же $c^\perp$ не содержит Σ_1, то степень a в графе $[u] \cap [c]$ равна 8, $[u] \cap [c]$ содержит по 4 вершины из $[u] \cap [w] - [z]$, $[u] \cap [z] - [w]$ и 2 вершины из $[u] - ([w] \cup [z])$, поэтому $\mu(u, c) = 11$. В последнем случае подграф Σ_1 является 3-лапой или объединением двух изолированных ребер, а Σ_2 является 4-кликой. Если Σ_1 является 3-лапой, то число ребер между $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$ и $[u] - ([w] \cup [z])$ не больше 23, противоречие с тем, что каждая из четырех вершин в $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с 6 вершинами из $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$. Если Σ_1 является объединением двух изолированных ребер, то для вершины e из $\Gamma_2(u) - (a^\perp \cup b^\perp)$ имеем $\mu(u, e) = 8$, поэтому $[e]$ содержит Σ_1 и Σ_2. Далее, $[c]$ содержит 3 вершины из Σ_2 для любой вершины $c \in \Sigma_1$, противоречие с тем, что для $d \in \Sigma_2$ подграф $[d]$ содержит 2 вершины из Σ_1.

Итак, Σ_1, Σ_2 являются кликами и $\mu(u, e) = 12$ и $[e]$ содержит $[u] \cap [w] - [z]$, $[u] \cap [z] - [w]$ и 4 вершины из $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Поэтому $\mu(a, e) + \mu(b, e) = 28$ и число ребер между $[e]$ и $\Gamma_2(e) - \{u, a, b\}$ равно 60, противоречие.

Пусть $\delta \geqslant 3$. Ввиду леммы 1.6 граф Δ является кликой. Положим $\Sigma = [w] \cap [z] - [u]$.

Покажем, что $\delta \geqslant \gamma + 4$. В противном случае $|\Sigma| > 7$, для любой вершины a_i из Δ имеем $|\Sigma - [a_i]| > 3$ и для двух вершин a_1, a_2 из $\Delta - \{a_i\}$ подграф $[a_1] \cap [a_2]$ содержит более $6 + \gamma$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и менее 2 вершин из Σ, противоречие. Так как $|\Gamma_2(u)| \geqslant 9 + \delta - \gamma$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $6(18 + \gamma)$, но не меньше $13(8 + \gamma)$. Отсюда $7\gamma \leqslant 4$, $\gamma = 0$, $\delta = 4$ и $|\Gamma_2(u)| = 13$.

Положим $\Delta = \{a_1, \ldots, a_4\}$. Тогда $[a_i]\cap[a_j]$ содержит не менее 9 вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$ и не более 2 вершин из Σ.

Допустим, что $[a_1]$ содержит не более 3 вершин из Σ. Тогда $|\Sigma - [a_1]| \geqslant 4$, поэтому $[a_1]$ содержит точно 3 вершины из Σ. Если $[a_2]$ содержит 3 вершины из Σ, то $[a_3] \cap [a_4]$ содержит не менее 3 вершин из Σ, противоречие. Значит, $[a_i]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из Σ для любой вершины $a_i \in \Delta - \{a_1\}$. Теперь число ребер между Δ и $[u] - ([w] \cup [z])$ не меньше 7 и некоторая вершина из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с 2 вершинами a_i, a_j. Ясно, что $|[a_i] \cap \Sigma| = |[a_j] \cap \Sigma| = 4$. Если $|[a_l] \cap \Sigma| = 3$, то $[a_l] \cap [a_i]$ или $[a_l] \cap [a_j]$ содержит не менее 2 вершин из Σ, противоречие. Значит, $|[a]\cap\Sigma| = 4$ для любой вершины $a \in \Delta$ и $[a_l]$ содержит по 2 вершины из $\Sigma - [a_i]$ и из $\Sigma - [a_j]$. Далее, $[u] - ([w] \cup [z])$ содержит вторую вершину, смежную с 2 вершинами из Δ, противоречие.

Пусть $\mu(u, z) > 8+\gamma$ для любой смежной с w вершины z из $\Gamma_2(u)$. В случае $v = 30+\gamma$ подграф $[u] \cap [w]$ является полным многодольным с долями порядка 2, поэтому γ четно. В этом случае вершина из $\Gamma_2(u) - \{w\}$ смежна в среднем с $10 + \gamma/2$ вершинами из $[u]$ и $8 + \gamma \leqslant 10 + \gamma/2$. Если $\gamma = 4$, то граф Γ является сильно регулярным, противоречие. Значит, $\gamma \in \{0, 2\}$. Если $\gamma = 2$, то $\mu(u, z) = 11$ для любой вершины $z \in [w] - [u]$, и подграфы $[u]\cap[w]$, $[w]-[u]$ изоморфны $K_{5\times 2}$. В этом случае для любой вершины x подграф $\Gamma_2(x)$ содержит точно 10 вершин y с $\mu(x,y)=11$, поэтому x лежит в пяти 3-кокликах и число 3-коклик в Γ равно $32\cdot 5/3$, противоречие.

Пусть $\gamma=0$. Если $\mu(u,z)=9$ для некоторой вершины $z\in[w]-[u]$, то $\Gamma-(u^\perp\cup z^\perp)$ содержит единственную вершину y и по лемме 1.1 имеем $\mu(u,y)=\mu(y,z)$. Поэтому $[y]$ содержит β вершин из $[u]\cap[z]$ и $\mu(u,y)=(18+\beta)/2$. Если $\beta=0$, то $[w]\subset y^\perp\cup z^\perp$ и степень w в графе $[y]\cap[z]$ равна 8, противоречие. Если $\beta=2$, то для вершины $a\in[u]\cap[y]\cap[z]$ подграф $[a]-y^\perp$ содержит u, z и не менее 6 вершин из $[u]\cap[z]-[y]$, противоречие. Если $\beta=4$, то для вершины $a\in[u]\cap[y]\cap[z]$ подграф $[a]-y^\perp$ содержит u, z и 4 вершины из $[u]\cap[z]-[y]$, поэтому $[u]\cap[y]\cap[z]$ является кликой, и подграф $[y]$ содержит $[a]\cap([u]-[z])$ и $[a]\cap([z]-[u])$. Положим $[u]\cap[y]\cap[z]=\{a_1,\dots,a_4\}$. Тогда $[a_1]\cap[a_2]$ содержит u,y,z, не менее 5 вершин из $[u]\cap[z]$ и не более 3 вершин из $([u]-[z])\cup([z]-[u])$. Без ограничения общности можно считать, что $[a_1]\cap[a_2]$ содержит 1 вершину из $[u]-[z]$ и 2 вершины из $[z]-[u]$. Тогда $[a_3]\cap([u]-[z])$ содержит по 2 вершины из $[a_1]-[a_2]$ и из $[a_2]-[a_1]$. Противоречие с тем, что $[a_3]\cap([z]-[u])$ содержит 2 вершины из $[a_1]-[a_2]$ или из $[a_2]-[a_1]$.

Если $\beta=8$, то $\mu(u,y)=\mu(y,z)=13$, число ребер между $[y]$ и $\Gamma_2(y)-\{u,z\}$ равно 82 и $\mu(x_i,y)=9$ для по крайней мере 6 вершин x_i из $\Gamma_2(y)$. Далее, $[u]-[z]$ или $[z]-[u]$, для определенности, $[u]-[z]$ содержит не менее 3 таких вершин x_i. Противоречие с тем, что число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)-\{y,x_1,x_2,x_3\}$ равно $108-13-3\cdot 12=59$.

