Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2007, Том 9, Выпуск 4

УДК **517.984**

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. Д. Цопанов

В работе получены общие формулы регуляризованных следов для ядерных возмущений дискретных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, а также для возмущений таких операторов операторными полиномами с ядерными коэффициентами.

Ключевые слова: линейный оператор, регуляризованные следы, собственные значения, операторный пучок.

1. Введение

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ дифференциально-операторное уравнение

$$L(D) = u^n(t) + A_1 u^{n-1}(t) + \ldots + A_n u(t) = 0, \tag{1}$$

где A_k, $k = 1, \ldots, n$ — данные, вообще говоря, неограниченные операторы в $\mathfrak{H}$, $u(t)$ — неизвестная функция со значениями в $\mathfrak{H}$, $D = D_t = \frac{d}{dt}$. По аналогии с обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с уравнением (1) связывают характеристический операторнозначный многочлен

$$L_\lambda = \lambda^n E + \lambda^{n-1} A_1 + \ldots + A_n, \tag{2}$$

который принято называть *операторным пучком.* Фундаментальную связь между уравнением (1) и пучком (2) демонстрирует следующая [8, 12, 20]

Лемма 1.1. *Функция* $u(t)$ *вида*

$$u(t) = e^{ct}\left(\frac{t^k}{k!}u_0 + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u_1 + \cdots + u_k\right), \tag{3}$$

$u_j \in \mathfrak{H}$, $u_0 \neq 0$, *является решением уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$L_c u_p + \frac{1}{1!}L'_c u_{p-1} + \cdots + \frac{1}{p!}L_c^{(p)} u_0 = 0, \quad p = 0, \ldots, k. \tag{4}$$

Число $c \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением пучка* (2), если существует ненулевой вектор $y \in \mathfrak{H}$ такой, что $L_c y = 0$.

Таким образом, вектор u_0 из соотношений (4) является собственным вектором. Векторы u_j ($j = 1, \ldots, k$), удовлетворяющие (4), называются присоединенными и образуют жорданову цепочку векторов. Нетрудно видеть, что это определение собственного значения, собственного вектора и присоединенных к нему векторов есть обобщение определения этих же понятий для обычных линейных операторов. Теорию, аналогичную теории Жордана для конечномерных линейных операторов, для операторных пучков разработал М. В. Келдыш в работе [8]. Изложению дальнейшего развития результатов М. В. Келдыша посвящены монографии [12, 20].

Приведенную лемму можно рассматривать как одно из многочисленных свидетельств важности изучения спектральных характеристик операторных пучков. Данная работа посвящена построению формул регуляризованных следов для них. Начнем с рассмотрения формул регуляризованных следов для операторов вида

$$A = T + B, \tag{5}$$

где T — неограниченный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с компактной резольвентой[1], а B — оператор подчиненный T [7].

Формулой регуляризованных следов для оператора (5) будем называть формулу вида

$$\sum_m (\mu_m^s - \lambda_m^s - c_m(s)) = F(s), \tag{6}$$

где μ_m и λ_m — собственные значения операторов A и T соответственно, s — натуральный параметр, называемый порядком регуляризованного следа, $c_m(s)$ и $F(s)$ — вычисляемые величины. В левой части (6) знак суммы означает суммирование, возможно, с некоторой расстановкой скобок по всем собственным значениям операторов A и T, причем способ расстановки скобок зависит от поведения спектра оператора T.

Впервые формула регуляризованного следа первого порядка была получена в работе [3] для обыкновенного дифференциального оператора Штурма—Лиувилля. Затем для таких же операторов в работе [5] были получены формулы регуляризованных следов произвольных порядков.

Формулы регуляризованных следов для абстрактных операторов вида (5), где B — ядерный ($B \in \mathfrak{S}_1$, см. [4]) самосопряженный оператор, а T — самосопряженный неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, впервые были получены в работе [9], как частный случай общей теории. В недавно вышедшей работе [13] были детально изучены формулы регуляризованных следов для самосопряженных неядерных возмущений самосопряженных дискретных операторов. Результаты, полученные в ней носят уже завершенный характер.

Несамосопряженные ядерные возмущения были рассмотрены в работе [11], в которой была получена формула вида (6) при $s = 1$:

$$\sum (\mu_m - \lambda_m) = Tr(B).$$

В отличие от работ [9, 13], где никаких ограничений на разреженность спектра оператора T не накладывалось, в случае несамосопряженных возмущений эти условия становятся уже необходимыми. В частности, в работе [11] на функцию распределения спектра $N(r) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{|\lambda_k| \leqslant r} 1$ было наложено условие $N(r) = O(\lambda^p),\ 0 < p < \frac{1}{2}$. Дальнейшее развитие теории регуляризованных следов для абстрактных операторов вида (5) в основном

[1]Такие операторы называют дискретными операторами

шло по пути снятия ограничений на поведение спектра оператора T и возмущающий оператор B. Так, в работе [6] была получена формула следа

$$\sum(\mu_m - \lambda_m - (B\varphi_m, \varphi_m)) = 0$$

в случае, когда $N(r) = O(\lambda^p)$, $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ и B — ограниченный оператор. Если же B — оператор из класса Гильберта—Шмидта, то, как показано в [6], достаточно потребовать, чтобы $0 < p \leqslant 1$.

Наиболее полные результаты по формулам вида (6) для несамосопряженных возмущений при $s = 1$ получены в работе [14]. Современное состояние теории регуляризованных следов дискретных операторов подробно освещено в обзоре [15].

В отличие от дискретных операторов библиография работ по следам для операторных пучков вида (2) совсем невелика. В работах [10, 16] для пучков вида

$$\widetilde{L}_\lambda = E - \lambda\, A_1 - \lambda^2\, A_2 - \ldots - \lambda^n A_n,$$

где $A_j \in \mathfrak{S}_{p/j}$ $(p > 1)$, показано, что $\sum|\mu_j|^{-p} < \infty$, где $\{\mu_j\}$ — собственные значения пучка $\widetilde{L}_\lambda$ [16], и получены формулы вида $\sum \mu_j^{-r} = Tr(S_r)$, где $r \geqslant n$, а операторы S_r определяются по рекуррентным формулам $S_r = \sum\limits_{j=1}^{n-1} S_{r-j}A_j + rA_r$, $S_1 = A_1$ [10]. Эти работы явились обобщением [19], где указанные формулы получены для полиномиальных пучков, действующих в конечномерном пространстве.

В настоящей работе строятся общие формулы регуляризованных следов (6) при произвольных натуральных s для возмущений несамосопряженными ядерными операторами. Сначала рассматриваются регуляризованные следы для оператора $T + B$, где T — самосопряженный дискретный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $B \in \mathfrak{S}_1$, затем по той же схеме производится вывод общих формул регуляризованных следов для операторных пучков (2), где A_n — самосопряженный дискретный оператор в $\mathfrak{H}$, а $\{A_j\}_{j=1}^{n-1}$ содержится в $\mathfrak{S}_1$. Следует отметить, что, не смотря на хорошую изученность ядерных возмущений, общие формулы (6) даже для операторов вида $T + B$ приводятся впервые. Для операторных пучков в [18] были построены методы (алгоритмы) нахождения формул следов, но общих формул также указано не было.

