Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2007, Том 9, Выпуск 3

УДК **517.98**

ПРОСТРАНСТВА CD_0-ФУНКЦИЙ И УДВОЕНИЕ ПО АЛЕКСАНДРОВУ

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Памяти Г. Я. Лозановского

В данной работе мы попытались изложить ключевые этапы исследования пространства $CD_0(Q) = C(Q)+c_0(Q)$, элементы которого являются суммами непрерывных и «дискретных» функций на компакте Q без изолированных точек. При этом основное внимание уделяется описанию компакта $\widetilde{Q}$, реализующего банахову решетку $CD_0(Q)$ в виде $C\big(\widetilde{Q}\big)$. Кроме того, довольно большой фрагмент статьи посвящен аналогичному кругу вопросов, связанному с пространством $CD_0(Q,\mathscr{X})$ «непрерывно-дискретных» сечений банахова расслоения $\mathscr{X}$ и с пространством CD_0-гомоморфизмов банаховых расслоений.

Ключевые слова: банахова решетка, AM-пространство, удвоение по Александрову, непрерывное банахово расслоение, сечение банахова расслоения, банахов $C(Q)$-модуль, гомоморфизм банаховых расслоений, гомоморфизм банаховых $C(Q)$-модулей.

Банахово пространство $X = (X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, снабженное (частичным) порядком $\leqslant$, называется *банаховой решеткой*, если

(1) порядок $\leqslant$ является решеточным, т. е. для любых $x, y \in X$ существуют супремум $x \vee y$ и инфимум $x \wedge y$ (а значит и модуль $|x| := x \vee -x$);

(2) порядок $\leqslant$ согласован с линейными операциями, т. е. для любых x, y, $z \in X$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$ из $x \leqslant y$ следует $x + z \leqslant y + z$ и $\lambda x \leqslant \lambda y$;

(3) норма $\|\cdot\|$ монотонна относительно порядка $\leqslant$, т. е. для любых $x, y \in X$ из $|x| \leqslant |y|$ вытекает $\|x\| \leqslant \|y\|$ $\big($откуда следует, что $\|x\| = \big\||x|\big\|$ для всех $x \in X\big)$.

Банахова решетка X называется *абстрактным M-пространством с единицей* или, более коротко, *AM_1-пространством*, если

(4) $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ для всех $0 \leqslant x, y \in X$;

(5) существует такой элемент $\mathbb{1} \in X$, что $|x| \leqslant \mathbb{1}$ равносильно $\|x\| \leqslant 1$ для всех $x \in X$.

Классическими примерами AM_1-пространств служат функциональные банаховы пространства с равномерной нормой, снабженные поточечным порядком:

(а) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $n \in \mathbb{N}$;

(б) пространство ℓ^∞ ограниченных последовательностей;

(в) пространство $L^\infty(\Omega)$ (классов) существенно ограниченных измеримых функций на пространстве с мерой Ω;

(г) пространство $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q (т. е. компактном хаусдорфовом топологическом пространстве).

Теория банаховых решеток включает следующий хорошо известный факт.

Теорема Крейнов — Какутани. *Всякое AM_1-пространство линейно изометрично и порядково изоморфно пространству $C(Q)$ для подходящего компакта Q (причем такой компакт Q является единственным с точностью до гомеоморфизма).*

Можно сказать, что в общем случае компакт, соответствующий по теореме Крейнов — Какутани рассматриваемому AM_1-пространству, оказывается «необозримым» («неявным», «неконструктивным»), хотя бы потому, что известные универсальные подходы к его «построению» существенно опираются на аксиому выбора (или лемму Цорна) и задействуют такие понятия, как ультрафильтры, максимальные идеалы и т. п. Впрочем, на пути к искомому компакту часто возникают и другие довольно громоздкие конструкции, ослабляющие интуитивную связь с исходным AM_1-пространством. Так, один из классических способов построения компакта Q, реализующего данное AM_1-пространство X в виде $C(Q)$, состоит в следующем: сначала рассматривается порядковое пополнение $\overline{X}$ пространства X, затем $\overline{X}$ представляется в виде пространства $C(\overline{Q})$ непрерывных функций на экстремально несвязном компакте $\overline{Q}$ (который возникает, например, как множество всех ультрафильтров базы $\overline{X}$, наделенное специальной топологией) и, наконец, искомый компакт Q получается в результате «склейки» точек $\overline{Q}$, не разделяемых функциями, соответствующими элементам исходного пространства X. Другой распространенный подход к построению реализующего компакта AM_1-пространства состоит в рассмотрении второго сопряженного пространства и привлечении реализационных фактов теории коммутативных банаховых алгебр, задействующих такие «неявные» объекты, как, например, характеры алгебры. Пожалуй, самый короткий универсальный путь к реализующему компакту проложен в [1], где точки компакта возникают в виде максимальных порядковых идеалов исходного AM_1-пространства. (Но и эту конструкцию по понятным причинам вряд ли можно считать «обозримой».)

