Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2007, Том 9, Выпуск 4

УДК **514.74**

РЕПЕРНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ АФФИННЫХ ЕЛЬМСЛЕВОВЫХ ПЛОСКОСТЕЙ И ω ИЗОТОПИИ АН-ТЕРНАРОВ

Н. Л. Шатохин

В работе получены результаты об алгебраических связях между тернарами двух изоморфных аффинных ельмслевовых плоскостей, которые обобщают известные результаты Скорнякова, Мартина и Стивенсона из теории классических плоскостей.

Ключевые слова: проективная плоскость, аффинная плоскость, ельмслевовы плоскости, тернар, гомоморфизмы, изотопии, смежные точки, смежные прямые.

В статье описываются алгебраические условия, связывающие АН-тернары, координатизирующие изоморфные аффинные ельмслевовы плоскости. В целях единообразия терминологии эти связи названы ω изотопиями.

Выяснению таких условий в случае однозначных аффинных и проективных плоскостей были посвящены статьи [2, 3], а также ряд статей [4–6, 7]. Среди работ недавнего времени посвященных данной проблеме следует также отметить [9].

Подобная проблема, как было отмечено в обзоре [8], становится актуальной для класса АН-плоскостей [1] в связи с их координатизацией тернарными кольцами [10].

Из определения АН-плоскости [1] вытекает, что в любой АН-плоскости H найдется тройка точек p_0, p_1, p_2 такая, что $p_ip_j \not\sim p_ip_k$ для $i \neq j \neq k \neq i$; i, j, $k \in \{0,1,2\}$. Такая тройка точек называется *невырожденной.* Если p_0, p_1, p_2 — невырожденная тройка точек, то упорядоченная тройка (p_0, p_1, p_2) называется *аффинным репером* плоскости H и обозначается $R(p_0, p_1, p_2)$.

Рассмотрим произвольный аффинный репер $R(p_0, p_1, p_2)$ АН-плоскости $H = \langle P, L; I, \|, \sim\rangle$. Обозначим $p_0p_1 = X$, $p_0p_2 = Y$. Тогда $L(p_1, Y) \not\sim Y$, $L(p_2, X) \not\sim X$ и $L(p_1, Y) \cap L(p_2, X) = e$. Совокупность состоящая из точки p_0 и пары прямых X и Y называется *аффинной системой координат* АН-плоскости H соответствующей реперу $R(p_0, p_1, p_2)$. Точка p_0 называется *началом*, а прямые X и Y — *осями* этой системы.

Пусть $R(p_0, p_1, p_2)$ — репер АН-плоскости H; $R'(p'_0, p'_1, p'_2)$ — репер АН-плоскости H', а $f(R) = (f(p_0), f(p_1), f(p_2))$ — образ репера при изоморфизме $f\colon H \to H'$ АН-плоскости H на АН-плоскость H'.

В данной статье решение указанной выше задачи привязано к различным возможным случаям расположения репера $f(R)$ и репера $R'(p'_0, p'_1, p'_2)$. Поэтому рассматриваемые в работе изоморфизмы АН-плоскостей будем называть *реперными изоморфизмами*, соответствующими данному взаимному расположению реперов $f(R)$ и R'.

Понятно, что при решении этой задачи для произвольных АН-плоскостей, параллельно решается аналогичная задача, описывающая алгебраические связи, возникающие между различными АН-тернарами одной АН-плоскости.

Определение 1. АН-плоскость $H = \langle P, L; I, \|, \sim\rangle$ называется *изоморфной* АН-плоскости $H' = \langle P', L'; I, \|, \sim\rangle$, если существуют биекции $f_1 : P \to P'$ и $f_1 : L \to L'$ такие, что выполняются условия:

$$(\forall\, p, L) \quad P\ I\ L \Leftrightarrow f_1(p) I f_2(L), \tag{1}$$

$$(\forall\, L, M) \quad L \parallel M \Leftrightarrow f_2(L) \parallel f_2(M). \tag{2}$$

В дальнейшем будем считать, что $f_1 = f_2 = f$.