2. Общие формулы следов для ядерных возмущений

В дальнейшем будем предполагать, что функция распределения спектра оператора T удовлетворяет условию

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r^\alpha} = \varepsilon < \infty \qquad \text{при} \qquad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{7}$$

Как было показано в работе [2], существует система концентрических окружностей $\{\Gamma_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\Gamma_\nu = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \gamma_\nu\}$, $\gamma_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$, такая, что расстояние δ_ν от окружности Γ_ν до спектра $\sigma(T)$ оператора T удовлетворяет условию $\delta_\nu \geqslant \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ — постоянная. В дальнейшем будет использоваться система окружностей $\{\Gamma_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$. Собственные значения операторов $A = T + B$ и T будем обозначать соответственно через $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем, нумерация осуществляется по неубыванию модуля и с учетом алгебраической кратности. Пусть, кроме того, M_ν и N_ν — количества элементов последовательностей $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно, попавших внутрь контура Γ_ν.

Лемма 2.1. *Пусть T — дискретный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть функция распределения спектра оператора T удовлетворяет условию (7) и $B \in \mathfrak{S}_1$, тогда, если $R_\lambda(T) = (T - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора T, то*

$$\| R_\lambda(T)B\|_1 \to 0 \quad \textit{при} \ \ \lambda \in \Gamma_\nu \ \ \textit{и} \ \ \nu \to \infty,$$

где $\| \cdot \|_1$ — норма оператора из идеала $\mathfrak{S}_1$, причем предел равномерен по $\arg \lambda$.

Доказательство более общего утверждения будет проведено ниже. Из леммы 2.1 следует существование такого номера ν_0, что при $\nu \geqslant \nu_0$ и $\lambda \in \Gamma_\nu$ выполнено соотношение $\|R_\lambda(T)B\|_1 < 1$. Следовательно, при $\lambda \in \Gamma_\nu$, $\nu \geqslant \nu_0$, имеем известное соотношение

$$R_\lambda(A) - R_\lambda(T) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{R_\lambda(T)B\right\}^k R_\lambda(T), \tag{8}$$

в котором сходимость ряда понимается в смысле нормы $\| \cdot \|_1$. Для любого оператора $L \in \mathfrak{S}_1$ выполнено неравенство $|Tr(L)| \leqslant \|L\|_1$ (см. [4]), т. е. функция следа непрерывна по норме $\mathfrak{S}_1$, это значит, что от обеих частей равенства (8) можно взять след, а затем проинтегрировать по контуру Γ_ν. В результате получим

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s Tr\left(R_\lambda(A) - R_\lambda(T)\right) d\lambda \ = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s Tr\left(R_\lambda(T) \left(R_\lambda(T)B\right)^k\right) d\lambda. \tag{9}$$

Обозначим след главной части мероморфной оператор-функции $F(\lambda)$ через $\mathrm{Tr}([F(\lambda)])$, тогда в силу конечномерности главных частей разложения резольвент дискретных операторов в окрестности полюса (т. е. собственного значения) [7, 8] получим для левой части равенства (9)

$$\frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s Tr\left(R_\lambda(A) - R_\lambda(T)\right) d\lambda = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s Tr\left([R_\lambda(A)]\right) d\lambda - \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s Tr\left([R_\lambda(T)]\right) d\lambda. \tag{10}$$

Для вычисления интеграла от $\mathrm{Tr}\left([R_\lambda(A)]\right)$ в правой части (10) воспользуемся формулой М. В. Келдыша. В работе [8] им доказана

Лемма 2.2 (М. В. Келдыш). *Пусть $E - L_\lambda$ — аналитическая в области $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{C}$ оператор-функция со значениями в идеале $\mathfrak{S}_\infty$ компактных операторов, тогда след главной части оператора $\frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda} L_\lambda^{-1}$ для полюса $\lambda = c$ равен $\frac{N}{\lambda - c}$, где N — алгебраическая кратность собственного значения $\lambda = c$ пучка L_λ.*

Пусть оператор T обратим, т. е. существует $T^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, тогда к пучку $L_\lambda = E + BT^{-1} - \lambda T^{-1}$ будет применима лемма 2.2, но для резольвенты $R_\lambda(A)$ имеем

$$R_\lambda(A) = (T + B - \lambda\, E)^{-1} = T^{-1} L_\lambda^{-1} = -\frac{\partial\, L_\lambda}{\partial\, \lambda} L_\lambda^{-1}.$$

В случае, когда $\lambda = 0 \in \sigma(T)$, рассмотрим оператор $\widehat{T} = T + E_0$, где E_0 — ортогональный проектор на нуль-пространство оператора T. Очевидно, что оператор $\widehat{T}$ обратим. Резольвенту оператора A мы можем представить в виде

$$R_\lambda(A) = (\widehat{T} - E_0 + B - \lambda\, E)^{-1} = \widehat{T}^{-1} L_\lambda^{-1} = -\frac{\partial\, L_\lambda}{\partial\, \lambda} L_\lambda^{-1},$$

где теперь $L_\lambda = E + (B - E_0)\widehat{T}^{-1} - \lambda \widehat{T}^{-1}$. Но спектры оператора A и пучка L_λ в обоих случаях, очевидно, совпадают, следовательно, согласно лемме М. В. Келдыша, в малой окрестности любого собственного значения $\lambda = c$ оператора A имеем соотношение

$\operatorname{Tr}([R_\lambda(A)]) = -\operatorname{Tr}\left(\left[\frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda} L_\lambda^{-1}\right]\right) = -\frac{N}{\lambda - c}$ (N — алгебраическая кратность). Таким образом, по интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}([R_\lambda(A)])\, d\lambda = \sum_{m=1}^{M_\nu} \mu_m^s. \tag{11}$$

Аналогично поступим с интегралом от $\operatorname{Tr}([R_\lambda(T)])$. Объединяя соотношения (9)–(11), получим

$$\sum_{m=1}^{M_\nu} \mu_m^s - \sum_{m=1}^{N_\nu} \lambda_m^s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}\left[R_\lambda(T)\,(R_\lambda(T)B)^k\right] d\lambda. \tag{12}$$

В дальнейшем будем считать, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначает полную ортонормированную систему векторов в $\mathfrak{H}$, составленную из собственных элементов самосопряженного оператора T. Будем также использовать обозначения E_k для спектральных проекторов: $E_k = (\cdot, e_k)e_k$ ($k \in \mathbb{N}$). Следующая лемма дает возможность непосредственного вычисления формул следов.

Лемма 2.3. *Пусть $B \in \mathfrak{S}_1$, тогда выполнены следующие соотношения:*

1. $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}\left[R_\lambda(T)\,(R_\lambda(T)B)^k\right] d\lambda = 0$ *при* $s \geqslant 0$, $k \geqslant 1$ *и* $s - k \leqslant -1$. *(Если полученное соотношение, применить при $s = 0$ к ряду (12), то получим, что $M_\nu = N_\nu$ для любого $\nu \geqslant \nu_0$.);*

2. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}\left[R_\lambda(T)\,(R_\lambda(T)B)^k\right] d\lambda = (-1)^{s+1}\operatorname{Tr}(B^s)$ *при* $s - k = 0$ *и* $k \geqslant 2$;

3. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \left\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}\left[R_\lambda(T)\Big(R_\lambda(T)B\Big)^k\right] d\lambda - \sum\limits_{m_1=\ldots=m_k=1}^{N_\nu} (-1)^{k+1} c_p(BE_{m_1}\cdots BE_{m_{k-1}} Be_{m_k}, e_{m_k})\right\} = 0$ *при* $s - k = p > 0$ *и* $k \geqslant 1$, *где*

$$c_p = \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p\leqslant k+1\\ m_k = m_{k+1}}} \lambda_{m_{i_1}}\cdots\lambda_{m_{i_p}}.$$