Вместе с тем очевидно, что изучение свойств какого-либо конкретного AM_1-пространства может существенно упроститься, если удастся найти явное и простое описание соответствующего реализующего компакта. В качестве примера рассмотрим банахову решетку X, являющуюся замыканием (по равномерной норме) пространства всех функций $f : P \to \mathbb{R}$, определенных на бесконечном множестве P и являющихся постоянными на P за исключением конечного числа точек.[1] (Пространство таких функций f несмотря на свою простоту играет важную роль в некоторых вопросах теории регулярных операторов в векторных решетках; см., например, [8]). Каждый элемент пространства X можно описать как функцию $x : P \to \mathbb{R}$, для которой существуют число λ и последовательность точек $p_n \in P$ такие, что $x \equiv \lambda$ вне $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $x(p_n) \to \lambda$ при $n \to \infty$. Поскольку X является AM_1-пространством, оно изоморфно $C(Q)$ для некоторого компакта Q. Теперь устройство пространства X становится совершенно прозрачным, если заметить, что в качестве Q можно взять александровскую одноточечную компактификацию $P \cup \{\infty\}$ дискретного топологического пространства P. (В компакте $P \cup \{\infty\}$ точки $p \in P$ изолированы, а окрестностями точки ∞ являются дополнения конечных подмножеств P.) Изоморфизм AM_1-пространства X на $C(P \cup \{\infty\})$ осуществляется доопределением функции $x \in X$ в точке ∞ числом λ, фигурирующим в приведенном выше описании x.

Пусть теперь Q — произвольный непустой компакт без изолированных точек и пусть $c_0(Q)$ — совокупность всех таких функций $f : Q \to \mathbb{R}$, что множество $\{q \in Q : |f(q)| > \varepsilon\}$ конечно для любого числа $\varepsilon > 0$. В работе [9] Ю. А. Абрамович и А. В. Викстед ввели в рассмотрение пространство

$$CD_0(Q) := C(Q) + c_0(Q)$$

функций $f : Q \to \mathbb{R}$, каждая из которых представляется в виде суммы $f = f_c + f_d$ непрерывной $f_c \in C(Q)$ и «дискретной» $f_d \in c_0(Q)$ составляющих. Стоит сразу отметить, что благодаря отсутствию в Q изолированных точек имеет место разложение в прямую

[1] Авторы признательны Владимиру Вениаминовичу Иванову за приятное обсуждение этого примера.

сумму $CD_0(Q) = C(Q) \oplus c_0(Q)$, а отображения $f \mapsto f_c$ и $f \mapsto f_d$ представляют собой соответствующие линейные проекторы.

Ю. А. Абрамович и А. В. Викстед показали в [9], что относительно равномерной нормы и поточечного порядка пространство $CD_0(Q)$ представляет собой банахову решетку, обладающую некоторыми весьма экзотическими порядково-топологическими свойствами, и отметили, что несмотря на свою «причудливость» эта банахова решетка является AM_1-пространством, а значит (согласно теореме Крейнов — Какутани) изоморфна пространству $C\big(\widetilde{Q}\big)$ для подходящего компакта $\widetilde{Q}$. Оставив в стороне вопрос о явном описании соответствующих компактов $\widetilde{Q}$, авторы работы [9] тем не менее заметили, что благодаря своим необычным свойствам такие компакты представляют интерес и для общей топологии.