Значит, $\beta=6$, $\mu(u,y)=\mu(y,z)=12$, число ребер между $[y]$ и $\Gamma_2(y)-\{u,z\}$ равно 84 и $\mu(x_i,y)=9$ для по крайней мере 4 вершин x_i из $\Gamma_2(y)$. Заметим, что $\mu(y,b)=12$ для не более чем одной вершины $b\in\Gamma_2(y)-\{u,z\}$. Если $\mu(y,b)=12$, то либо $\mu(y,c)=9$ для любой вершины $c\in\Gamma_2(y)-\{b,u,z\}$, либо $\mu(y,a)=8$, $\mu(y,d)=10$ и $\mu(y,c_j)=9$ для 6 вершин $c_j\in\Gamma_2(y)$. Заметим, что в случае $\mu(y,c)=9$ для $c\in[z]-[u]$ имеем $\mu(u,c)=12$, поэтому каждый из подграфов $[u]\cap[z]$, $[u]-[z]$ и $[z]-[u]$ содержит по 2 вершины c_j такие, что $\mu(y,c_j)=9$. Противоречие с тем, что тогда $|\Gamma_2(y)-b^\perp|\leqslant 3$. Итак, $\mu(y,b)<12$ для любой вершины $b\in\Gamma_2(y)-\{u,z\}$. Если $[u]-[z]$ содержит такую вершину x, что $\mu(y,x)=9$, то $\mu(x,z)=12$. Поэтому $\mu(y,a)=8$ для единственной вершины $a\in\Gamma_2(y)$ и $\{x\mid\mu(y,x)=9\}$ содержит вершину x_1 из $[u]-[z]$, x_2 из $[z]-[u]$ и 2 вершины x_3,x_4 из $[u]\cap[z]$. Противоречие с тем, что $\mu(y,e)=12$ для $e\in\Gamma-(x_3^\perp\cup y^\perp)$.

Таким образом, для любой вершины u найдется единственная вершина w с $\mu(u,w)=8$ и $\mu(u,z)=10$ для любой вершины $z\in\Gamma_2(u)-\{w\}$. Положим $\Gamma-(u^\perp\cup z^\perp)=\{x,y\}$. Если вершины x,y не смежны, то $[x]$ содержит по 7 вершин из $[u]-[z]$, $[z]-[u]$ и 4 вершины из $[u]\cap[z]$ Если вершины x,y смежны, то $[x]$ содержит по 6 вершин из $[u]-[z]$, $[z]-[u]$ и 5 вершин из $[u]\cap[z]$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $\mu(u,x)=11$.

В случае $v\geqslant 31+\gamma$ число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $6(18+\gamma)$, но не меньше $2(8+\gamma)+10(9+\gamma)$, поэтому $6\gamma\leqslant 2$ и $\gamma=0$. Далее, $v=31$ и $\Gamma-(u^\perp\cup w^\perp)$ содержит единственную вершину z. По лемме 1.1 имеем $\mu(u,z)=\mu(w,z)$, поэтому $[z]$ содержит β вершин из $[u]\cap[w]$ и $\mu(u,z)=9+\beta/2$. Если $a\in[u]\cap[w]\cap[z]$, то $[a]-z^\perp$ содержит u, w и $8-\beta$ вершин из $[u]\cap[w]$, поэтому $\beta\geqslant 4$. В случае $\beta=4$ для любых двух вершин $a_1,a_2\in[u]\cap[w]\cap[z]$ подграф $[a_1]\cap[a_2]$ содержит u, w, z, 6 вершин из $[u]\cap[w]$ и по одной вершине из $([u]-[w])\cap[z]$ и из $([w]-[u])\cap[z]$. Противоречие с тем, что для $a_3\in[u]\cap[w]\cap[z]-\{a_1,a_2\}$ подграф $[a_1]\cap[a_3]$ содержит u, w, z, 6 вершин из $[u]\cap[w]$ и по 3 вершины из $([u]-[w])\cap[z]$ и из $([w]-[u])\cap[z]$. Итак, если $\beta>0$, то $\beta\geqslant 6$ и число ребер между $[z]$ и $\Gamma_2(z)-\{u,w\}$ равно 84, противоречие.

Отсюда $\beta=0$, $[u]\cap[w]$ — полный 4-дольный граф с долями порядка 2 и $\mu(u,z)=\mu(w,z)=9$. Итак, для любой вершины x либо $\mu(x,y)=9$ для любой вершины $y\in\Gamma_2(x)$, либо $\Gamma_2(x)$ содержит такие вершины a,b, что $\mu(a,x)=8,\mu(b,x)=10$ и $\mu(x,y)=9$ для любой вершины $y \in \Gamma_2(x)-\{a,b\}$. Пусть e — вершина из $[w]-([u]\cup[z])$. Тогда $[e]$ содержит не менее 5 вершин из $[u]\cap[z]$, не более 4 вершин из $[u]\cap[w]$ и не менее 7 вершин из $[w]\cap[z]$. Противоречие с тем, что $\mu(e,y)\geqslant 12$. $\rhd$

Лемма 1.6. *Пусть* Γ *— реберно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ), $b_1=7, k=21+\gamma$ *и* $\gamma\geqslant 0$. *Тогда* γ *нечетно, и* Γ *не содержит почти хороших пар.*

$\lhd$ Пусть $b_1=7, k=21+\gamma$, $\gamma\geqslant 0$ и Γ содержит почти хорошую пару (u,w). Заметим, что диаметр Γ равен 2, и если Γ — сильно регулярный граф, то он является графом в половинном случае или имеет собственное значение -2. В первом случае $\mu=b_1\neq k-2b_1+2$. В случае $n\times n$-решетки имеем $b_1=n-1$ и $n=8$. В случае треугольного графа $T(m)$ имеем $b_1=m-3$ и $m=10$. В любом случае $k<3b_1$. Значит, Γ не является сильно регулярным графом и $|u^\perp\cup w^\perp|=35+\gamma$.

Допустим, что $\mu(u,z)=9+\gamma$ для смежной с w вершины z из $\Gamma_2(u)$. Положим $\Delta=[u]\cap[w]\cap[z]$ и $\delta=|\Delta|$. Если $\delta\leqslant 2$, то $\gamma=0$, $k=21$, $\lambda=13$, противоречие с тем, что $k\lambda$ четно.

Пусть $\delta\geqslant 3$. Ввиду леммы 1.4 граф Δ является кликой. Положим $\Sigma=[w]\cap[z]-[u]$. Тогда $|\Sigma|=13+\gamma-\delta$. Для двух вершин a_1, a_2 из Δ подграф $[a_1]\cap[a_2]$ содержит u, w, z, не менее $14+2\gamma-\delta$ вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$ и не более $\delta-\gamma-4$ вершин из Σ.

Покажем, что $\delta\geqslant\gamma+5$. В противном случае $\delta\leqslant\gamma+4$, $|\Sigma|\geqslant 9$, для любой вершины a_i из Δ имеем $|\Sigma-[a_i]|\geqslant 4$ и для двух вершин a_1, a_2 из $\Delta-\{a_i\}$ подграф $[a_1]\cap[a_2]$ содержит не менее 2 вершин из $\Sigma-[a_i]$, противоречие. Так как $|\Gamma_2(u)|\geqslant 11+\delta-\gamma$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $7(21+\gamma)$, но не меньше $16(9+\gamma)$. Отсюда $9\gamma\leqslant 3$, $\gamma=0$, $k=21$, $\lambda=13$, противоречие с тем, что $k\lambda$ четно.

Итак, $\mu(u,z)>9+\gamma$ для любой смежной с w вершины z из $[w]-[u]$. Теперь число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $7(21+\gamma)$, но не меньше $13(10+\gamma)-1$. Отсюда $6\gamma\leqslant 18$. В случае $\gamma=3$ имеем $v=38$, $k=24$, $\lambda=16$, подграф $[u]\cap[w]$ является полным многодольным с долями порядка 2, и каждая вершина из $\Gamma_2(u)-\{w\}$ смежна с 13 вершинами из $[u]$. Пусть $z\in\Gamma_2(u)-\{w\}$, $\Gamma-(u^\perp\cup z^\perp)=\{y\}$. По лемме 1.1 имеем $\mu(u,y)=\mu(u,z)=13$. Поэтому $[y]$ содержит 2 вершины из $[u]\cap[z]$ и по 10 вершин из $[u]-[z]$ и из $[z]-[u]$. Для вершины $a\in[u]\cap[z]\cap[y]$ степень a в графе $[u]\cap[z]$ равна 11. Противоречие с тем, что $[a]-y^\perp$ содержит u, z и не менее 10 вершин из $[u]\cap[z]$.