$\lhd$ Пусть $P_\lambda^k = (R_\lambda(T)B)^k\, R_\lambda(T)$, тогда $\operatorname{Tr}(P_\lambda^k) = \sum\limits_{l=1}^{\infty}(R_\lambda(T)B\cdots BR_\lambda(T)e_l, e_l)$. Подставляя спектральное разложение резольвенты $R_\lambda(T) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k(\lambda_k - \lambda)^{-1}$, получим

$$\operatorname{Tr}(P_\lambda^k) = \sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{\infty} \prod_{\substack{j=1\\ m_k=m_{k+1}}}^{k+1} \frac{1}{\lambda_{m_j} - \lambda}(BE_{m_1}\cdots BE_{m_{k-1}}Be_{m_k}, e_{m_k}). \tag{13}$$

В этом равенстве каждый из индексов $m_1, \ldots, m_k$ независимо от других пробегает натуральный ряд. Учитывая, что при $\lambda \in \Gamma_\nu$ и $\lambda_{m_j} \in \sigma(A)$ имеем неравенство $\left|\prod\limits_{j=1}^{k+1}\frac{1}{\lambda_{m_j} - \lambda}\right| \leqslant c$, и, кроме того, что $(BE_{m_1}\cdots BE_{m_{k-1}}Be_{m_k}, e_{m_k}) = (Be_{m_1}, e_{m_k})\prod\limits_{j=2}^{k}(Be_{m_j}, e_{m_{j-1}})$, можно доказать абсолютную сходимость ряда (13). Ниже это будет сделано в более общей ситуации. Следовательно, его частичные суммы можно формировать произвольным образом. Будем строить частичные суммы по правилу:

$$S_\nu = \sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{N_\nu} \prod_{\substack{j=1 \\ m_k=m_{k+1}}}^{k+1} \frac{1}{\lambda_{m_j}-\lambda}(BE_{m_1}\cdots BE_{m_{k-1}}Be_{m_k}, e_{m_k}).$$

В силу равномерной сходимости ряда (13) по $\lambda \in \Gamma_\nu$ мы можем его почленно интегрировать по любому контуру Γ_ν. Таким образом, имеем:

$$\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}(P_\lambda^k)\, d\lambda = \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{N_\nu} \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{\lambda_{m_j}-\lambda}\, d\lambda\, (BE_{m_1}\cdots BE_{m_{k-1}}Be_{m_k}, e_{m_k}).$$

Так как в приведенной формуле $|\lambda_{m_j}| < |\lambda|$, то разлагая каждый сомножитель в ряд по степеням $\frac{\lambda_j}{\lambda}$ и перемножая эти ряды, получим

$$\lambda^s \prod_{\substack{j=1 \\ m_k=m_{k+1}}}^{k+1} \frac{1}{\lambda_{m_j}-\lambda} = (-1)^{k+1}\lambda^{s-k-1}\left(1+\frac{c_1}{\lambda}+\cdots+\frac{c_p}{\lambda^p}+\cdots\right),$$

$$c_0 = 1,\ c_1 = \lambda_{m_1}+\ldots+2\lambda_{m_k}, \ldots, c_p = \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p\leqslant k+1 \\ m_k=m_{k+1}}} \lambda_{m_{i_1}}\cdots\lambda_{m_{i_p}}.$$

Отсюда видно, что $\frac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}(P_\lambda^k)\, d\lambda = 0$ для любых ν при $s-k \leqslant -1$. Тем самым доказан пункт 1) утверждения леммы.

Далее, очевидно, что при $s-k=0$

$$\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}(P_\lambda^k) d\lambda = (-1)^{k+1} \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{N_\nu} (BE_{m_1}\cdots BE_{m_{k-1}}Be_{m_k}, e_{m_k}).$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $\nu\to\infty$ и проведя в правой части повторное суммирование, получим:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}(P_\lambda^s) d\lambda = (-1)^{s+1} \sum_{m_1,\ldots,m_s=1} (BE_{m_1}\cdots Be_{m_s}, e_{m_s}) = (-1)^{s+1}\operatorname{Tr}(B^s),$$

что доказывает пункт 2) леммы.

Наконец, при $s-k\in\mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}(P_\lambda^k) d\lambda - (-1)^{k+1} \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{N_\nu} c_{s-k}\ (BE_{m_1}\cdots BE_{m_{k-1}}Be_{m_k}, e_{m_k}) = 0.$$

Переходя к пределу при $\nu\to\infty$, получим доказательство пункта 3) леммы. $\rhd$

Следствием предыдущих рассмотрений является

Теорема 2.1. *Пусть T — дискретный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть функция распределения спектра оператора T удовлетворяет условию (7) и $B\in\mathfrak{S}_1$. Существует подпоследовательность натурального ряда*

$\{M_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ *такая, что для любого* $s \in \mathbb{N}$ *выполняется*

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{m=1}^{M_\nu}\Big[\mu_m^s-\lambda_m^s-s\lambda_m^{s-1}(Be_m,e_m)\Big]\right.$$
$$\left.+\sum_{k=2}^{s-1}\sum_{m_1=\dots=m_k=1}^{M_\nu}c_{s-k}\;(Be_{m_1},e_{m_k})\prod_{j=2}^{k}(Be_{m_j},e_{m_{j-1}})\right\}=-\kappa_s\;\mathrm{Tr}(B^s),$$

где

$$\kappa_s=\begin{cases}1, & \text{\textit{при} } s\geqslant 2,\\ 0, & \text{\textit{при} } s=1,\end{cases}\qquad c_{s-k}=\sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_{s-k}\leqslant k+1\\ m_k=m_{k+1}}}\lambda_{m_{i_1}}\cdots\lambda_{m_{i_{s-k}}}.$$

Примеры

Пусть $\mathfrak{H}=L_2(\mathbb{R}^2)$. В качестве модельного примера рассмотрим оператор Шредингера $T=-\Delta+x^2$, где $x^2=x_1^2+x_2^2$. Известно [1, 17], что это дискретный оператор и его спектр состоит из собственных значений $\lambda_m=2m+2$, $m\geqslant 0$, причем размерность соответствующего собственного подпространства равна $m+1$ и в качестве базиса в нем можно взять функции $\varphi_l^{(m)}(x)=f_l(x_1)f_{m-l}(x_2)$ $(l=0,1,\dots,m)$, где $f_l(t)=\big(2^l l!\sqrt{\pi}\big)^{-1/2}e^{-\frac{t^2}{2}}H_l(t)$ ($H_l(t)$ — многочлен Эрмита) — нормированная собственная функция одномерного гармонического осцилятора, соответствующая собственному числу $2l+1$ $(l\geqslant 0)$. Пусть B — интегральный оператор: $By=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2$, ядро которого $K(x,\xi)\in L_2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ таково, что оператор B — ядерный [4]. Например, $K(x,\xi)$ — финитная и гладкая по $\xi\in\mathbb{R}^2$ функция. Таким образом, $Ay=-\Delta\,y+x^2\,y+\iint\limits_{\mathbb{R}^2}K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2$ — интегро-дифференциальный оператор, к которому применима теорема 2.4. В качестве окружностей Γ_ν можно брать окружности с центром в нуле и радиуса $\frac{1}{2}(\lambda_\nu+\lambda_{\nu+1})=2\nu+3$. Далее выписаны формулы следов, получающиеся непосредственно из общей формулы:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{M_\nu}(\mu_m-\lambda_m)=\mathrm{Tr}(B)\quad\text{при } s=1,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{m=1}^{M_\nu}\Big[\mu_m^2-\lambda_m^2-2\lambda_m(Be_m,e_m)\Big]\right.=-\,\mathrm{Tr}(B^2)\quad\text{при } s=2,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{m=1}^{M_\nu}\Big[\mu_m^3-\lambda_m^3-3\lambda_m^2(Be_m,e_m)\Big]+\sum_{m_1=m_2=1}^{M_\nu}(\lambda_{m_1}+2\lambda_{m_2})\;(Be_{m_1},e_{m_2})(Be_{m_2},e_{m_1})\right\}$$
$$=-\,\mathrm{Tr}(B^3)\quad\text{при } s=3,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{m=1}^{M_\nu}\Big[\mu_m^4-\lambda_m^4-4\lambda_m^3(Be_m,e_m)\Big]+\sum_{m_1=m_2=1}^{M_\nu}(\lambda_{m_1}^2+2\lambda_{m_1}\lambda_{m_2}+3\lambda_{m_2}^2)\right.$$
$$\times(Be_{m_1},e_{m_2})(Be_{m_2},e_{m_1})+\sum_{m_1=m_2=m_3=1}^{M_\nu}(\lambda_{m_1}+\lambda_{m_2}+2\lambda_{m_3})(Be_{m_1},e_{m_3})$$
$$\left.\times(Be_{m_2},e_{m_1})(Be_{m_3},e_{m_2})\right\}=-\,\mathrm{Tr}(B^4)\quad\text{при } s=4.$$