Пространства $CD_0(Q)$ (и другие аналогичные пространства «непрерывно-дискретных» функций) послужили предметом дальнейших исследований (см., например, [2, 10, 11]), в рамках которых появилось первое явное описание реализующего компакта $\widetilde{Q}$ пространства $CD_0(Q)$. А именно, в работе [12] З. Эрджан установил, что в качестве $\widetilde{Q}$ можно взять множество $Q\times\{0,1\}$, наделенное следующей сходимостью:

$$(q_\alpha, r_\alpha) \to (q, r) \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$f_c(q_\alpha) + r_\alpha f_d(q_\alpha) \to f_c(q) + r f_d(q) \text{ для любой функции } f \in CD_0(Q).$$

Теорема [12]. *Введенная выше сходимость соответствует некоторой компактной хаусдорфовой топологии на $Q\times\{0,1\}$. Сопоставление каждому элементу $f \in CD_0(Q)$ функции $\widetilde{f} : Q\times\{0,1\} \to \mathbb{R}$, определенной равенством $\widetilde{f}(q,r) = f_c(q) + r f_d(q)$, осуществляет изометрический и порядковый изоморфизм $CD_0(Q)$ на $C(Q\times\{0,1\})$.*

Этот результат сыграл ключевую роль в проблеме описания компакта $\widetilde{Q}$, реализующего $CD_0(Q)$ в виде $C\big(\widetilde{Q}\big)$.

Предложенный подход к определению реализующего компакта можно было бы подвергнуть критике, заметив, что в определении его топологии в явном виде участвует само пространство $CD_0(Q)$ — ведь это обстоятельство не позволяет в полной мере свести изучение $CD_0(Q)$ к $C\big(\widetilde{Q}\big)$, возвращая анализ свойств $\widetilde{Q}$ и $C\big(\widetilde{Q}\big)$ к рассмотрению исходного пространства $CD_0(Q)$. Тем не менее в [12] было приведено альтернативное описание сходимости сетей в $\widetilde{Q}$, не использующее пространство $CD_0(Q)$ как таковое и задействующее лишь сходимость в Q. Пожалуй, единственным возможным объектом для критики осталось введение топологи посредством сходимости сетей, усложняющее ее осмысление с традиционной «окрестностной» позиции.

Как бы то ни было, отмеченный выше «недостаток» был полностью устранен В. Г. Троицким в [15]. Для удобства введем два отображения $(\cdot)_c, (\cdot)_d : Q \to Q\times\{0,1\}$, полагая

$$q_c := (q, 0), \quad q_d := (q, 1).$$

Кроме того, для всякого подмножества $P \subset Q$ положим

$$P_c := \{p_c : p \in P\} = P\times\{0\}, \quad P_d := \{p_d : p \in P\} = P\times\{1\}.$$

В своей «заметке» [15] В. Г. Троицкий описал топологию З. Эрджана на $Q\times\{0,1\} = Q_c \cup Q_d$ следующим образом: точки q_d являются изолированными, а базовыми окрестностями всякой точки q_c служат множества вида $U_c \cup U_d \backslash \{q_d\}$, где U — окрестность точки q в исходной топологии компакта Q.

Построенное таким способом топологическое пространство $\widetilde{Q} = Q_c \cup Q_d$, которое обычно именуется *удвоением по Александрову* (*Alexandroff duplicate*) компакта Q и обозначается символом $A(Q)$, действительно обладает рядом экзотических свойств. Как известно [7, 3.1.G], оно хаусдорфово и компактно (более того, в нем компактно любое содержащее Q_c множество), его «непрерывная часть» Q_c гомеоморфна Q, а «дискретная часть» Q_d открыта и всюду плотна в $\widetilde{Q}$. Отметим также, что удвоение окружности (называемое «двойной окружностью Александрова») служит классическим примером наследственно нормального топологического пространства, не являющегося совершенно нормальным и удовлетворяющего первой аксиоме счетности, но не сепарабельного и тем самым не удовлетворяющего второй аксиоме счетности [7, 3.1.26].

Теперь, вооружившись новым определением компакта $\widetilde{Q} = Q_c \cup Q_d$, можно легко получить характеризацию сходимости сетей в $\widetilde{Q}$ (аналогичную приведенной в [12]). Поскольку все точки $q_d \in Q_d$ изолированы, сеть в $\widetilde{Q}$ сходится к q_d тогда и только тогда, когда она устанавливается на q_d. Что же касается точек $q_c \in Q_c$, то сходимость сети (q_α, r_α) к q_c равносильна следующему условию: начиная с какого-то индекса точки (q_α, r_α) отличны от q_d и $q_\alpha \to q$ в исходной топологии Q.