Значит, $\gamma=1$, $k=22$, $\lambda=14$ и v делится на 3. Если $v\geqslant 39$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $7\cdot 22$, но не меньше $16\cdot 11$, противоречие. Итак, $v=36$ и $\Gamma=u^\perp\cup w^\perp$.

Пусть $\mu(u,z)=11$, $\Gamma-(u^\perp\cup z^\perp)=\{y\}$ и $[y]$ содержит l вершин из $[u]\cap[z]$. По лемме 1.1 имеем $\mu(u,y)=\mu(u,z)=11+l/2$. Если $l=0$, то $[y]=([u]-[z])\cup([z]-[u])$. Поэтому $[w]$ содержит по 6 вершин из $[u]\cap[z]$ и из $[u]-[z]$, противоречие. Для вершины $a\in[u]\cap[z]\cap[y]$ степень a в графе $[u]\cap[z]$ равна 9. Если $0<l\leqslant 4$, то $[a]-y^\perp$ содержит u, z и 6 вершин из $[u]\cap[w]$, противоречие. Если $l=6$, то $[a]-y^\perp$ содержит u, z, не менее 4 вершин из $[u]\cap[z]$ и не более 1 вершины из $([u]-[z])\cup([z]-[u])$. Поэтому $[a]$ содержит 9 вершин из 16-вершинного подграфа $\Phi=([u]\cap[y]-[w])\cup([w]\cap[y]-[u])$. Для попарно смежных вершин $a,c,e\in[u]\cap[z]\cap[y]$ подграф $[a]\cap[c]$ содержит u, w, y, не менее 6 вершин из $[u]\cap[w]$ и не более 5 вершин из Φ, и $[e]$ содержит по 3 вершины из $\Phi-[a]$ и из $\Phi-[c]$. Отсюда подграф $[u]\cap[z]\cap[y]$ является кликой и для подходящей вершины $f\in[u]\cap[z]\cap[y]-\{e\}$ подграф $[e]\cap[f]$ содержит 3 вершины из $\Phi-([a]\cup[c])$ и еще одну вершину из Φ, противоречие.

Если $l=10$, то $\mu(u,y)=\mu(u,z)=16$, число ребер между $[y]$ и $\Gamma_2(y)-\{u,z\}$ равно 122, поэтому найдется по крайней мере 8 вершин e_i из $\Gamma_2(y)-\{u,z\}$ с $\mu(y,e_i)=11$. Без ограничения общности, 4 из этих вершин попадают в $[z]-[u]$. Для $e_i\in[z]-[y]$ имеем $\Gamma-(e_i^\perp\cup y^\perp)=\{u\}$ и по лемме 1.1 имеем $\mu(u,e)=16$. Противоречие с тем, что число ребер между $[y]$ и $\Gamma_2(u)-(\{w,y,z\}\cup\{e_i\})$ равно 53. Если $l=8$, то $\mu(u,y)=\mu(u,z)=15$, число ребер между $[y]$ и $\Gamma_2(y)-\{u,z\}$ равно 124, поэтому найдется по крайней мере 6 вершин e_i из $\Gamma_2(y)-\{u,z\}$ с $\mu(y,e_i)=11$. Если 3 из этих вершин попадают в $[z]-[u]$ или в $[u]-[z]$, то мы получим противоречие как и выше. Значит, $\{e_i\}$ содержит по 2 вершины из $[u]\cap[z]$, $[z]-[u]$, $[u]-[z]$ и число ребер между $[y]$ и $\Sigma=\Gamma_2(u)-(\{w,y,z\}\cup\{e_i\})$ равно 88. Поэтому $[u]-([y]\cup[z])$ и $[z]-([y]\cup[u])$ содержат по 2 вершины x_j с $\mu(x,y)=15$. Противоречие с тем, что число ребер между $[y]$ и $\Gamma_2(y)-(\{u,z\}\cup\{x_j\})$ равно 64.

Итак, $\Gamma_2(u)$ не содержит вершин z с $\mu(u,z)=11$. Поэтому $\mu(u,y)=12$ для любой вершины $y\in\Gamma_2(u)-\{w\}$. Положим $\Gamma-(u^\perp\cup y^\perp)=\{z,z'\}$. Если вершины z, z' смежны, то $[z]$ содержит 3 вершины из $[u]\cap[z]$ и по 9 вершин из $[u]-[y]$, $[y]-[u]$. Если же вершины z, z' не смежны, то $[z]$ содержит 2 вершины из $[u]\cap[z]$ и по 10 вершин из $[u]-[y]$, $[y]-[u]$. В любом случае для вершины a из $[u]\cap[y]\cap[z]$ подграф $[a]-z^\perp$ содержит u, y и не менее 7 вершин из $[u]\cap[z]$, противоречие. $\rhd$

§ 2. Почти хорошие тройки в графах с $k\geqslant 3b_1$

В этом параграфе Γ является связным реберно регулярным графом с $k=3b_1+\gamma$, $\gamma\geqslant 0$. Пусть $b_1\leqslant 5$. Тогда Γ не содержит хороших пар, а если Γ содержит почти хорошую пару, то по лемме 1.5 граф Γ является графом Клебша или графом Шлефли и выполняется заключение предложения 1.

Лемма 2.1. *Пусть $b_1>5$, $\mu(u,w)+\mu(u,z)\leqslant 2b_1+2\gamma+4$ для смежных вершин w, z из $\Gamma_2(u)$, $\Delta=[u]\cap[w]\cap[z]$ и $\delta=|\Delta|$. Тогда подграф Δ является кликой и либо $\gamma=0$, $\mu(u,w)=\mu(u,z)=b_1+2$, $\delta=2$, $b_1\geqslant 8$ и $|\Gamma_2(u)|=2b_1-1$, либо выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\delta\geqslant b_1/2+\gamma+2$;*

(2) *если $\mu(u,w)=\mu(u,z)=b_1+\gamma+2$, то для любой вершины y из $[z]-(w^\perp\cup[u])$ имеем $\mu(u,y)\geqslant b_1+\gamma+3$, а для любой вершины x из $[w]\cap[z]-[u]$ имеем $\mu(u,x)\geqslant b_1+\gamma+2$;*

(3) *если $\mu(u,w)=b_1+\gamma+1$, $\mu(u,z)=b_1+\gamma+3$, то для любой вершины y из $[z]-(w^\perp\cup[u])$ имеем $\mu(u,y)\geqslant b_1+\gamma+2$, а для любой вершины x из $[w]-[u]$ имеем $\mu(u,x)\geqslant b_1+\gamma+3$.*

$\lhd$ Если $\delta\leqslant 2$, то $[z]-w^\perp$ или $[w]-z^\perp$ содержит не менее b_1 вершин из $[u]$, поэтому $\gamma=0$, $\mu(u,w)=\mu(u,z)=b_1+2$ и $\delta=2$. Если Δ содержит две несмежные вершины a,c, то $[a]\cap[u]$ содержит по b_1 вершин из $[w]$ и из $[z]$, противоречие с тем, что $\lambda=2b_1-1$. Значит, Δ является 2-кликой и $\mu(u,w)=\mu(u,z)=b_1+2$. Так как $[w]-z^\perp$ содержит b_1 вершин из $[u]$, то $\Gamma_2(u)\cap([w]\cup[z])=\{w,z\}\cup([w]\cap[z])$. Ввиду лемм 1.5, 1.6 имеем $b_1\geqslant 8$ и выполняется заключение леммы.

Пусть $3\leqslant\delta<b_1/2+\gamma+2$. Ввиду леммы 1.4 граф Δ является кликой. Положим $\Sigma=[w]\cap[z]-[u]$. Тогда $|\Sigma|=\lambda-\delta>3b_1/2-3$ и для двух вершин a_1,a_2 из Δ подграф $[a_1]\cap[a_2]$ содержит u, w, z, $\delta-2$ вершин из Δ, не менее $2b_1+2\gamma-2\delta$ вершин из $([u]-\Delta)\cap([w]\cup[z])$ и не более $\delta-\gamma-2$ вершин из Σ. Докажем сначала утверждение

(a) $\delta\geqslant b_1/2+\gamma+1$.