С учетом кратностей собственных значений оператора T их можно записать в терминах рассматриваемого интегро-дифференциального оператора. Например, при $s = 1, 2$ имеем соответственно формулы

$$\sum_{m=1}^{M_{\nu_0}} \mu_m - \frac{(\nu_0+1)(\nu_0+2)(2\nu_0+3)}{3} + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \sum_{m=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} [\mu_m - (2(\nu+1)+2)] = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} K(x,x)\,dx_1\,dx_2,$$

$$\sum_{m=1}^{M_{\nu_0}} \mu_m^2 - \frac{(\nu_0+1)^2(\nu_0+2)^2}{2} - \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \sum_{m=0}^{\nu} 4(\nu+1) \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} K(x,\xi)\varphi_m^{(\nu)}(\xi)\varphi_m^{(\nu)}(x)\,d\xi\,dx$$
$$+ \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \sum_{m=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \left[\mu_m^2 - (2\nu+4)^2 - (4\nu+8)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} K(x,\xi)\varphi_m^{(\nu+1)}(\xi)\varphi_m^{(\nu+1)}(x)\,d\xi\,dx\right]$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} K(x,\xi)K(\xi,x)\,d\xi\,dx.$$

3. Формулы регуляризованных следов для операторных пучков

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H} = L_2(0,1)$. Пусть $n = 2$ и левая часть уравнения (1) определяется интегро-дифференциальным оператором, где $A_n = -A = \frac{d^2}{dx^2} - q(x)$ — самосопряженный оператор Штурма—Лиувилля, а A_0, A_1 — ядерные интегральные операторы [4]. Тогда получим операторный пучок вида

$$L_\lambda y(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right) y(x) - \int_0^1 K_0(x,\xi)y(\xi)\,d\xi - \lambda \int_0^1 K_1(x,\xi)y(\xi)\,d\xi - \lambda^2 y(x), \quad (14)$$

Пучок (14) является частным случаем абстрактного операторного пучка вида

$$L_\lambda = A - A_0 - \lambda A_1 - \cdots - \lambda^{n-1}A_{n-1} - \lambda^n E, \quad (15)$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ — ядерные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, A — дискретный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$. Все дальнейшее изложение посвящено его рассмотрению.

3.1. Предварительные сведения и результаты. С помощью простых рассуждений из фундаментальной работы М. В. Келдыша [8] следует, что спектр пучка L_λ состоит из дискретного набора собственных значений $\sigma(L_\lambda) = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ с единственной предельной точкой на бесконечности. При этом оператор-функция L_λ^{-1} является мероморфной функцией во всей комплексной плоскости, полюсами которой являются собственные значения $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Существенную роль в получении формул регуляризованных следов будет играть сформулированная нами ранее лемма 2.2. Если для главной части оператора $\frac{\partial L_\lambda}{\partial\lambda}L_\lambda^{-1}$ ввести обозначение $[\frac{\partial L_\lambda}{\partial\lambda}L_\lambda^{-1}]$, то из леммы 2.2 очевидно будет следовать соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_c} \lambda^s \operatorname{Tr}\left(\left[\frac{\partial L_\lambda}{\partial\lambda}L_\lambda^{-1}\right]\right) d\lambda = Nc^s, \quad (16)$$

где Γ_c — окружность с центром в точке $\lambda = c$, достаточно малого радиуса, проходимая против часовой стрелки, N — алгебраическая кратность (т. е. размерность корневого подпространства) собственного значения $\lambda = c$.

Пусть $\sigma(A) = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — спектр оператора A. Рассмотрим также пучок $A_{\lambda^n} \overset{\text{def}}{=} A - \lambda^n E$, собственные значения которого обозначим через η_k, т. е. $\sigma(A_{\lambda^n}) = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Нумерацию всех собственных значений будем вести по неубыванию модуля и с учетом алгебраической кратности, т. е. каждое собственное значение повторяется столько раз, какова размерность соответствующего ему корневого подпространства. Формулы регуляризованных следов будем получать в предположении, что функция распределения спектра оператора A удовлетворяет условию

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r^\alpha} = \varepsilon < \infty \qquad \text{при} \qquad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}\,. \tag{17}$$

Введем обозначения: $r_k = |\lambda_k^{1/n}|$, $d_k = r_{k+1} - r_k$.

Лемма 3.1.1. *При условии* (17) *на функцию* $N(r)$ *существует подпоследовательность натурального ряда* $\{k_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ *такая, что* $d_{k_\nu} = r_{k_\nu+1} - r_{k_\nu} \geqslant \varepsilon_0$ *для каждой* $\nu \in \mathbb{N}$, *где* $\varepsilon_0 > 0$ — *постоянная.*

$\lhd$ Доказательство является некоторой модификацией метода, приведенного в работе [2]. Так как по условию $n\alpha - 1 \leqslant 0$, то имеем

$$\varlimsup_{i\to\infty} d_i r_i^{n\alpha-1} \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} k^{-1} \sum_{i=1}^{k} d_i r_i^{n\alpha-1} \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} k^{-1} \int\limits_{r_1}^{r_{k+1}} t^{n\alpha-1} dt.$$

Далее, сделав под интегралом замену $t = x^{1/n}$, получим

$$\varlimsup_{i\to\infty} d_i r_i^{n\alpha-1} \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} k^{-1} \int\limits_{r_1}^{r_{k+1}} t^{n\alpha-1} dt = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kn} \int\limits_{|\lambda_1|}^{|\lambda_{k+1}|} x^{\frac{n\alpha-1}{n}+\frac{1-n}{n}} dx = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kn} \int\limits_{|\lambda_1|}^{|\lambda_{k+1}|} x^{\alpha-1} dx$$
$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha\, kn} (|\lambda_{k+1}|^\alpha - |\lambda_1^\alpha|) = \frac{1}{\alpha\, n} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} |\lambda_{k+1}|^\alpha \geqslant \frac{1}{\alpha\, n} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{r^\alpha}{N(r)} = \frac{1}{n\alpha\varepsilon} > 0.$$

Таким образом $\varlimsup\limits_{i\to\infty} d_i r_i^{n\alpha-1} > 0$, следовательно, существует подпоследовательность натурального ряда $\{k_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ такая, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} d_{k_\nu} r_{k_\nu}^{n\alpha-1} > 0$. Но, так как по условию $n\alpha - 1 \leqslant 0$ и $r_{k_\nu} \to \infty$ при $\nu \to \infty$, т. е. $r_{k_\nu}^{n\alpha-1} \leqslant \text{const}$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$, то мы можем считать, что $d_{k_\nu} \geqslant \varepsilon_0 > 0$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$, где $\varepsilon_0 > 0$ — некоторая постоянная. $\rhd$

Следствие 3.1.1. *Существует бесконечная система расширяющихся концентрических окружностей* $\{\Gamma_m\}_{\nu=1}^{\infty}$ *с центрами в начале координат, свободных от точек спектра пучка* T_{λ^n} *и таких, что расстояние* δ_ν *от окружности* Γ_ν *до спектра* $\sigma(T_{\lambda^n})$ *удовлетворяет условию* $\delta_\nu \geqslant \varepsilon_0/2$ *для каждого* $\nu \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ В качестве Γ_ν возьмем окружность с центром в начале координат и радиусом $\gamma_\nu = r_{k_\nu} + \frac{1}{2} d_{k_\nu}$. Тогда Γ_ν будет свободна от точек спектра $\sigma(T_{\lambda^n})$, так как точки из $\sigma(T_{\lambda^n})$ располагаются на окружностях с центром в начале координат и радиусами r_k $(k \in \mathbb{N})$.