Используя результаты статьи [11], нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 1. *Изоморфизм АН-плоскости H на АН-плоскость H' сохраняет отношение смежности на множестве точек и прямых, а несмежные точки и несмежные прямые плоскости H переводит, соответственно, в несмежные точки и несмежные прямые плоскости H'.*

Направление АН-плоскости H, которое определяет прямая M этой плоскости обозначаем Π_M.

Следствие 1. *Всякий изоморфизм f АН-плоскости H на АН-плоскость H' удовлетворяет условию*

$$\Pi_M \sim \Pi_L \Leftrightarrow \Pi_{f(M)} \sim \Pi_{f(L)}. \tag{3}$$

Замечание 1. Из определения 1 вытекает, что отношение изоморфизма АН-плоскостей является отношением эквивалентности, а из условия (2) следует, что всякий изоморфизм $f : H \to H'$ индуцирует биекцию F множества направлений АН-плоскости H на множество направлений АН-плоскости H', определенную условием

$$F(\Pi_M) = \Pi_{M'} \Leftrightarrow f(M) = M'. \tag{4}$$

Используя аксиомы тернарного кольца [10], можно установить справедливость утверждения.

Предложение 2. *Если для TR $T = \langle T; t, 0, 1, \sim\rangle$ и TR $T' = \langle T'; t, 0, 1, \sim\rangle$ существуют биекции $\alpha, \beta, \gamma, \delta : T \to T'$ такие, что*

$$(\forall\, a, b, c \in T) \quad \delta(t(a,\ b,\ c)) = t(\alpha(a), \beta(b), \gamma(c)), \tag{5}$$

то справедливы следующие свойства:

1) $\gamma = \delta \Leftrightarrow \alpha(0) = 0 \Leftrightarrow \beta(0) = 0$;

2) $\gamma(0) = 0 = \delta(0) \Rightarrow \alpha(0) = 0,\ \beta(0) = 0,\ \gamma = \delta\ (a \in D \Leftrightarrow \alpha(a) \in D')\ (b \in D \Leftrightarrow \beta(b) \in D')$;

3) $\gamma(0) = 0,\ \beta(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$; $\gamma(0) = 0,\ \alpha(1) = 1 \Leftrightarrow \beta = \delta$.

В дальнейшем считаем АН-тернары $H = \langle T; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$ и $H' = \langle T'; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$ построенными, соответственно, над реперами $R(p_0, p_1, p_2)$ и $R'(p'_0, p'_1, p'_2)$ АН-плоскостей H и H' ($H = H_R, H' = H'_{R'}$). Через $(p_0; X, Y)$ и $(p'_0; X', Y')$ обозначаем аффинные системы координат АН-плоскостей H и H' соответствующие реперам R и R'; точки p_0, p_1, p_2 (а также точки p'_0, p'_1, p'_2) отождествляем с точками $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, а прямые X и Y (X' и Y') — с прямыми $[0,\ 0]$ и $\langle 0, 0\rangle$. Через D и D' обозначаем множества делителей нуля вместе с нулями АН-тернаров H и H' соответственно.

Определение 2. АН-тернар $H = \langle T; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$ называется $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8$ *изотопным* АН-тернару $H' = \langle T'; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$, если соответственно:

0) существует биекция $\alpha : T \to T'$ такая, что

$$(\forall\, a,u,v \in T) \quad \alpha(t(a,u,v)) = t(\alpha(a),\alpha(u),\alpha(v)),$$
$$(\forall\, b,n \in T)\ (\forall\, m \in D) \quad \alpha(t_0(b,m,n)) = t_0(\alpha(b),\alpha(m),\alpha(n));$$

1) существуют биекции α, $\beta : T \to T'$ и $\delta : D \to D'$ такие, что

$$(\forall\, a,u,v \in T) \quad \beta(t(a,u,v)) = t(\alpha(a),\beta(u),\beta(v)),$$
$$(\forall\, b,n \in T)\ (\forall\, m \in D) \quad \alpha(t_0(b,m,n)) = t_0(\beta(b),\delta(m),\alpha(n));$$