В противном случае $|\Sigma|>3b_1/2-2$, для любой вершины a_i из Δ имеем $|\Sigma-[a_i]|>b_1/2$ и для двух вершин a_1, a_2 из $\Delta-\{a_i\}$ подграф $[a_1]\cap[a_2]$ содержит более $3b_1/2+\gamma-3$ вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$ и менее $b_1/2-1$ вершин из Σ. Отсюда $b_1=2t+1$, $|\Sigma-[a_i]|=t+1$ и для двух вершин a_1, a_2 из $\Delta-\{a_i\}$ подграф $[a_1]\cap[a_2]$ содержит $t-1$ вершин из $\Sigma-[a_i]$. Отсюда $|\Sigma-[a_i]|=t+1$, $|[a_i]\cap\Sigma|=2t-1$ и $\delta=t+1+\gamma$. Если $\delta>3$, то $[a_4]\cap\Sigma$ содержит единственную вершину из $[a_i]\cap\Sigma$ и $t-1=1$, противоречие. Если $\delta=3$, то $\gamma=0$ и снова $t=2$, противоречие с леммой 1.5. Утверждение (a) доказано.

Предположим, что $b_1 = 2t$ и $\delta = t + \gamma + 1$. Тогда $|\Sigma| = 3t - 2$ и $[a_1] \cap [a_2]$ содержит u, w, z, не менее $3t + \gamma - 3$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и не более $t - 1$ вершин из Σ. Докажем утверждение

(b) каждая вершина из Δ смежна с $b_1 - 2$ вершинами из Σ.

Допустим, что $[a_1]$ содержит не более $b_1 - 3$ вершин из Σ. Тогда $|\Sigma - [a_1]| \geqslant t + 1$, поэтому $[a_1]$ содержит точно $b_1 - 3$ вершин из Σ. Если $[a_2]$ содержит $b_1 - 3$ вершин из Σ, то $[a_3] \cap [a_4]$ содержит не менее $2t - 3$ вершин из Σ и $2t - 3 \leqslant t - 1$, противоречие. Значит, $[a_i]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из Σ для любой вершины $a_i \in \Delta - \{a_1\}$. Поэтому $[a_2] \cup [a_3]$ содержит $2t - 4$ вершин из $[a_1] \cap \Sigma$, $[a_4] \cap \Sigma$ содержит единственную вершину из $[a_1] \cap \Sigma$ и $t - 2 = 1$. Противоречие с леммой 1.5. Докажем утверждение

(c) каждая вершина из Σ смежна не менее чем с $t + \gamma - 1$ вершинами из Δ.

Предположим, что 3 вершины a_1, a_2, a_3 из Δ не смежны с вершиной y из Σ. Ввиду леммы 1.6 для любых различных $i, j \in \{1, 2, 3\}$ подграф $[a_i] \cup [a_j]$ содержит $\Sigma - \{y\}$. Поэтому $\Sigma - \{y\}$ содержит по $t - 1$ вершин из $\Sigma - [a_i]$ для $i = 1, 2, 3$. Для $a_4 \in \Delta - \{a_1, a_2, a_3\}$ подграф $[a_4]$ содержит y и не менее $3(t - 2)$ вершин из $\Sigma - \{y\}$. Отсюда $t \leqslant 3$, противоречие с леммой 1.5. Докажем утверждение

(d) Σ не содержится в $[a_1] \cup [a_2]$ для любых $a_1, a_2 \in \Delta$.

Пусть $\Sigma \subset [a_1] \cup [a_2]$. Тогда Σ содержит $t - 2$ вершин из $[a_1] \cap [a_2]$ и по t вершин из $[a_1] - [a_2]$, $[a_2] - [a_1]$. Далее, $\Sigma \cap [a_3]$ содержит по $b_1/2 - 1$ вершин из $[a_1] - [a_2]$, $[a_2] - [a_1]$ и не пересекает $[a_1] \cap [a_2]$. Но в этом случае вершина из $\Sigma \cap [a_1] \cap [a_2]$ не смежна ни с одной вершиной из $\Delta - \{a_1, a_2\}$, и по утверждению (c) имеем $t = 3$. Противоречие с леммой 1.5. Утверждение (d) доказано.

Число пар вершин в Δ равно $\binom{t+\gamma+1}{2}$. Из утверждений (c, d) следует, что $\binom{t+\gamma+1}{2} = 3b_1/2 - 2$. Отсюда $\gamma = 0$ и $b_1 = 8$. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $[u] \cap [z] - [w]$ не смежна с парой вершин a_i, a_j из Δ и $[a_i] \cap [a_j]$ содержит u, w, z, 10 вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и 3 вершины из Σ.

Предположим теперь, что $b_1 = 2t + 1$ и $\delta = t + \gamma + 2$. Тогда $|\Sigma| = 3t - 1$ и $[a_1] \cap [a_2]$ содержит u, w, z, не менее $3t + \gamma - 2$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и не более t вершин из Σ. Докажем утверждение

(e) если вершина a_1 из Δ смежна менее чем с $b_1 - 2$ вершинами из Σ, то $|\Sigma \cap [a_1]| = b_1 - 3$ и $[a_i]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из Σ для любой вершины $a_i \in \Delta - \{a_1\}$.

Допустим, что $[a_1]$ содержит $b_1 - 4 = 2t - 3$ вершин из Σ. Тогда $|\Sigma - [a_1]| = t + 2$, поэтому $[a_i]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из Σ для любой вершины $a_i \in \Delta - \{a_1\}$. Поэтому $[a_2] \cap [a_3]$ содержит $2t - 4$ вершин из $[a_1] \cap \Sigma$, $[a_4] \cap \Sigma$ содержит единственную вершину из $[a_1] \cap \Sigma$ и $t - 2 = 1$. Противоречие с леммой 1.6.

Допустим, что $[a_1]$ содержит $b_1 - 3 = 2t - 2$ вершин из Σ. Тогда $|\Sigma - [a_1]| = t + 1$. Если $[a_2]$ содержит $b_1 - 3$ вершин из Σ, то $[a_3] \cap [a_4]$ содержит не менее $2t - 3$ вершин из Σ и $2t - 3 \leqslant t$. Противоречие с леммой 1.6. Значит, $[a_i]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из Σ для любой вершины $a_i \in \Delta - \{a_1\}$. Докажем утверждение

(f) каждая вершина из Σ смежна не менее чем с $t + \gamma$ вершинами из Δ.

Предположим, что 3 вершины a_i, a_j, a_l из Δ не смежны с вершиной y из Σ. Ввиду леммы 1.4 объединение окрестностей любых двух вершин из $\{a_i, a_j, a_l\}$ содержит $\Sigma - \{y\}$. Поэтому $\Sigma - \{y\}$ содержит по $t - 1$ вершин из $\Sigma - [a_i]$, $\Sigma - [a_j]$ и t вершин из $\Sigma - [a_l]$. Для $a \in \Delta - \{a_i, a_j, a_l\}$ подграф $[a]$ содержит y и не менее $3t - 5$ вершин из $\Sigma - \{y\}$. Отсюда $t \leqslant 3$, противоречие с леммой 1.6. Утверждение (f) доказано.

Теперь число ребер между Σ и Δ не больше $(t+\gamma+2)(2t-1)$, но не меньше $(3t-1)(t+\gamma)$. Поэтому $t^2 + t\gamma \leqslant 4t - 2$, противоречие с тем, что $t \geqslant 4$.

Итак, $\delta \geqslant b_1/2 + \gamma + 2$. Так как $b_1 \geqslant 8$, то $\delta \geqslant 6 + \gamma$. Утверждение (1) доказано.