Кроме того, так как точки спектра $\sigma(T_{\lambda^n})$ располагаются на лучах $\arg\lambda = \frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$, то $\delta_\nu = d_{k_\nu}/2$. Следовательно, согласно лемме 3.1 имеем $\delta_\nu \geqslant \varepsilon_0/2$, $\nu \in \mathbb{N}$. $\rhd$

3.2. Построение формул регуляризованных следов. Во всех последующих рассуждениях мы всегда будем использовать систему окружностей $\{\Gamma_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ из следствия 3.2. Кроме того, везде будем считать, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначает полную ортонормированную систему векторов в $\mathfrak{H}$, составленную из собственных элементов самосопряженного оператора A. Будем также использовать обозначения E_k для спектральных проекторов $E_k = (\cdot, e_k)e_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Следующая лемма является аналогом леммы 2.1.

Лемма 3.2.1. *Пусть P — ядерный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $R_\lambda = (A - \lambda^n E)^{-1}$, где A — дискретный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$. Пусть выполнено условие* (17). *Тогда*

$$\|\lambda^j R_\lambda P\|_1 \to 0 \quad \text{при} \ \ \lambda \in \Gamma_\nu \ \ \text{и} \ \ \nu \to \infty \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

где $\|\cdot\|_1$ — ядерная норма операторов из идеала $\mathfrak{S}_1$, причем предел равномерен по $\arg\lambda$.

$\lhd$ Достаточно рассмотреть случай $j = n-1$. Пусть $\lambda \in \Gamma_\nu$, тогда в силу самосопряженности оператора A выполнено соотношение $\|R_\lambda\| = d_{\lambda^n}^{-1}$, где d_{λ^n} — расстояние от точки λ^n до спектра оператора A. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \|\lambda^{n-1} R_\lambda\| &= \max_k \frac{|\lambda^{n-1}|}{|\lambda^n - \lambda_k|} \leqslant \max_k \frac{\gamma_\nu^{n-1}}{|\gamma_\nu - r_k|\,(\gamma_\nu^{n-1} + \cdots + r_k^{n-1})} \\ &\leqslant \max_k \frac{1}{|r_k - \gamma_\nu|\,(1 + r_k\gamma_\nu^{-1} + \cdots + r_k^{n-1}\gamma_\nu^{1-n})} \leqslant \frac{1}{\delta_\nu} \leqslant c. \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть теперь $P_1 = \sum_{l=1}^{t} (\cdot, \varphi_l)\psi_l$ — конечномерный оператор, такой что $\|P - P_1\|_1 < \varepsilon(2c)^{-1}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная. Имеем далее $\|R_\lambda P_1\|_1 \leqslant \sum_{l=1}^{t} \|\varphi_l\|\|R_\lambda\psi_l\|$. Но

$$\left(|\lambda|^{n-1}\|R_\lambda\psi_l\|\right)^2 = \sum_{m=1}^{N} \frac{|\lambda^{n-1}|^2|(\psi_l, e_m)|^2}{|\lambda_m - \lambda^n|^2} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{|\lambda^{n-1}|^2|(\psi_l, e_m)|^2}{|\lambda_m - \lambda^n|^2}. \tag{19}$$

Рассмотрим вторую сумму в правой части (19). Согласно (18), имеем

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{|\lambda^{n-1}|^2|(\psi_l, e_m)|^2}{|\lambda_m - \lambda^n|^2} \leqslant c^2 \sum_{m=N+1}^{\infty} |(\psi_l, e_m)|^2.$$

Следовательно, в силу равенства Парсеваля, за счет выбора номера N мы можем сделать второе слагаемое в правой части (19) сколь угодно малым. Первое слагаемое в правой части (19) стремится к нулю при $\lambda \in \Gamma_\nu$ и $\nu \to \infty$.

Таким образом, $|\lambda|^{n-1}\|R_\lambda\psi_l\| \to 0$ при $\lambda \in \Gamma_\nu$, $\nu \to \infty$. Поэтому существует такой номер n_0, что при $\nu \geqslant n_0$ $\|\lambda^{n-1}R_\lambda P_1\|_1 < \varepsilon/2$, $\lambda \in \Gamma_\nu$, следовательно, согласно выбору P_1

$$\|\lambda^{n-1}R_\lambda P\|_1 \leqslant \|\lambda^{n-1}R_\lambda(P - P_1)\|_1 + \|\lambda^{n-1}R_\lambda P_1\|_1 \ < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \rhd$$

Из леммы 3.3 следует, что существует ν_0 такое, что при любом $\nu \geqslant \nu_0$ выполняется $\left\|\sum\limits_{l=0}^{n-1} \lambda^l A_l R_\lambda\right\|_1 < 1$, $\lambda \in \Gamma_\nu$, следовательно, так как $L_\lambda = \left(E - \sum\limits_{l=0}^{n-1} \lambda^l A_l R_\lambda\right)(A - \lambda^n E)$, то существует L_λ^{-1} и $L_\lambda^{-1} = R_\lambda + \sum\limits_{k=1}^{\infty} R_\lambda \left(\sum\limits_{l=0}^{n-1} \lambda^l A_l R_\lambda\right)^k$. Для упрощения записей будем в дальнейшем считать, что $n = 2$, т. е. $L_\lambda = A - A_0 - \lambda A_1 - \lambda^2 E$. Умножая слева обе части выражения для L_λ^{-1} на соответствующие части равенства $\frac{\partial L_\lambda}{\partial\lambda} = -\sum\limits_{j=1}^{n-1} j\lambda^{j-1}A_j - n\lambda^{n-1}E$, получим

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda}L_\lambda^{-1} + n\lambda^{n-1}R_\lambda = -A_1R_\lambda - A_1R_\lambda\sum_{k=1}^{\infty}(A_0R_\lambda + \lambda\, A_1R_\lambda)^k$$

$$-2\lambda\, R_\lambda\sum_{k=1}^{\infty}(A_0R_\lambda + \lambda\, A_1R_\lambda)^k \quad (n=2).$$

Возьмем от обеих частей след, а затем проинтегрируем по контуру Γ_ν. В силу леммы 3.3 и непрерывности функции $\mathrm{Tr}(\cdot)$ относительно ядерной нормы знак следа и знак интеграла можно занести под знак бесконечной суммы. В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial L_\lambda}{\partial\lambda}L_\lambda^{-1}\right]d\lambda + \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}\left[n\lambda^{n-1}R_\lambda\right]d\lambda\\ = -\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}\left[A_1R_\lambda\right]d\lambda - \frac{1}{2\pi\, i}\sum_{k=1}^{\infty}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}\left[A_1R_\lambda\left\{A_0R_\lambda + \lambda\, A_1R_\lambda\right\}^k\right]d\lambda\\ -\frac{1}{2\pi\, i}\sum_{k=1}^{\infty}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}\left[2\lambda\, R_\lambda\left(A_0R_\lambda + \lambda\, A_1R_\lambda\right)^k\right]d\lambda.\end{aligned} \tag{20}$$

Далее мы будем использовать символы M_ν и N_ν для обозначения количеств собственных значений пучков L_λ и A_{λ^n}(с учетом кратностей), попавших внутрь контура Γ_ν, соответственно. Ясно при этом, что количество собственных значений пучка $A-\lambda\, E$, удовлетворяющих условию $|\lambda_i| < \gamma_\nu^n$, будет равно $N'_\nu = N_\nu/n$. Следующая лемма дает возможность непосредственного вычисления формул следов.