2) существуют биекции α, β, $\gamma : T \to T'$ и при этом $\alpha :\ D \to D'$ такие, что

$$(\forall\, a,u,v \in T) \quad \beta(t(a,u,v)) = t(\alpha(a),\gamma(u),\beta(v)),$$
$$(\forall\, b,n \in T)\ (\forall\, m \in D) \quad \alpha(t_0(b,m,n)) = t_0(\beta(b),\alpha(m),\alpha(n));$$

3) существуют биекции α, β, $\gamma : T \to T'$ и биекция $\delta : D \to D'$ такие, что

$$(\forall\, a,u,v \in T) \quad \beta(t(a,u,v)) = t(\alpha(a),\gamma(u),\beta(v)),$$
$$(\forall\, b,n \in T)\ (\forall\, m \in D) \quad \alpha(t_0(b,m,n)) = t_0(\beta(b),\delta(m),\alpha(n));$$

4) существуют биекции α_m, β_a, $\gamma :\ T \to T'$, для любого a из T и для любого m из D и биекция $\delta :\ D \to D'$ такие, что

$$(\forall\, a,u,v \in T) \quad \beta_a(t(a,u,v)) = t(\alpha_0(a),\gamma(u),\beta_0(v)),$$
$$(\forall\, b,n \in T)\ (\forall\, m \in D) \quad a = t_0(b,m,n) \Leftrightarrow \alpha_0(a) = t_0(\beta_a(b),\delta(m),\alpha_m(n));$$

5) существуют биекции α_b, β_u, $\gamma :\ T \to T'$, для любых b, u из T и биекция $\delta :\ D \to D'$ такие, что

$$(\forall\, a,u,v \in T) \quad b = t(a,u,v) \Leftrightarrow \beta_0(b) = t(\alpha_b(a),\gamma(u),\beta_u(v)),$$
$$(\forall\, b,n \in T)\ (\forall\, m \in D) \quad \alpha_b(t_0(b,m,n)) = t_0(\beta_0(b),\delta(m),\alpha_0(n));$$

6) существуют биекции α_m, β_u, $\gamma :\ T \to T'$ для любого u из T и любого m из D и биекция $\delta :\ D \to D'$ такие, что

$$(\forall\, a,u,v \in T) \quad \beta_0(t(a,u,v)) = t(\alpha_0(a),\gamma(u),\beta_u(v)),$$
$$(\forall\, b,n \in T)\ (\forall\, m \in D) \quad \alpha_0(t_0(b,m,n)) = t_0(\beta_0(b),\delta(m),\alpha_m(n));$$

7) существуют биекции α_m, β_u, τ_a, $\gamma :\ T \to T'$, для любых a, u из T и любого m из D и биекция $\delta :\ D \to D'$ такие, что

$$(\forall\, a,u,v \in T) \quad \tau_a(t(a,u,v)) = t(\alpha_0(a),\gamma(u),\beta_u(v)),$$
$$(\forall\, b,n \in T)\ (\forall\, m \in D) \quad a = t_0(b,m,n) \Leftrightarrow \alpha_0(a) = t_0(\tau_a(b),\delta(m),\alpha_m(n));$$

8) существуют биекции α_m, β_u, $\gamma :\ T \to T'$ для любого u из T и любого m из D, биекция $\delta :\ D \to D'$ и биекция $g :\ T \times T \to T' \times T'$ такие, что

$$(\forall\, a,u,v \in T) \quad b = t(a,u,v) \Leftrightarrow b' = t(a',\gamma(u),\beta_u(v)),$$
$$(\forall\, b,n \in T)\ (\forall\, m \in D) \quad a = t_0(b,m,n) \Leftrightarrow a' = t_0(b',\delta(m),\alpha_m(n)),$$