Если $\mu(u,w)=\mu(u,z)=b_1+\gamma+2$, то для любой вершины y из $[z]-(w^\perp\cup[u])$ имеем $\mu(u,y)\geqslant b_1+\gamma+3$. Иначе $[u]\cap[y]$ не пересекает $[w]$ и содержит не более $b_1/2$ вершин из $[z]-[w]$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\mu(u,w)=b_1+\gamma+1$, $\mu(u,z)=b_1+\gamma+3$. Тогда для любой вершины y из $[z]-(w^\perp\cup[u])$ имеем $\mu(u,y)\geqslant b_1+\gamma+2$. Иначе $[u]\cap[y]$ содержит не более $b_1/2$ вершин из $[z]$. А для любой вершины x из $[w]-[u]$ ввиду леммы 1.5 имеем $\mu(u,x)\geqslant b_1+\gamma+3$. $\rhd$

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.1, $\delta>2$ и $\Sigma=[w]\cap[z]-[u]$. Тогда каждая вершина из Δ смежна по крайней мере с $\delta-\gamma-4$ вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $\gamma=0$, то $b_1\geqslant 12$;*

(2) *каждая вершина из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна не более чем с 3 вершинами из Δ;*

(3) *$\delta<b_1+\gamma-3$ и $b_1\geqslant 11$;*

(4) *некоторая вершина из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с 3 вершинами из Δ.*

$\lhd$ Пусть $\delta>2$, $a\in\Delta$. Тогда $[a]\cap[u]$ содержит не более $2b_1+2\gamma+3-\delta$ вершин из $[w]\cup[z]$ и не менее $\delta-\gamma-4$ вершин из $[u]-([w]\cup[z])$.

Пусть $\gamma=0$. Тогда $\delta\geqslant b_1/2+2$, $k=3b_1$, $\lambda=2b_1-1$ и b_1 четно. Если $\mu(u,w)=\mu(u,z)=b_1+2$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $(2\delta-4)(b_1+3)+(2b_1+1-\delta)(b_1+2)$. Поэтому $\delta(b_1+4)\leqslant b_1^2-b_1+10$ и $b_1/2\geqslant 7-30/(b_1+4)$. Если $\mu(u,w)=b_1+1$, $\mu(u,z)=b_1+3$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $(\delta-1)(b_1+2)+(2b_1-3)(b_1+3)$. Поэтому $\delta(b_1+2)\leqslant b_1^2-2b_1+11$ и $b_1/2\geqslant 6-19/(b_1+2)$. В любом случае $b_1\geqslant 10$.

Пусть $b_1=10$. Тогда $k=30$, $\lambda=19$, $|\Sigma|=12$ и $\delta=7$. Заметим, что каждая вершина из Σ смежна не менее чем с 4 вершинами из Δ. Так как число ребер между Δ и Σ не больше 56, то Σ содержит 4 вершины $y_1,\dots,y_4$, смежные с четверками вершин из Δ. Пусть вершина y_1 не смежна с вершинами $a_1,\dots,a_3$ из Δ. Тогда $[a_i]\cap[a_j]$ не пересекает $[u]-([w]\cup[z])$ и $\Sigma-[a_i]$ не пересекает $\Sigma-[a_j]$ для различных $i,j\in\{1,2,3\}$. Поэтому можно считать, что $|\Sigma-[a_1]|=|\Sigma-[a_2]|=5$ и $|\Sigma-[a_3]|=4$. Отсюда подграф $[u]-([w]\cup[z])$ разбивается его пересечениями с $[a_i]$. Противоречие с тем, что для подходящих $a\in\Delta-\{a_1,\dots,a_3\}$ и $i\in\{1,2,3\}$ подграф $[a]\cap[a_i]$ содержит 2 вершины из $[u]-([w]\cup[z])$. Утверждение (1) доказано.

Пусть e — вершина из $[u]-([w]\cup[z])$, смежная с 4 вершинами $a_1,\dots,a_4$ из Δ. Тогда $|\Sigma-[a_i]|\geqslant b_1+1+\gamma-\delta$, $[a_4]$ содержит не меньше $3(b_1+1+\gamma-\delta)$ вершин из $(\Sigma-[a_1])\cup(\Sigma-[a_2])\cup(\Sigma-[a_3])$ и $3(b_1+1+\gamma-\delta)\leqslant b_1-2$. Поэтому $\delta\geqslant(2b_1+5)/3+\gamma$.

Так как $4(\delta-\gamma-5)\leqslant b_1+\delta-\gamma-5$, то $(2b_1+5)/3+\gamma\leqslant\delta\leqslant b_1/3+\gamma+5$ и $b_1\leqslant 9$.

Пусть $b_1=8$. Тогда $\delta=7+\gamma$, $k=24+\gamma$, $\lambda=15+\gamma$. Далее, каждая вершина a_i смежна с 6 вершинами из Σ и число ребер между $[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ и $\{a_1,\dots,a_4\}$ равно 16. Противоречие с тем, что $|[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})|=10$.

Пусть $b_1=9$. Тогда $\delta=8+\gamma$, $k=27+\gamma$, $\lambda=17+\gamma$. Далее, либо каждая вершина a_i смежна с 7 вершинами из Σ, либо одна вершина a_i смежна с 6 вершинами из Σ, а остальные с 7. Поэтому число ребер между $[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ и $\{a_1,\dots,a_4\}$ не меньше 19. Противоречие с тем, что $|[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})|=12$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\delta\geqslant b_1+\gamma-3$. Если $\mu(u,w)=\mu(u,z)=b_1+2$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $(2b_1-10)(b_1+\gamma+3)+(b_1+4)(b_1+\gamma+2)$. Поэтому $2b_1\gamma+2b_1\leqslant 6\gamma+22$, $\gamma=0$ и $b_1\leqslant 11$. Противоречие с утверждением (1). Если $\mu(u,w)=b_1+1$, $\mu(u,z)=b_1+3$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $(b_1-4)(b_1+\gamma+2)+(2b_1-2)(b_1+\gamma+3)$. Поэтому $2b_1\gamma+2b_1\leqslant 6\gamma+14$, противоречие.

Итак, $b_1/2+\gamma+2<b_1+\gamma-3$ и $b_1>10$. Утверждение (3) доказано.

Если каждая вершина из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна не более чем с 2 вершинами из Δ, то $2(b_1+\delta-\gamma-4)\geqslant\delta(\delta-\gamma-4)$. Поэтому $2(b_1-\gamma-4)\geqslant\delta(\delta-\gamma-6)\geqslant(b_1/2+\gamma+2)(b_1/2-4)$ и

$b_1^2+b_1(2\gamma-12)-8\gamma+8\leqslant 0$. В случае $\gamma=0$ имеем $b_1\leqslant 11$, противоречие с утверждением (1). Если $1\leqslant\gamma\leqslant 5$, то $b_1\leqslant 10$, противоречие с утверждением (3). В случае $\gamma\geqslant 6$ имеем $b_1(b_1+\gamma)-12b_1+b_1\gamma-8\gamma+8>0$, противоречие. $\rhd$

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия леммы 2.1, $\delta>2$ и вершина e из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с тремя вершинами a_1, a_2, a_3 из Δ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $\delta\geqslant(2b_1+2)/3+\gamma$ *и* $b_1\geqslant 14$*;*

(2) $\gamma=0$, $b_1=14$ *и* $\delta=10$.

$\lhd$ Заметим, что $|\Sigma-[a_i]|\geqslant b_1+\gamma+1-\delta$, поэтому для любой вершины $a\in\Delta-[e]$ подграф $[a]$ содержит по $b_1+\gamma-\delta$ вершин из $\Sigma-[a_i]$, $3(b_1+\gamma-\delta)\leqslant b_1-2$ и $\delta\geqslant(2b_1+2)/3+\gamma$. Теперь $(2b_1+2)/3+\gamma\leqslant\delta<b_1+\gamma-3$ и $b_1\geqslant 14$. Утверждение (1) доказано.

Так как каждая вершина из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна не более чем с 3 вершинами из Δ, то $3(b_1+\delta-\gamma-4)\geqslant\delta(\delta-\gamma-4)$. Поэтому $3(b_1-\gamma-4)\geqslant\delta(\delta-\gamma-7)\geqslant((2b_1+2)/3+\gamma)((2b_1+2)/3-7)$ и $4b_1^2+6b_1\gamma-61b_1-30\gamma+70\leqslant 0$.