Лемма 3.2.2. *Пусть $A_1,\ldots,A_k$ — ядерные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда справедливы утверждения:*

1) *при $s-2k$ меньшем минус единицы или равном четному числу имеем равенство*

$$\frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}\left[R_\lambda A_1\cdots R_\lambda A_k\right]d\lambda = 0;$$

2) *при $s-2k=-1$ верно* $\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}\left[R_\lambda A_1\cdots R_\lambda A_k\right]d\lambda = (-1)^k\,\mathrm{Tr}(A_1\cdots A_k)$;

3) *при $s-2k=2p-1$, $p\in\mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}\left[R_\lambda A_1\cdots R_\lambda A_k\right]d\lambda\right.$$

$$\left. - \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{N'_\nu}(-1)^k c_p(A_1E_{m_1}\cdots A_{k-1}E_{m_{k-1}}A_ke_{m_k}, e_{m_k})\right\} = 0,$$

где $c_0 = 1$, $c_p = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p\leqslant k}\lambda_{m_{i_1}}\cdots\lambda_{m_{i_p}}$.

$\lhd$ Рассмотрим оператор-функцию $P_\lambda^k = R_\lambda A_1\cdots R_\lambda A_k$. Используя разложение для резольвенты $R_\lambda = \sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k(\lambda_k - \lambda^2)^{-1}$, получим

$$Tr(P_\lambda^k) = \sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\lambda_{m_j}-\lambda^2}(A_1E_{m_1}\cdots A_{k-1}E_{m_{k-1}}A_ke_{m_k}, e_{m_k}). \tag{21}$$

В этом равенстве каждый из индексов $m_1,\ldots,m_k$ независимо от других пробегает натуральный ряд. Докажем, что ряд в правой части (21) сходится абсолютно и равномерно по $\lambda \in \bigcup\limits_{\nu=\nu_0}^{\infty}\Gamma_\nu$. Для этого заметим, что имеет место неравенство $\left|\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\lambda_{m_j}-\lambda^2}\right| \leqslant c$ при любых $\lambda \in \bigcup\limits_{\nu=\nu_0}^{\infty}\Gamma_\nu$, $\lambda_{m_j} \in \sigma(A)$. Кроме того, нетрудно получить, что $(A_1E_{m_1}\cdots A_{k-1}E_{m_{k-1}}A_ke_{m_k},e_{m_k}) = (A_1e_{m_1},e_{m_k})\prod_{j=2}^{k}(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})$. Таким образом, ряд в правой части (21) мажорируется рядом $c\sum\limits_{m_1,\ldots,m_k=1}^{\infty}|(A_1e_{m_1},e_{m_k})|\prod_{j=2}^{k}|(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})|$. Для доказательства сходимости этого ряда достаточно установить, что сходится повторный ряд $\sum\limits_{m_k=1}^{\infty}\cdots\sum\limits_{m_1=1}^{\infty}|(A_1e_{m_1},e_{m_k})|\prod_{j=2}^{k}|(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})|$. Заметим, что, если $Q\in\mathfrak{S}_1$, то [4] $\sum\limits_{s=1}^{\infty}\|Qe_s\|^2 = \sum\limits_{s=1}^{\infty}(Q^*Qe_s,e_s) \leqslant \|Q^*Q\|_1$. Отсюда с помощью неравенства Коши — Буняковского получим

$$\sum_{m_k=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_1=1}^{\infty}|(A_1e_{m_1},e_{m_k})|\,|(A_2e_{m_2},e_{m_1})|\prod_{j=3}^{k}|(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})|$$

$$\leqslant \sum_{m_k=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_2=1}^{\infty}\prod_{j=3}^{k}|(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})|\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}|(e_{m_1},A_1^*e_{m_k})|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}|(A_2e_{m_2},e_{m_1})|^2\right)^{1/2}$$

$$= \sum_{m_k=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_2=1}^{\infty}\prod_{j=3}^{k}|(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})|\|A_1^*e_{m_k}\|\,\|A_2e_{m_2}\|$$

$$\leqslant \sum_{m_k=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_3=1}^{\infty}\|A_1^*e_{m_k}\|\prod_{j=4}^{k}|(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})|\left(\sum_{m_2=1}^{\infty}|(A_3e_{m_3},e_{m_2})|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m_2=1}^{\infty}\|A_2e_{m_2}\|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \|A_2^*A_2\|_1^{1/2}\sum_{m_k=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_4=1}^{\infty}\|A_1^*e_{m_k}\|\prod_{j=5}^{k}|(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})|\sum_{m_3=1}^{\infty}|(A_4e_{m_4},e_{m_3})|\,\|A_3e_{m_3}\| \leqslant \|A_2^*A_2\|_1^{\frac12}$$

$$\times\sum_{m_k=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_4=1}^{\infty}\|A_1^*e_{m_k}\|\prod_{j=5}^{k}|(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})|\left(\sum_{m_3=1}^{\infty}|(A_4e_{m_4},e_{m_3})|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{m_3=1}^{\infty}\|A_3e_{m_3}\|^2\right)^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant \|A_2^*A_2\|_1^{\frac12}\|A_3^*A_3\|_1^{\frac12}\sum_{m_k=1}^{\infty}\ldots\sum_{m_5=1}^{\infty}\|A_1^*e_{m_k}\|\prod_{j=6}^{k}|(A_je_{m_j},e_{s_{j-1}})|\sum_{m_4=1}^{\infty}|(A_5e_{m_5},e_{m_4})|\,\|A_4e_{m_4}\|$$

$$\leqslant\cdots\leqslant \|A_2^*A_2\|_1^{\frac12}\|A_3^*A_3\|_1^{\frac12}\cdots\|A_k^*A_k\|_1^{\frac12}\|A_1^*A_1\|_1^{\frac12}.$$

Таким образом, сходимость повторного ряда доказана. Следовательно, частичные суммы кратного ряда (21) можно формировать по правилу:

$$S_\nu = \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{N'_\nu}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\lambda_{m_j}-\lambda^2}(A_1E_{m_1}\cdots A_{k-1}E_{m_{k-1}}A_ke_{m_k},e_{m_k}).$$

В силу равномерной сходимости ряда (21) по $\lambda\in\bigcup\limits_{\nu=\nu_0}^{\infty}\Gamma_\nu$, мы можем его почленно интегрировать по любому контуру Γ_ν $(\nu\geqslant\nu_0)$. Таким образом, в силу метода формирования частичных сумм S_ν, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^s Tr(P_\lambda^k)d\lambda$$
$$=\sum_{m_1=\dots=m_k=1}^{N'_\nu}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^s\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\lambda_{m_j}-\lambda^2}\,d\lambda\,(A_1E_{m_1}\cdots A_{k-1}E_{m_{k-1}}A_ke_{m_k},e_{m_k}).$$

Так как в приведенной формуле $|\lambda_{m_j}|<|\lambda|^2$, то

$$\frac{1}{\lambda_{m_j}-\lambda^2}=-\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{1}{1-\frac{\lambda_{m_j}}{\lambda^2}}=-\frac{1}{\lambda^2}\left(1+\frac{\lambda_{m_j}}{\lambda^2}+\frac{\lambda_{m_j}^2}{\lambda^4}+\cdots\right),$$

следовательно, $\lambda^s\prod\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{\lambda_{m_j}-\lambda^2}=(-1)^k\lambda^{s-2k}\left(1+\frac{c_1}{\lambda^2}+\frac{c_2}{\lambda^4}+\cdots+\frac{c_p}{\lambda^{2p}}+\cdots\right)$, где $c_0=1$, $c_1=\lambda_{m_1}+\ldots+\lambda_{m_k}$, $\ldots$, $c_p=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p\leqslant k}\lambda_{m_{i_1}}\cdots\lambda_{m_{i_p}}$.