Помимо простого и явного описания топологии $\widetilde{Q}$ в окрестностных терминах В. Г. Троицкий предложил следующую элегантную характеризацию элементов $CD_0(Q)$.

Теорема [15]. *Функция $f : Q \to \mathbb{R}$ принадлежит $CD_0(Q)$ тогда и только тогда, когда f имеет предел в каждой точке Q. При этом непрерывная часть $f_c \in C(Q)$ функции $f \in CD_0(Q)$ вычисляется формулой*

$$f_c(q) = \lim_{p \to q} f(p) \quad \textit{для всех} \;\; q \in Q.$$

Этот результат послужил очень удобным инструментом, позволившим значительно упростить исследование свойств $CD_0(Q)$ и, в частности, получить элементарные доказательства известных фактов об этом пространстве.

Очередной этап изучения CD_0-пространств характеризуется переходом от вещественных функций $f : Q \to \mathbb{R}$ к вектор-функциям $f : Q \to X$, где X — банахова решетка. Изоморфизм между банаховыми решетками $CD_0(Q, X)$ и $C\big(\widetilde{Q}, X\big)$ в случае метрического компакта Q без изолированных точек фигурирует уже в [12]. В более общем случае связь между пространствами векторно-значных CD_0-функций и непрерывных функций исследована в работе Ш. Алпая и З. Эрджана [2]. Дальнейшее развитие наметившейся теории показало, что основные факты о реализации CD_0-пространств в виде пространств непрерывных функций выдерживают переход не только к вектор-функциям, но и к сечениям банаховых расслоений.

Банахово расслоение (или, точнее, непрерывное банахово расслоение) над Q является формализацией интуитивного представления о «непрерывной» функции $\mathscr{X}$, определенной на Q и сопоставляющей каждой точке $q \in Q$ некоторое банахово пространство $\mathscr{X}(q)$ (называемое слоем $\mathscr{X}$ в точке q). Один из формальных подходов к определению «непрерывности» $\mathscr{X}$ [3, § 2.1; 6, 2.4.3] заключается в выделении так называемой непрерывной структуры в $\mathscr{X}$ — некоторого векторного подпространства $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ пространства сечений

$$S(Q, \mathscr{X}) \;=\; \Big\{ u\colon Q \to \bigcup_{q \in Q} \mathscr{X}(q) \;:\; u(q) \in \mathscr{X}(q) \text{ для всех } q \in Q \Big\}$$

(снабженного поточечными операциями, см. [3, 1.7.3; 6, 2.4.3]) такого, что, во-первых, поточечная норма

$$|\!|\!| c |\!|\!| \,:\, Q \to \mathbb{R}, \quad |\!|\!| c |\!|\!|(q) = \|c(q)\|_{\mathscr{X}(q)} \quad (q \in Q)$$

каждого сечения $c \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ непрерывна и, во-вторых, $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, т. е. множество $\{c(q) : c \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}\}$ всюду плотно в $\mathscr{X}(q)$ для всех $q \in Q$. Непрерывная структура $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$

позволяет определить совокупность $C(Q, \mathscr{X})$ непрерывных сечений расслоения $\mathscr{X}$ как множество всех таких сечений $u \in S(Q, \mathscr{X})$, что $\|u - c\| \in C(Q)$ при $c \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$.

Понятие непрерывного сечения банахова расслоения можно расценивать как обобщение понятия непрерывной вектор-функции. Действительно, если X — банахово пространство, то $C(Q, X) = C(Q, \mathscr{X})$, где $\mathscr{X}$ — постоянное банахово расслоение со слоями $\mathscr{X}(q) = X$, снабженное непрерывной структурой, состоящей, например, из постоянных функций $c : Q \to X$ [3, 2.2.1].