В случае $\gamma=0$ имеем $4b_1^2-61b_1+70\leqslant 0$ и $b_1\leqslant 14$. В случае $\gamma=1$ имеем $b_1\leqslant 12$. В случае $\gamma=2$ имеем $4b_1^2-49b_1+10\leqslant 0$ и $b_1\leqslant 12$. В случае $\gamma=3$ имеем $b_1\leqslant 11$. В случаях $4\leqslant\gamma\leqslant 5$ имеем $b_1\leqslant 10$. Наконец, если $\gamma\geqslant 6$, то $(4b_1^2+3b_1\gamma-61b_1)+(3b_1\gamma-30\gamma)+70>0$, противоречие. $\rhd$

Завершим доказательство предложения 1. Имеем $\gamma=0$, $b_1=14, k=42, \lambda=27$ и $\delta=10$. Но в этом случае $4b_1^2-61b_1+70=0$, поэтому каждая вершина из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна точно с 3 вершинами из Δ, и каждая вершина из Δ смежна точно с $\delta-\gamma-4=6$ вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$. Отсюда каждая вершина из Δ смежна точно с 10 вершинами из Σ.

Пусть вершина e из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с тремя вершинами a_1,a_2,a_3 из Δ. Тогда $|\Sigma-[a_i]|=7$ и $\Sigma\cap[a_3]$ содержит по 7 вершин из $\Sigma-[a_1]$ и из $\Sigma-[a_2]$, противоречие. $\rhd$

§ 3. Реберно регулярный граф с $k=17$, $b_1=6$

В этом параграфе Γ является связным реберно регулярным графом с $k=17$, $b_1=6$. По следствию из [7] Γ является графом диаметра 2 с не более чем $2k$ вершинами. Так как $\lambda=10$, число vk четно и $vk\lambda$ делится на 6, то $v=30$.

Лемма 3.1. *Пусть вершины u, w несмежны и $\mu=|[u]\cap[w]|$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $\mu\geqslant 6$ *и* $\Gamma=u^\perp\cup w^\perp$ *в случае* $\mu=6$*;*

(2) Γ *не содержит почти хороших пар.*

$\lhd$ Так как $k-2b_1+1=6$, то $\mu\geqslant 6$, причем в случае $\mu=6$ получим $\Gamma=u^\perp\cup w^\perp$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\mu=7$, $z\in\Gamma-(u^\perp\cup w^\perp)$ и $[z]$ содержит l вершин из $[u]\cap[w]$. По лемме 1.1 имеем $\mu(u,z)=\mu(w,z)$ и $17=2\mu(u,z)-l$, поэтому l нечетно и $\mu(u,z)=(17+l)/2$.

Пусть X_i — множество вершин из $([u]-[w])\cup([w]-[u])$, смежных точно с i вершинами из $[u]\cap[w]$, $x_i=|X_i|$. Заметим, что $x_0=0$, иначе для $a\in X_0\cap([w]-[u])$ имеем $\lambda(w,a)<10$. Если $a\in X_1\cap([w]-[u])$, то либо $[a]$ содержит z и 5 вершин из $[u]-[w]$, либо $[a]$ содержит 6 вершин из $[u]-[w]$. В любом случае $l\neq 7$. Иначе для вершины $b\in[u]\cap[w]\cap[a]$ подграф $[b]-a^\perp$ содержит u и 6 вершин из $[u]\cap[w]$, противоречие.

Если $l=1$, $y\in[u]\cap[w]\cap[z]$, то $[y]-z^\perp$ содержит u, w и 6 вершин из $[u]\cap[w]$, противоречие.

Если $l=7$, то $\sum x_i=20$, $\sum ix_i=56$, $\sum\binom{i}{2}x_i=42$ и $x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i=6$. Отсюда $x_i=0$ для $i>4$, $x_2=14+2x_4, x_3=6-3x_4$ и $(28+4x_4)+(18-9x_4)+4x_4=56$, противоречие.

Пусть $[u]\cap[w]\cap[z] = \{y_1, \ldots, y_l\}$. Тогда $[y_i]\cap[y_j]$ содержит u, w, z, 5 вершин из $[u]\cap[w]$ и 2 вершины из $([u]-[w])\cup([w]-[u])$.

Пусть $l = 3$. Тогда $[y_i]-z^\perp$ содержит u, w и 4 вершины из $[u]\cap[w]$, поэтому $[y_i]\cap([w]-[u])\subset[z]$. Отсюда $[y_1]\cap[y_2]$ содержит по вершине из $[u]-[w]$ и из $[w]-[u]$. Противоречие с тем, что $[y_3]\cap[u]-[w]$ содержит не менее двух вершин из $[y_1]$ или из $[y_2]$.

Пусть $l = 5$, $\Psi = ([u]-[w])\cup([w]-[u])$. Тогда $[y_i]\cap[z]$ содержит 4 вершины из $[u]\cap[w]$ и 6 вершин из Ψ. Если $[y_1]\cap[y_2]$ содержит не более одной вершины из Ψ, то $[y_3]\cap\Psi$ содержит не менее трех вершин из $[y_1]$ или из $[y_2]$. Значит, $[y_i]\cap[y_j]$ содержит точно две вершины из Ψ для любых различных $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$. Далее, $[y_3]$ содержит обе вершины из $\Psi-([y_1]\cup[y_2])$ и не пересекает $\Psi\cap[y_1]\cap[y_2]$. Противоречие с тем, что $[y_5]\cap\Psi$ содержит обе вершины из $[y_3]\cap[y_4]$. $\rhd$

До конца параграфа будем предполагать, что Γ содержит хорошую пару вершин u, w. Пусть $\Delta = [u]\cap[w]$, X_i — множество вершин из $([u]-[w])\cup([w]-[u])$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$.

Лемма 3.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $\sum x_i = 22$, $\sum ix_i = 60$, $\sum \binom{i}{2}x_i = 60$;

(2) *если* $z \in X_0\cap([w]-[u])$, *то* $\mu(u, z) = 6$ *и каждая вершина из* $[w]\cap[z]$ *смежна точно с тремя вершинами из* $[u]-([w]\cup[z])$, *из* $[u]\cap[w]$ *и из* $[u]\cap[z]$.

$\lhd$ Подсчитав число ребер между Δ и $([u]-[w])\cup([w]-[u])$, а также число 2-путей с началом и концом в Δ и средней вершиной в $([u]-[w])\cup([w]-[u])$, получим равенства $\sum x_i = 22$, $\sum ix_i = 60$, $\sum \binom{i}{2}x_i = 60$. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что $[w]-[u]$ содержит вершину z из X_0. Тогда $\Gamma = u^\perp\cup\{w, z\}\cup([w]\cap[z])$.

Допустим, что вершина b из $[u]-[w]$ смежна точно с 1 вершиной из $[u]\cap[w]$. Тогда $\mu(b, z) = 7$, противоречие с леммой 3.1.

Если вершина a из $[w]\cap[z]$ смежна точно с l вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$, то $[a]$ содержит w, z, по $6-l$ вершин из $[u]\cap[w]$, $[u]\cap[z]$ и $3+l$ вершин из $[w]\cap[z]$. По лемме 3.1 $l \leqslant 4$. В случае $l = 4$ подграф $[a]$ содержит точно две вершины b, b' из $[u]\cap[w]$, точно две вершины c, c' из $[u]\cap[z]$ и 7 вершин из $[w]\cap[z]$. В этом случае $[u]-([a]\cup[w]\cup[z])$ содержит единственную вершину u', и $[w]\cap[z]$ содержит точно две вершины a', a'' вне $a^\perp$. Положим $\Phi = [a]\cap[w]\cap[z]$. Рассмотрев почти хорошую тройку (u, w, a), убедимся, что $[b]\cap[b']$ содержит u, w, a, 4 вершины из $[u]\cap[w]$, не менее 2 вершин из $[u]\cap[a]$ и не более одной вершины из Φ. Симметрично, $[c]\cap[c']$ содержит не более одной вершины из Φ.

Если b смежна с вершиной из $\{a', a''\}$, скажем с a', то $[b]\cap[b']$ содержит точно 3 вершины из $[u]\cap[a]-[w]$ и вершины a', a'' несмежны с b'. Кроме того, $[b]\cap[z]$ содержит a', w, 4 вершины из $[a]\cap[w]$ и по крайней мере одну вершину из $\{c, c'\}$. Так как $\mu(b, z) > 7$, то b смежна с c, c' и тройка (z, u, b) является почти хорошей. Далее, вершины c, c' несмежны с вершиной w из $[b]\cap[z]$, поэтому $[c]\cap[c']$ содержит b, u, z, 4 вершины из $[u]\cap[z]$ и 3 вершины из $[b]\cap[z]$ (вершину a и 2 вершины из Φ), противоречие.