Отсюда видно, что при $s-2k\leqslant-2$ или равном четному числу

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}(P_\lambda^k)\,d\lambda=0\quad\forall\,\nu.$$

Тем самым доказан пункт 1) утверждения леммы.

Далее, очевидно, что при $s-2k=-1$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}(P_\lambda^k)\,d\lambda=(-1)^k\sum_{m_1=\dots=m_k=1}^{N'_\nu}(A_1E_{m_1}\cdots A_{k-1}E_{m_{k-1}}A_ke_{m_k},e_{m_k});$$

перейдя к пределу при $\nu\to\infty$, получим:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}(P_\lambda^k)d\lambda=(-1)^k\sum_{m_1,\dots,m_k=1}(A_1E_{m_1}\cdots A_{k-1}E_{m_{k-1}}A_ke_{m_k},e_{m_k})=\mathrm{Tr}(A_1\cdots A_k).$$

Последнее равенство получается повторным суммированием, что законно в силу абсолютной сходимости кратного ряда. Пункт 2) леммы доказан.

При $s-2k=2p-1$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}(P_\lambda^k)d\lambda-\sum_{m_1=\dots=m_k=1}^{N'_\nu}(-1)^kc_p(A_1E_{m_1}\cdots A_{k-1}E_{m_{k-1}}A_ke_{m_k},e_{m_k})=0.$$

Переходя к пределу при $\nu\to\infty$, получим доказательство пункта 3) леммы. $\rhd$

В дальнейшем мы будем использовать функции целочисленного аргумента, определяемые следующим образом:

$$\chi(z):=\begin{cases}1, & \text{если } z \text{ — нечетное},\\ 0, & \text{если } z \text{ — четное};\end{cases}\qquad \underset{+}{\mathrm{Sgn}}(z):=\begin{cases}1, & \text{если } z>0,\\ 0, & \text{если } z\leqslant 0.\end{cases}\tag{22}$$

Следствие 3.2.1. *Пусть* $J_\nu^1(s)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\nu}\lambda^s\,\mathrm{Tr}(R_\lambda A_1)d\lambda$. *Тогда*

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{J_\nu^1(s)+\ \chi(s)\sum_{m=1}^{N'_\nu}\lambda_j^{\frac{s-1}{2}}(A_1e_j,e_j)\right\}=\ 0.$$

В частности,

$$J_\nu^1(0) = J_\nu^1(2s') = 0 \quad (\forall\,\nu, s' \in \mathbb{N}), \quad \lim_{\nu\to\infty} J_\nu^1(1) = -\operatorname{Tr}(A_1).$$

Следствие 3.2.2. *Пусть*

$$J_\nu^2(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr}[A_1 R_\lambda (A_0 R_\lambda + \lambda\, A_1 R_\lambda)^k] d\lambda.$$

Тогда

$$\lim_{\nu\to\infty} \Bigg\{ J_\nu^2(s) - \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=0}^{k} \ \chi(s+j) \operatorname*{Sgn}_{+}(s+j-2(k+1)+2)$$

$$\times \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=j \\ \alpha_j=0,1}} \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{M_\nu} (-1)^{k+1} c_p (A_1 E_{m_1} A_{\alpha_1} E_{m_2} \cdots\, A_{\alpha_k} e_{m_{k+1}}, e_{m_{k+1}}) \Bigg\} = 0,$$

где $p = \frac{s+j-2(k+1)+1}{2}$, $c_0 = 1$, $c_1 = \lambda_{m_1} + \ldots + \lambda_{m_k} \ldots c_p = \sum\limits_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p\leqslant k} \lambda_{m_{i_1}} \cdots \lambda_{m_{i_p}}$. *В частности,* $J_\nu^2(0) = 0$.

$\lhd$ Так как

$$(A_0 R_\lambda + \lambda A_1 R_\lambda)^k = \sum_{j=0}^{k} \lambda^j \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=j \\ \alpha_j=0,1}} A_{\alpha_1} R_\lambda \cdots\, A_{\alpha_k} R_\lambda, \tag{23}$$

то подставляя это выражение, приходим к равенству

$$J_\nu^2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=j \\ \alpha_j=0,1}} \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{j+s} \operatorname{Tr}[A_1 R_\lambda A_{\alpha_1} R_\lambda \cdots\, A_{\alpha_k} R_\lambda]\, d\lambda.$$

Тогда из леммы 3.4 получаем равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \Bigg\{ J_\nu^2(s) - \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{\substack{j=0 \\ s+j\ \text{–нечетн.}}}^{k} \operatorname*{Sgn}_{+}(s+j-2(k+1)+2) \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=j \\ \alpha_j=0,1}} \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{M_\nu} (-1)^{k+1}$$

$$\times c_{(s+j-2(k+1)+1)/2} (A_1 E_{m_1} A_{\alpha_1} E_{m_2} \cdots\, A_{\alpha_k} e_{m_{k+1}}, e_{m_{k+1}}) \Bigg\} = 0. \ \rhd$$

Наконец, вычислим предел при $\nu \to \infty$ выражения

$$J_\nu^3(s) := 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{s+1} \operatorname{Tr}[R_\lambda (A_0 R_\lambda + \lambda\, A_1 R_\lambda)^k]\, d\lambda.$$

Используя формулу (23), преобразуем его к виду

$$J_\nu^3(s) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=j \\ \alpha_j=0,1}} \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{j+s+1} \operatorname{Tr}[R_\lambda^2 A_{\alpha_1} R_\lambda \cdots\, A_{\alpha_k}]\, d\lambda.$$

Лемма 3.2.3. *Пусть $A_1, \dots, A_k$ — ядерные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, тогда для целых чисел k, s выполнены соотношения:*

1) *при $s \geqslant 0$, причем $k \geqslant 1$: s четно или $s - 2(k+1) \leqslant -2$, имеем*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^s Tr \left[R_\lambda^2(T) A_1 R_\lambda(T) A_2 \cdots R_\lambda A_k \right] d\lambda = 0;$$

2) *при $s - 2(k+1) = -1$ верно*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^s Tr \left[R_\lambda^2(T) A_1 R_\lambda(T) A_2 \cdots R_\lambda A_k \right] d\lambda = (-1)^{k+1} Tr(A_1 A_2 \cdots A_k);$$

3) *при $s - 2(k+1) = 2p - 1,\ p \in \mathbb{N}$, имеем*

$$\lim_{\nu\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^s \operatorname{Tr} \left[R_\lambda^2(T) A_1 R_\lambda(T) A_2 \cdots R_\lambda A_k \right] d\lambda \right.$$
$$\left. - \sum_{m_1 = \dots = m_k = 1}^{N'_\nu} (-1)^{k+1} \widetilde{c}_p (A_1 E_{m_1} \cdots A_{k-1} E_{m_{k-1}} A_k e_{m_k}, e_{m_k}) \right\} = 0,$$