где $g(a,b)=(a',b')\Leftrightarrow(a',b')$ — решение системы уравнений

$$y=t(x,\gamma_0,\beta_0(b)),\quad x=t_0(y,\delta(0),\alpha_0(a)).$$

Предложение 3. *Пусть* $L=[u_1,v_1]$ *и* $M=[u_2,v_2]$ — *прямые первого рода относительно некоторого репера* $R(p_0,p_1,p_2)$ *АН-плоскости* H. *Тогда*

$$\Pi_L\sim\Pi_M\Leftrightarrow u_1\sim u_2. \tag{6}$$

$\lhd$ Согласно **ТН1** [10] условие $u_1\sim u_2$ равносильно тому, что $L\cap M=\varnothing$ или прямые L и M имеют более одной общей точки. Если $L\cap M=\varnothing$, то $\Pi_L\sim\Pi_M$, а если найдется пара точек, каждая из которых инцидентна одновременно прямым L и M, то $L\sim M$, откуда $\Pi_L\sim\Pi_M$ согласно определению смежных направлений. Если $\Pi_L\sim\Pi_M$, то найдутся прямые $L^/\in\Pi_L$ и $M^/\in\Pi_M$, такие, что $L'\sim M'$. Отсюда имеем $L^/=[u_1,v_1^/]$ и $M^/=[u_2,v_2^/]$, следовательно, $u_1\sim u_2$.

Пусть $S\in T/\sim, S\neq D$ и $S^/\in T^//\sim, S^/\neq D^/$.

Определение 3. АН-тернар $H=\langle T;t,t_0,0,1,\sim\rangle$ назовем ω_9 *изотопным* АН-тернару $H^/=\langle T^/;t,t_0,0,1,\sim\rangle$, если существуют биекции $\alpha_b,\beta_u,\tau_m:T\to T^/$ для любого b из T, любого u из $T\backslash S$, любого m из $S\cup D$ и биекции $\gamma:T\backslash S\to T^/\backslash S^/$ и $\delta:S\to D^/, D\to S^/$ такие, что

$$\begin{aligned}(\forall\,u\in T\backslash S)\quad b=t(a,u,v)&\Leftrightarrow\beta_0(b)=t(\alpha_b(a),\gamma(u),\beta_u(v)),\\(\forall\,u\in S)\quad b=t(a,u,v)&\Leftrightarrow\alpha_b(a)=t_0(\beta_0(b),\delta(u),\tau_u(v)),\\(\forall\,m\in D)\quad a=t_0(b,m,n)&\Leftrightarrow\beta_0(b)=t(\alpha_b(a),\delta(m),\tau_m(n)).\end{aligned}$$

Теорема 1. *АН-тернар* $H=\langle T;t,t_0,0,1,\sim\rangle\omega_i$ *изотопен* $(i=0,1,2,\ldots,9)$ *АН-тернару* $H^/=\langle T^/;t,t_0,0,1,\sim\rangle$, *тогда и только тогда, когда существует изоморфизм* $f:H\to H^/$, *такой, что соответственно:*

0) $f(p_0)=p_0',\ f(p_1)=p_1',\ f(p_2)=p_2'$,
1) $f(p_0)=p_0',\ f(p_1)=p_1',\ f(Y)=Y^/$,
2) $f(p_0)=p_0',\ f(p_2)=p_2',\ f(X)=X^/$,
3) $f(X)=X^/,\ f(Y)=Y^/$,
4) $f(Y)=Y^/$,
5) $f(X)=X^/$ и $\Pi_{f(Y)}\sim\Pi_{Y^/}$,
6) $f(X)\parallel X^/$ и $f(Y)\parallel Y^/$,
7) $f(Y)\parallel Y^/$,
8) $\Pi_{f(Y)}\sim\Pi_{Y^/}$,
9) $f(X)=X^/$ и $\Pi_{f(Y)}\not\sim\Pi_{Y^/}$.

$\lhd$ Справедливость каждого утверждения теоремы устанавливается по схожей схеме. Докажем, например, утверждение 5). Пусть изоморфизм $f:H\to H^/$ удовлетворяет условию 5 теоремы 1. Тогда учитывая, что отношение смежности для направлений АН-плоскости является отношением эквивалентности, а, также применяя следствие 1, заключаем, что при данном изоморфизме f образами прямых первого рода (второго рода) [10] относительно репера R являются прямые первого рода (второго рода) относительно репера R'.