Итак, $\{b, b', c, c'\}$ не пересекает $[a']\cup[a'']$. Далее, $[b]-a^\perp$ содержит u, 4 вершины из $[u]\cap[w]$ и не более одной вершины из $[u]\cap[z]-\{c, c'\}$. Поэтому $[b]$ содержит по крайней мере одну вершину из $\{c, c'\}$.

Так как $[a']$ содержит не менее двух вершин из $[u]-([w]\cup[z])$, то $[a]\cap[u]$ содержит вершину e, смежную с a', и $|[e]\cap\Phi| \leqslant 4$. Далее, степень e в графах $[a]\cap[u]$, $[a]\cap[a']$ не меньше 6, поэтому $|[a]\cap[u]\cap[a']| \geqslant 3$. Симметрично, $|[a]\cap[u]\cap[a'']| \geqslant 3$ и $[a]\cap[u]$ содержит вершину d, смежную с a', a''. Тогда степень d в графе $[a]\cap[u]$ не меньше 7, поэтому $|[d]\cap\Phi| = 3$, и $|[a]\cap[u]\cap[a']| = 4$. Симметрично, $|[a]\cap[u]\cap[a'']| = 4$. Таким образом, каждая вершина из $\{b, b', c, c'\}$ смежна с 4 вершинами из $([a] \cap [u]) - ([w] \cup [z])$. Противоречие с тем, что степень b в графе $[a] \cap [u]$ равна 5.

Теперь каждая вершина из $[w]\cap[z]$ смежна не более чем с 3 вершинами из $[u]-([w]\cap[z])$ и по крайней мере с 3 вершинами из $[u]\cap[w]$. Но число ребер между $[u]\cap[w]$ и $[w]\cap[z]$ равно 30, поэтому каждая вершина из $[w] \cap [z]$ смежна точно с 3 вершинами из $[u] - ([w] \cap [z])$, из $[u] \cap [w]$ и из $[u] \cap [z]$. $\rhd$

Лемма 3.3. *Если $x_0 \neq 0$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $x_0 = 2, x_3 = 20$;

(2) $x_0 = x_5 = 1, x_2 = 5, x_3 = 15$;

(3) $x_0 = 1, x_2 = 6, x_3 = 12, x_4 = 3$.

$\lhd$ Пусть $z \in X_0 \cap ([w] - [u])$, $X'_i = X_i \cap ([u] - [w])$, $x'_i = |X'_i|$. По лемме 3.2 имеем $[w] \cap [z] \subset X_3([u] \cap [w]) \cap X_3([u] \cap [z])$ и $x'_0 + \sum \binom{i-1}{2} x'_i = 11$.

Если $a \in X'_6$, то $x'_0 + x'_3 = 1$ и $[u] - [w]$ содержит 9 вершин из $X_1 \cup X_2$. Теперь число ребер между $[u] \cap [w]$ и $[u] - [w]$ равно 30, но не больше $9 \cdot 2 + 3 + 6$, противоречие. Пусть $a \in X'_0$. Если $a \in [u] - [z]$, то $a \in X_6([u] \cap [z])$, противоречие. Если же $a \in [u] \cap [z]$, то $\mu(a, w) = 6$ и $\Gamma - w^\perp = \{a, u\} \cup ([a] \cap [u])$. По лемме 3.2 каждая вершина из $[a]\cap[u]$ смежна точно с 3 вершинами из $[u] \cap [w]$, поэтому $x'_3 = 10$ и выполняется утверждение (1).

Если $a \in X'_5$, то $x'_0 + x'_3 = 5$ и $[u] - [w]$ содержит 5 вершин из $X_1 \cup X_2$. Теперь число ребер между $[u] \cap [w]$ и $[u] - [w]$ равно 30, но не больше $5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5$, поэтому $x'_2 = x'_3 = 5$ и выполняется утверждение (2).

Если $x'_0 = x'_5 = 0$, то $x'_2 + x'_3 + x'_4 = 11$, $2x'_2 + 3x'_3 + 4x'_4 = 30$ и $x'_3 + 3x'_4 = 11$, поэтому $x'_2 = 6, x'_3 = 2, x'_4 = 3$. $\rhd$

Хорошую пару (u, w) назовем парой типа (i), если для нее выполнено утверждение (i) из заключения леммы 3.3.

Лемма 3.4. *Граф* Γ *не содержит пар типов* $(2 - 3)$.

$\lhd$ Пусть $z \in X_0 \cap ([w] - [u])$. Допустим, что $[u] \cap [z]$ содержит вершину e из X_2. Положим $[e] \cap [u] \cap [w] = \{f, f'\}$ и $\Gamma - (e^\perp \cup w^\perp) = \{g, g'\}$. Тогда тройка (w, u, e) является почти хорошей и $[f] \cap [f']$ содержит w, u, e, 4 вершины из $[u] \cap [w]$ и 3 вершины из $[w] \cap [e]$ (так как подграф $[w] \cap [e]$ содержит вершину z, не принадлежащую $[f] \cup [f']$). Отсюда вершины f, f' не принадлежат $[g] \cup [g']$.

Пусть Φ_i — множество вершин из $[w] \cap [e]$, смежных точно с i вершинами из $\{g, g'\}$, $y_i = |\Phi_i|$. Тогда $f, f', z \in \Phi_0$, $y_0 + y_1 \geqslant 5$ (так как $\Phi_0 \cup \Phi_1 - \{z\}$ содержит вершину, несмежную с f и вершину, несмежную с f') и $y_0 + y_2$ четно. Отсюда $y_0 = y_2 = 3$. Для различных h_j, h_l из Φ_2 подграф $[h_j] \cap [h_l]$ содержит e, w, g, g' и 6 вершин из $[e] \cap [w]$, поэтому подграф $[e] - [w]$ имеет разбиение на $([e] - [w]) \cap [h_j]$, $h_j \in \Phi_2$. Противоречие с тем, что u не смежна с вершинами из Φ_2.

Значит, X_2 не пересекает $[u] \cap [z]$. Пусть (u, w) — пара типа (2) или (3). Тогда $X_2 = [u] - ([w] \cup [z])$ и (u, w) — пара типа (2). Далее, число ребер между $[u] \cap [z]$ и $[u] \cap [w]$ равно 20, поэтому некоторая вершина из $[u] \cap [w]$ смежна по крайней мере с 4 вершинами из $[u] \cap [z]$ и (u, z) — пара типа (2) или (3). Снова $X_2([u] \cap [z]) = [u] - ([w] \cup [z])$ и (u, z) — пара типа (2). Противоречие с тем, что для $a \in [u] - ([w] \cup [z])$ подграф $[u] \cap [a]$ содержит по две вершины из $[u] \cap [w]$, $[u] \cap [z]$ и не более 4 вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. $\rhd$

Лемма 3.5. *Параметр x_0 равен* 0.

$\lhd$ Пусть $x_0 \neq 0$ и для определенности $z \in X_0 \cap ([w] - [u])$. Из лемм 2.3, 2.4 следует, что $x_0 = 2$, $x_3 = 20$ и $X_0 \cap ([u] \cap [z])$ содержит вершину y. По лемме 2.2 каждая вершина из $[y] \cap [w] - \{z\}$ смежна точно с 3 вершинами из $[u] \cap [w]$. Поэтому некоторая вершина из

$[u]\cap[w]$ смежна точно с 2 вершинами из $[y]\cup[w]$. С другой стороны, $u\in X_0([y]\cap[w])$ и по лемме 2.4 имеем $|X_2\cap([y]\cap[w])|=0$, противоречие. Лемма и предложение 2 доказаны. $\rhd$

§ 4. Хорошие пары в графах с $k\geqslant 3b_1$

В этом параграфе Γ является связным реберно регулярным графом с параметрами (v,k,λ), $k=3b_1+\gamma$ и $\gamma\geqslant 0$. По лемме 1.4.2 из [2] Γ является графом диаметра 2 с не более чем $2k-2$ вершинами. До конца параграфа будем предполагать, что для некоторой вершины $u\in\Gamma$ подграф $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины w,z, образующие хорошие пары с u. Ввиду леммы 1.5 вершины w,z не смежны. Положим $\mu=\mu(w,z)$.