где

$$\widetilde{c}_0 = 1,\ \widetilde{c}_1 = \lambda_{m_1} + \ldots + 2\lambda_{m_k},\ \widetilde{c}_p = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant k+1 \\ m_k = m_{k+1}}} \lambda_{m_{i_1}} \cdots \lambda_{m_{i_p}}.$$

Следствие 3.2.3. *Пусть*

$$J_\nu^3(s) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = j \\ \alpha_j = 0,1}} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\nu} \lambda^{j+s+1} Tr [R_\lambda^2 A_{\alpha_1} R_\lambda \cdots A_{\alpha_k}] d\lambda.$$

Тогда

$$\lim_{\nu\to\infty} \left\{ J_\nu^2(s) - 2 \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{k} \chi(s+j+1) \operatorname*{Sgn}_{+}(s+j-2(k+1)+3) \right.$$
$$\left. \times \sum_{\substack{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = j \\ \alpha_i = 0,1}} \sum_{m_1 = \dots = m_k = 1}^{M_\nu} (-1)^{k+1} \widetilde{c}_r (A_{\alpha_1} E_{m_1} \cdots A_{\alpha_k} e_{m_k}, e_{m_k}) \right\} = 0,$$

где

$$r = \frac{s + j - 2(k+1) + 2}{2},\ \widetilde{c}_0 = 1,\ \widetilde{c}_r = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \leqslant k+1 \\ m_k = m_{k+1}}} \lambda_{m_{i_1}} \cdots \lambda_{m_{i_r}}.$$

В частности, $J_\nu^3(0) = 0$.

Из равенств (16), (20) при $s = 0$ и из следствий 3.5, 3.6, 3.8 получаем соотношение $M_\nu = N_\nu$ для любого $\nu \geqslant \nu_0$. Таким образом при $s \in \mathbb{N}$, верна

Теорема 3.2.1. *Пусть A — дискретный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, функция распределения спектра которого удовлетворяет* *условию* (17), *и* A_0, $A_1 \in \mathfrak{S}_1$. *Тогда существует подпоследовательность натурального ряда* $\{M_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{m=1}^{M_\nu}\Big[\mu_m^s-\eta_m^s-\chi(s)\lambda_m^{\frac{s-1}{2}}(A_1e_m,e_m)\Big]+\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{j=0}^{k}\chi(s+j)\operatorname*{Sgn}_{+}(s+j-2(k+1)+2)\right.$$
$$\times\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=j\\ \alpha_j=0,1}}\ \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{M_\nu/2}(-1)^{k+1}c_p(A_1E_{m_1}A_{\alpha_1}E_{m_2}\cdots A_{\alpha_k}e_{m_{k+1}},e_{m_{k+1}})$$
$$+2\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=0}^{k}\chi(s+j+1)\operatorname*{Sgn}_{+}(s+j-2(k+1)+3)$$
$$\left.\times\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=j\\ \alpha_i=0,1}}\ \sum_{m_1=\cdots=m_k=1}^{M_\nu/2}(-1)^{k+1}\,\widetilde{c}_r(A_{\alpha_1}E_{m_1}\cdots A_{\alpha_k}e_{m_k},e_{m_k})\right\}=0,$$

где

$$c_0=1,\ c_1\ =\lambda_{m_1}+\ldots+\lambda_{m_k},\quad c_p=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p\leqslant k}\lambda_{m_{i_1}}\cdots\lambda_{m_{i_p}},\quad p=\frac{s+j-2(k+1)+1}{2},$$

$$\widetilde{c}_0=1,\ \widetilde{c}_1=\lambda_{m_1}+\ldots+2\lambda_{m_k},\ \widetilde{c}_r=\sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p\leqslant k+1\\ m_k=m_{k+1}}}\lambda_{m_{i_1}}\cdots\lambda_{m_{i_p}},\ r=\frac{s+j-2(k+1)+2}{2}.$$

Функции целочисленного аргумента $\chi(z)$ *и* $\operatorname{Sgn}_+(z)$ *определяются в* (22).

В качестве примера приведем формулы при $s=1,2,3$:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{M_\nu}(\mu_m-\eta_m)=-\operatorname{Tr}(A_1),\quad \lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{M_\nu}(\mu_m^2-\eta_m^2)=\operatorname{Tr}(A_1^2)-2\operatorname{Tr}(A_0),$$
$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{m=1}^{M_\nu}(\mu_m^3-\eta_m^3)+3\sum_{m=1}^{M_\nu/2}\lambda_m(A_1e_m,e_m)\right\}=-Tr(A_1^3)+2Tr(A_0A_1).$$

Нетрудно переписать эти формулы в терминах интегро-дифференциального оператора (14). Вместо $n=2$ можно было бы выводить формулы регуляризованных следов для операторных пучков произвольного порядка n, но записи, получаемые в этом случае слишком громоздки.

Следует отметить, что полученные формулы с небольшими изменениями оказываются верными для возмущений операторами Гильберта—Шмидта. Это, в свою очередь, позволяет получать аналогичные соотношения уже для ограниченных возмущений, но при бóльших ограничениях на разреженность спектра исходного оператора.

Литература

1. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера.—М.: МГУ, 1983.—392 с.
2. *Визитей В. Н., Маркус А. С.* О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка // Мат. сб.—1965.—Т. 66 (108), № 2.—С. 287–320.
3. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР.—1953.—Т. 88, № 4.—С. 593–596.

4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Наука, 1965.—437 с.
5. *Дикий Л. А.* Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1955.—Т. 19, № 4.—С. 187–200.
6. *Дубровский В. В.* Формулы регуляризованных следов для операторов с компактной резольвентой // Диф. уравнения.—1990.—Т. 26, № 12.—С. 2046–2051.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.—М.: Мир, 1972.—739 с.
8. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, вып. 4.—С. 15–41.
9. *Крейн М. Г.* О формуле следов в теории возмущений // Мат. сб.—1953.—Т. 33 (75), № 3.—С. 597–626.
10. *Кулеско Н. А.* О следах полиномиального операторного пучка // Функцион. анализ. Линейные пространства.—Ульяновск, 1985.—С. 87–91.
11. *Любишкин В. А., Цопанов И. Д.* Регуляризованные следы интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки.—1988.—Т. 43, № 6.—С. 786–793.
12. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.—Кишинев: Штиинца, 1986.—260 с.
13. *Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю.* Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Мат. сб.—2005.—Т. 196, № 12.—С. 123–156.
14. *Подольский В. Е.* Регуляризованные следы дискретных операторов: Дис. … докт. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 2003.—30 с.
15. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы дискретных операторов // Успехи мат. наук.—2006.—Т. 61, № 5.—С. 89–156.
16. *Сигал Е. И.* О следе операторного пучка // Матем. исследования.—1969.—Т. 4, № 2.—С. 148–151.
17. *Фазуллин З. Ю., Муртазин Х. Х.* Регуляризованный след двумерного гармонического осцилятора // Мат. сб.—2001.—Т. 192, № 2.—С. 109–138.
18. *Цопанов И. Д.* Формулы регуляризованных следов для некоторых новых классов краевых задач: Дис. … канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1987.—117 с.
19. *Franklin I. N.* On the numerical solution of characteristic equations in flatter analysis // J. Assc. Comput.M achinery.—1958.—T. 5, № 1.—P. 45–51.
20. *Yakubov S.* Completeness of root functions of regular differential operators.—New York: Longman, Scientific and technical, 1994.—245 с.

Статья поступила 22 мая 2007 г.

Цопанов Игорь Дзантемирович, к. ф.-м. н.
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова;
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
Владикавказ, 362040, РОССИЯ
E-mail: `i.tsopanov@globalalania.ru`