Поэтому определим биекции γ и δ соответственно условиями

$$\gamma(u)=u^/\Leftrightarrow F(\Pi_{[u,v]})=\Pi_{[u^/,v^/]}, \tag{7}$$

$$\delta(m)=m^/\Leftrightarrow F(\Pi_{\langle m,n\rangle})=\Pi_{\langle m^/,n^/\rangle}. \tag{8}$$

Далее, для фиксированных элементов $b, u \in T$ определим биекции $\beta_u, \alpha_b : T \to T^/$ следующим образом:

$$\beta_u(v) = v^/ \Leftrightarrow f([u,v]) = [\gamma(u), v^/], \tag{9}$$

$$\alpha_b(a) = a^/ \Leftrightarrow f((a,b)) = (a^/, \beta_0(b)). \tag{10}$$

Тогда из (9) и (10) следует, что $f([u,v]) = [\gamma(u), \beta_u(v)]$, $f((a,b)) = (\alpha_b(a), \beta_0(b))$, $f(\langle m,n\rangle) = \langle \delta(m), \alpha_0(n)\rangle$. Так как отображение f сохраняет инцидентность точек и прямых имеем, что для любых a, u, v из T $b = t(a,u,v) \Leftrightarrow \beta_0(b) = t(\alpha_b(a), \gamma(u), \beta_u(v))$. Для любых b, n из T и любого m из D $\alpha_b(t_0(b,m,n)) = t_0(\beta_0(b), \delta(m), \alpha_0(n))$. Таким образом $H\ \omega_5\ H^/$.

Пусть теперь $H\ \omega_5\ H^/$. Тогда если отображение f определить условиями $f((a,b)) = (\alpha_b(a), \beta_0(b))$, $f([u,v]) = [\gamma(u), \beta_u(v)]$, $f(\langle m,n\rangle) = \langle \delta(m), \alpha_0(n)\rangle$, то понятно, что f будет изоморфизмом $H \to H^/$. Далее, учитывая условие теоремы, имеем, что из $t_0(0,m,n) = n$ следует $\alpha_0(n) = t_0(\beta_0(0), \delta(m), \alpha_0(n))$, а значит, $0 = t_0(\beta_0(0), \delta(m), 0)$. Отсюда $\beta_0(0) = 0$. Теперь из того, что $\beta_0(v) = t(\alpha_v(a), \gamma(0), \beta_0(v))$ получаем $0 = t(\alpha_v(a), \gamma(0), 0)$, откуда $\gamma(0) = 0$. Поэтому $f([0,0]) = [\gamma(0), \beta_0(0)] = [0,0]$, а так как прямые второго рода определяют смежные направления, то $\Pi_{f(Y)} \sim \Pi_{Y^/}$.

Использование $\omega_0 - \omega_5$ и ω_9 изотопий позволяет решить задачу поставленную в данной статье.

Определение 4. АН-тернар H назовем связанным с АН-тернаром $H^/$ цепочкой $\omega_i, \omega_j, \ldots, \omega_l, \omega_k$ изотопий, если существуют АН-тернары $H_i, H_j, \ldots H_l$ такие, что $H\ \omega_i\ H, H_i\ \omega_j\ H_j, \ldots, H_l\ \omega_k\ H^/$.

Очевидно, что любые АН-тернары, связанные цепочкой ω изотопий координатизируют изоморфные АН-плоскости.

Теорема 2. *Для того чтобы АН-тернары H и $H^/$ координатизировали изоморфные АН-плоскости, необходимо и достаточно, чтобы их можно было связать цепочкой не более чем из четырех ω изотопий вида $\omega_0 - \omega_5, \omega_9$.*

$\lhd$ Достаточность очевидна. Пусть АН-плоскость $H = \langle P, L; I, \|, \sim\rangle$ изоморфна АН-плоскости $H' = \langle P^/, L^/; I, \|, \sim\rangle$ и АН-тернары H и $H^/$ построены, соответственно, над реперами $R(p_0, p_1, p_2)$ и $R'(p'_0, p'_1, p'_2)$ этих плоскостей. Тогда если изоморфизм $f : H \to H'$ удовлетворяет условию теоремы 1, то АН-тернары H и H' связаны цепочкой из одной ω изотопии. Предположим, что f не удовлетворяет условию теоремы 1.