Лемма 4.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $\Gamma_2(u)$ *содержится в* $w^\perp\cup z^\perp$, $|\Gamma_2(u)|=4b_1-\mu$ *и* $\gamma(b_1+1-\gamma)(b_1+1+\gamma-\mu)$ *делится на* 3*;*

(2) $\mu(u,y)\geqslant b_1+\gamma+4$ *для любой вершины* $y\in\Gamma_2(u)-\{w,z\}$*;*

(3) $b_1+\gamma+7\leqslant\mu\leqslant 2b_1-3$ *и* $b_1\geqslant\gamma+10$.

$\lhd$ Для $a\in\Gamma_2(u)-(w^\perp\cup z^\perp)$ подграф $[a]\cap[u]$ не пересекает $[w]\cup[z]$ и $\mu(a,u)\leqslant b_1-\gamma-2$, противоречие. Поэтому $\Gamma_2(u)$ содержится в $w^\perp\cup z^\perp$. Далее, $|[w]-([u]\cup[z])|=|[z]-([u]\cup[w])|=2b_1-1-\mu$ и $|\Gamma_2(u)|=4b_1-\mu$. Так как $vk\lambda$ делится на 6, то $\gamma(b_1+1-\gamma)(b_1+1+\gamma-\mu)$ делится на 3. Утверждение (1) доказано.

Если $[z]\subset[w]\cup[u]$, то $|\Gamma-(u^\perp\cup w^\perp)|=1$ и по лемме 1.1 имеем $\mu(u,z)=\mu(w,z)$, поэтому $\mu=2b_1-1=b_1+\gamma+1$, $k=4b_1-2$, и для вершины $a\in[u]\cap[w]$ имеем $\mu(a,z)=2b_1-2$, противоречие. Если $\mu=b_1+\gamma+1$, то по предложению из [1] имеем $\gamma=-1$, противоречие. Значит, $\mu\geqslant b_1+\gamma+2$.

Пусть $\mu(u,y)=b_1+2+\gamma$ для $y\in\Gamma_2(u)$. Если $y\in[w]-[z]$, то $[u]\cap[y]$ не пересекает $[z]$ и содержит не более одной вершины из $[w]$ и не более $b_1-2-\gamma$ вершин из $[u]-([w]\cup[z])$, противоречие. Если же $y\in[w]\cap[z]$, то $[u]\cap[y]$ содержит не более одной вершины в каждом из графов $[w]$ и $[z]$ и не более $b_1-2-\gamma$ вершин из $[u]-([w]\cup[z])$, снова противоречие.

Пусть $\mu(u,y)=b_1+3+\gamma$ для $y\in\Gamma_2(u)$. Если $y\in[w]\cap[z]$, то по предложению 1 подграф $[u]\cap[y]$ содержит не более двух вершин в каждом из графов $[w]$ и $[z]$, и $\mu(u,y)\leqslant b_1-\gamma+2$, противоречие. Если же $y\in[w]-[z]$, $[u]\cap[y]$ не пересекает $[z]$, содержит не более двух вершин из $[w]$ и $\mu(u,y)\leqslant b_1-\gamma$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\mu=b_1+\gamma+s$. Тогда число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $3b_1^2+b_1\gamma$, но не меньше $(3b_1-\gamma-s)(b_1+\gamma+4)-6$. Поэтому $s\geqslant(b_1\gamma+12b_1-4\gamma-6)/(b_1+\gamma+4)$ и $s\geqslant 7$. Значит, $\mu\geqslant b_1+\gamma+7$.

Пусть $\mu=2b_1-2$. Тогда $[w]-([u]\cup[z])$ содержит единственную вершину z^* и $[z]-([u]\cup[w])$ содержит единственную вершину w^*. Далее, $[z^*]-w^\perp$ содержит быть может вершину w^* и не менее b_1-1 вершин из $[u]-([w]\cup[z])$, противоречие. $\rhd$

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $\gamma+\mu\leqslant 2b_1-3$*;*

(2) *если* $\mu\leqslant 3b_1/2$, *то* $\gamma\leqslant b_1/3-6$*;*

(3) *если* $3b_1/2<\mu$, *то* $\gamma<5b_1/12-5$.

$\lhd$ Заметим, что $|[u]-([w]\cup[z])+|[z]-([u]\cup[w])|=3b_1-\gamma-\mu-3$. Так как вершина из $[w]-([u]\cup[z])$ смежна с b_1 вершинами из $[u]\cup[z]-[w]$, то $\gamma+\mu\leqslant 2b_1-3$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\mu\leqslant 3b_1/2$. Тогда число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $b_1(3b_1+\gamma)$, но не меньше $(4b_1-\mu)(b_1+\gamma+4)-6$. Поэтому $(b_1^2+3b_1\gamma+16b_1-6)/(b_1+\gamma+4)\leqslant\mu\leqslant 3b_1/2$ и

$\gamma \leqslant b_1/3 - 6 - (2b_1 - 12)/(3b_1)$. Так как $b_1 \geqslant 10$, то $\gamma \leqslant b_1/3 - 6$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\gamma = b_1/2 - 3 - s$, $s > 0$. По утверждению (1) имеем $\mu \leqslant 3b_1/2 + s$.

Пусть $\mu > 3b_1/2$. Тогда $\gamma = b_1/2 - 3 - s$, $s > 0$. Далее, число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $(4b_1 - \mu - 2)(b_1 + \gamma + 4) + 2(b_1 + \gamma + 1)$. Поэтому $(b_1^2 + 3b_1\gamma + 16b_1 - 6)/(b_1 + \gamma + 4) \leqslant \mu$ и $b_1 + 2\gamma + (12b_1 - 2\gamma^2 - 8\gamma - 6)/(b_1 + \gamma + 4) \leqslant \mu \leqslant 2b_1 - 3 - \gamma$. Отсюда $-b_1^2/2 + 2b_1 s + 14b_1 - s^2 + 2s + 9 \leqslant (6 + 3s - b_1/2)(3b_1/2 + 1 - s)$ и $f(s) = b_1^2/4 - 3b_1 s + 11b_1/2 + 2s^2 + 5s + 3 \leqslant 0$. Заметим, что функция $f(s)$ убывает при $s < (3b_1 - 5)/4$ и при $s = b_1/12 + 2$ имеем $f(s) > 0$. Таким образом, $\gamma < 5b_1/12 - 5$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны. $\triangleright$

Литература

1. *Махнев А. А., Падучих Д. В.* Новая оценка для числа вершин реберно регулярных графов // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48.—С. 46–61.
2. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs.—Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.—495 c.
3. *Махнев А. А.* О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. мат.—2004.—Т. 68.—С. 159–172.
4. *Махнев А. А., Веденев А. А., Кузнецов А. Н., Носов В. В.* О хороших парах в реберно регулярных графах // Дискрет. мат.—2003.—Т. 15.—С. 77–97.
5. *Махнев А. А., Омельченко А. С.* О реберно регулярных графах, не содержащих хороших пар // Известия Гомельского госуниверситета.—2007.—Т. 10, № 23.—С. 103–118.
6. *Казарина В. И., Махнев А. А.* О реберно регулярных графах с $b_1 = 5$ // Межд. конф. «Алгебра, логика и кибернетика». Тез. докл.—Иркутск, 2004.—С. 159–161.
7. *Минакова И. М., Махнев А. А.* Об одном классе реберно регулярных графов // Изв. Гомельского госуниверситета.—2000.—Т. 3, № 16.—С. 145–154.

Статья поступила 17 января 2008 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН
Екатеринбург, 620219, РОССИЯ
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Чуксина Наталья Владимировна
Институт математики и механики УрО РАН
Екатеринбург, 620219, РОССИЯ
E-mail: natalia_1@e1.ru