Пусть $f(p_0) = q_0$, $f(p_1) = q_1$, $f(p_2) = q_2$, а $q_0q_1 = X_1$ и $q_0q_2 = Y_1$. Рассмотрим случай когда $\Pi_{Y_1} \not\sim \Pi_{x^/}$. Тогда $Y_1 \cap X^/ = r_0$. Выберем точки $r_1\ I\ X^/$, $r_2\ I\ Y_1$ такие, что $r_0 \not\sim r_1$ и $r_0 \not\sim r_2$. Тогда очевидно, что тройка точек (r_0, r_1, r_2) образует некоторый репер АН-плоскости $H^/$. Над невырожденными тройками точек (q_0, q_1, q_2) и (r_0, r_1, r_2) построим АН-тернары H_1 и H_2, соответственно. Тогда имеем $H\ \omega_0\ H_1$, $H_1\ \omega_4\ H_2$, $H_2\ \omega_5\ H^/$ или $H_2\ \omega_9\ H^/$. Таким образом, АН-тернары H и $H^/$ оказываются связанными либо цепочкой $\omega_0, \omega_4, \omega_5$, либо цепочкой $\omega_0, \omega_4, \omega_9$ изотопий.

Пусть теперь $\Pi_{Y_1} \sim \Pi_{X^/}$. Рассмотрим прямую $X_2 = p_0^/ e^/$. Тогда имеем, что $X_2 \not\sim X^/$ и $X_2 \not\sim Y^/$, и поэтому $\Pi_{Y_1} \not\sim \Pi_{X_2}$. Пусть $Y_1 \cap X_2 = r_0, r_1\ I\ X_2, r_2\ I\ Y_1$ такие, что $r_0 \not\sim r_1$ и $r_0 \not\sim r_2$. Предположим, что $s_1\ I\ X_2$ и $s_1 \not\sim p'_0$. Рассмотрим АН-тернары H_1, H_2 и H_3, построенные над невырожденными тройками точек (q_0, q_1, q_2) и (r_0, r_1, r_2), (p'_0, s_1, p'_2) соответственно. Тогда имеем $H\ \omega_0\ H_1$, $H_1\ \omega_4\ H_2, H_2\ \omega_9\ H_3$, $H_3\ \omega_4 H^/$.

Отсюда получаем, что в рассматриваемом случае АН-тернары Н и Н можно связать цепочкой $\omega_0, \omega_4, \omega_9, \omega_4$ изотопий. $\rhd$

Следствие 2. *Любые два АН-тернара АН-плоскости H можно связать цепочкой, состоящей не более чем из трех $\omega_4, \omega_5, \omega_9$ изотопий.*

В связи с теоремой 2 естественно возникает вопрос о возможности решения задачи, поставленной в начале статьи без применения понятия цепочки изотопий. Оказывается, что после некоторого расширения списка указанных выше ω изотопий эта задача может быть решена и в такой постановке.

Определение 5. АН-тернар $H = \langle T; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$ назовем ω_{10} *изотопным* АН-тернару $H^/ = \langle T^/; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$, если существуют биекции $\alpha_b, \beta_u, \tau_m : T \to T^/$ для любого b из $T\backslash D$ и любых u, m из D, а также биекции $\gamma : T\backslash D \to T^/\backslash D^/$ и $\delta_1, \delta_2 : D \to D^/$ такие, что

$$(\forall\, u \in T\backslash D) \quad b = t(a, u, v) \Leftrightarrow \tau_0(a) = t(\beta_0(b), \gamma(u), \alpha_u(v)),$$
$$(\forall\, u \in D) \quad b = t(a, u, v) \Leftrightarrow \beta_0(b) = t_0(\tau_0(a), \delta_1(u), \beta_u(v)),$$
$$(\forall\, m \in D) \quad a = t_0(b, m, n) \Leftrightarrow \tau_0(a) = t(\beta_0(b), \delta_2(m), \tau_m(n)).$$

Теорема 3. *АН-тернар $H = \langle T; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$ ω_{10} изотопен АН-тернару $H^/ = \langle T^/; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$ тогда и только тогда когда существует изоморфизм $f : H \to H^/$ такой, что $f(X) = Y^/$ и $f(Y) = X^/$.*

$\lhd$ Пусть изоморфизм $f : H \to H^/$ удовлетворяет условию теоремы 3. Определим биекцию $\gamma : T\backslash D \to T^/\backslash D^/$ условием

$$\gamma(u) = u^/ \Leftrightarrow F(\Pi_{[u,v]}) = \Pi_{[u^/,v^/]}, \tag{11}$$

и биекции $\delta_1, \delta_2 : D \to D^/$ таким образом, что

$$\delta_1(m) = m^/ \Leftrightarrow F(\Pi_{[m,n]}) = \Pi_{\langle m^/,n^/\rangle}, \tag{12}$$

$$\delta_2(m) = m^/ \Leftrightarrow F(\Pi_{\langle m,n\rangle}) = \Pi_{[m^/,n^/]}. \tag{13}$$

Далее для любого b из $T\backslash D$ и любых u, m из D определим биекции $\alpha_b, \beta_u, \tau_m : T \to T'$ условиями:

$$\alpha_b(a) = a^/ \Leftrightarrow f([b, a]) = [\gamma(b), a^/], \tag{14}$$
$$\beta_u(n) = n^/ \Leftrightarrow f([u, n]) = \langle\delta_1(u), n^/\rangle, \tag{15}$$
$$\tau_m(n) = n^/ \Leftrightarrow f(\langle m, n\rangle) = [\delta_2(m), n^/]. \tag{16}$$

Рассмотрим произвольную точку $(a, b) \in H$. Тогда $f((a, b)) = f([0, b]) \cap f(\langle 0, a\rangle) = \langle 0, \beta_0(b)\rangle \cap [0, \tau_0(a)] = (\beta_0(b), \tau_0(a))$. Таким образом

$$f((a, b)) = (\beta_0(b), \tau_0(a)). \tag{17}$$

Тогда из (14)–(16) имеем, что для любого u из $T\backslash D : f([u, v]) = [\gamma(u), \alpha_u(v)]$, для любого u из $D : f([u, v]) = \langle\delta_1(u), \beta_u(v)\rangle$, и для любого m из $D : f(\langle m, n\rangle) = [\delta_2(m), \tau_m(n)]$. Отсюда учитывая (17) и сохранение инцидентности, получаем, что $H\ \omega_{10}\ H^/$.

Предположим теперь, что $H\ \omega_{10}\ H^/$. Пусть на множестве точек плоскости H биекция $f : H \to H'$ определена условием (17), а на множестве прямых условиями:

$$(\forall\, u \in T\backslash D) \quad f([u, v]) = [\gamma(u), \alpha_u(v)], \tag{18}$$

$$(\forall\, u \in D) \quad f([u, v]) = \langle\delta_1(u), \beta_u(v)\rangle, \tag{19}$$

$$(\forall\, m \in D) \quad f(\langle m, n\rangle) = [\delta_2(m), \tau_m(n)]. \tag{20}$$

Тогда используя (17)–(20) можно проверить, что f будет изоморфизмом H на $H^/$. Далее из определения 5 следует, что $\delta_1(u) = \delta_2(m) = 0$, а также $\beta_0(b) = \tau_0(a) = 0$. Поэтому $f(X) = f([0, 0]) = \langle\delta_1(0), \beta_0(0)\rangle = \langle 0, 0\rangle = Y$ и $f(Y) = f(\langle 0, 0\rangle) = [\delta_2(0), \tau_0(0)] = [0, 0] = X^/$.

Пусть $S \in T/\sim, S \neq D$ и $S^/ \in T^/\sim, S^/ \neq D^/$.

Определение 6. АН-тернар $H = \langle T; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$ назовем ω_{11} *изотопным* АН-тернару $H^/ = \langle T^/; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$, если существуют биекции $\alpha_b, \beta_u, \tau_m : T \to T^/$ для любого b из $T\backslash S$, любого u из S и любого m из D и биекции $\gamma : T\backslash S \to T^/\backslash S^/, \delta_1 : S \to D^/, \delta_2 : D \to S^/$ и $g : T \times T \to T^/ \times T^/$ такие, что

$$(\forall\, u \in T\backslash S) \quad b = t(a, u, v) \Leftrightarrow b^/ = t(a^/, \gamma(u), \alpha_u(v)),$$
$$(\forall\, u \in S) \quad b = t(a, u, v) \Leftrightarrow a^/ = t_0(b^/, \delta_1(u), \beta_u(v)),$$
$$(\forall\, m \in D) \quad a = t_0(b, m, n) \Leftrightarrow b^/ = t(a^/, \delta_2(m), \tau_m(n)),$$

где $g(a, b) = (a^/, b^/) \Leftrightarrow (a^/, b^/)$ — решение системы уравнений $y = t(x, \delta_2(0), \tau_0(a))$, $x = t_0(y, \delta_1(0), \beta_0(b))$.

Теорема 4. *АН-тернар $H = \langle T; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$ ω_{11} изотопен АН-тернару $H^/ = \langle T^/; t, t_0, 0, 1, \sim\rangle$, тогда и только тогда, когда существует изоморфизм $f : H \to H'$ такой, что $\Pi_{f(Y)} \not\sim \Pi_{Y^/}$.*

$\lhd$ Доказательство этой теоремы можно провести аналогично доказательству предыдущей, если в (17) положить $f((a, b)) = g(a, b) = (a^/, b^/)$. При этом, учитывая, что в данном случае $f((a, b)) = f([0, b]) \cap f(\langle 0, a\rangle) = \langle\delta_1(0), \beta_0(b)\rangle \cap [\delta_2(0), \tau_0(a)]$, то биекция g задается условием: $g(a, b) = (a^/, b^/) \Leftrightarrow (a^/, b^/)$ — решение системы уравнений $y = t(x, \delta_2(0), \tau_0(a))$, $x = t_0(y, \delta_1(0), \beta_0(b))$. $\rhd$

Из теорем 1 и 4 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *АН-тернары H и $H^/$ в том и только том случае координатизируют изоморфные АН-плоскости* (*одну АН-плоскость*), *если $H\ \omega_8 H^/$ или $H\ \omega_{11} H^/$.*

Литература

1. *Luneburg H.* Affine Hjelmslev–Ebenen mit transitiver Translationsgruppe // Math. Z.—1962.—V. 79.—P. 260–288.
2. *Скорняков Л. А.* Проективные плоскости // Успехи мат. наук.—1951.—Т. 6, № 6.—С. 112–154.
3. *Скорняков Л. А.* Натуральные тела Веблен—Веддербарновой плоскости // Изв. АН СССР. Сер. 13. Математика.—1949.—С. 447–472.
4. *Stevenson F. W.* Weakly isotopic planar ternary rings // Canad. J. Math.—1975.—V. 27.—P. 32–36.
5. *Martin G. E.* Projective planes and isotopic ternary rings // Amer. Math. Monthly.—1967.—V. 74.—P. 1185–1195.
6. *Martin G. E.* Parastrophic planar ternary rings // J. of Algebra.—1968.—V. 10.—P. 37–46.
7. *Martin G. E.* Projective planes and isogeic ternary rings // Mathematiche.—1968.—V. 23, № 1.—P. 185–196.
8. *Аргунов Б. И.* Инцидентностные структуры и тернарные алгебры // Успехи мат. наук.—1982.—Т. 37, вып. 2.—С. 3–37.
9. *Зотов А. К.* H-изотопии тернарных колец и изоморфизмы проективных плоскостей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М., 1983.—??? с.
10. *Шатохин Н. Л.* О координатизации аффинных ельмслевовых плоскостей // Тр. семинара по инцидентностным структурам.—1985.—11 с. Деп. в ВИНИТИ, № 5402.
11. *Шатохин Н. Л.* Невырожденные гомоморфизмы аффинных ельмслевовых плоскостей.—Смоленск, 1978.—?? с. Деп. в ВИНИТИ, № 2189.

Статья поступила 1 октября 2007

Шатохин Николай Леонидович
Смоленский государственный университет
Смоленск, 214036, РОССИЯ
E-mail: shatohinn@mail.ru