Отметим, что имеется альтернативный — и в определенном смысле эквивалентный — подход к введению непрерывной структуры, при котором непрерывность сечений возникает как чисто топологическое понятие. (Изложение обоих подходов, а также обоснование их эквивалентности можно найти в [13].) Обозначим символом $Q \otimes \mathscr{X}$ объединение попарно непересекающихся копий $\{q\} \times \mathscr{X}(q)$ слоев банахова расслоения $\mathscr{X}$ над Q:

$$Q \otimes \mathscr{X} = \big\{(q, x) : q \in Q,\ x \in \mathscr{X}(q)\big\}$$

и для произвольного сечения $u \in S(Q, \mathscr{X})$ определим функцию $Q \otimes u : Q \to Q \otimes \mathscr{X}$, полагая $(Q \otimes u)(q) = \big(q, u(q)\big)$ для всех $q \in Q$. Тогда всевозможные «трубки»

$$\big\{(q, x) \in Q \otimes \mathscr{X} : q \in U,\ \|x - c(q)\| < \varepsilon\big\},$$

определяемые сечениями $c \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$, открытыми подмножествами $U \subset Q$ и числами $\varepsilon > 0$, образуют базу некоторой открытой топологии на $Q \otimes \mathscr{X}$ [13, 5.3]. При этом индуцированная топология каждой копии $\{q\} \times \mathscr{X}(q) \subset Q \otimes \mathscr{X}$ слоя $\mathscr{X}(q)$ совпадает с исходной топологией этого слоя как банахова пространства, а произвольное сечение $u \in S(Q, \mathscr{X})$ оказывается непрерывным тогда и только тогда, когда функция $Q \otimes u : Q \to Q \otimes \mathscr{X}$ непрерывна (в обычном смысле) относительно топологии трубок [3, 2.1.7].

Различные непрерывные структуры $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ в $\mathscr{X}$ могут порождать одну и ту же топологию на $Q \otimes \mathscr{X}$. В этом случае непрерывные структуры $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ называют эквивалентными, а банаховы расслоения $(\mathscr{X}, \mathscr{C}_1)$ и $(\mathscr{X}, \mathscr{C}_2)$ отождествляют. Такое отождествление оправдывается в том числе следующим фактом.

Теорема [3, 2.1.8]. *Пусть $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ — непрерывные структуры в $\mathscr{X}$ и пусть $C(Q, \mathscr{X} \,|\, \mathscr{C}_1)$ и $C(Q, \mathscr{X} \,|\, \mathscr{C}_2)$ — соответствующие им множества непрерывных сечений. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *$\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ эквивалентны;*

(2) *$C(Q, \mathscr{X} \,|\, \mathscr{C}_1) = C(Q, \mathscr{X} \,|\, \mathscr{C}_2)$;*

(3) *$C(Q, \mathscr{X} \,|\, \mathscr{C}_1) \subset C(Q, \mathscr{X} \,|\, \mathscr{C}_2)$;*

(4) *$\mathscr{C}_1 \subset C(Q, \mathscr{X} \,|\, \mathscr{C}_2)$;*

(5) *пересечение $C(Q, \mathscr{X} \,|\, \mathscr{C}_1) \cap C(Q, \mathscr{X} \,|\, \mathscr{C}_2)$ послойно плотно в $\mathscr{X}$.*

Полезно иметь в виду следующие основные свойства множества $C(Q, \mathscr{X})$ непрерывных сечений банахова расслоения $\mathscr{X}$ над компактом Q.

(а) *Если $u \in C(Q, \mathscr{X})$, то $\|u\| \in C(Q)$.*

(б) *Множество $C(Q, \mathscr{X})$ является замкнутым векторным подпространством банахова пространства $\ell^\infty(Q, \mathscr{X})$ всех ограниченных сечений $\mathscr{X}$, снабженного равномерной нормой $\|u\| = \big\|\|u\|\big\| = \sup_{q \in Q} \|u(q)\|$.*

(в) *Если $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и $f \in C(Q)$, то $fu \in C(Q, \mathscr{X})$. В частности, $C(Q, \mathscr{X})$ является банаховым $C(Q)$-модулем.*

(г) *Множество $C(Q, \mathscr{X})$ заполняет слои $\mathscr{X}$. Более того, для любых $q \in Q$ и $x \in \mathscr{X}(q)$ существует такое сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$, что $u(q) = x$ и $\|u\| \leqslant \|x\|$.*

Доказательства утверждений (а)–(в) имеются, например, в [3, § 2.3]. Утверждение (г) принято называть теоремой Дюпре [13, 2.10]. Отметим, что эта теорема справедлива для банахова расслоения над произвольным топологическим пространством Q [5, 1.1].

Введенная выше топология трубок позволяет интерпретировать разнообразные топологические понятия и факты, касающиеся сечений $u \in S(Q, \mathscr{X})$, в терминах соответствующих функций $Q \otimes u$. Например [3, 2.3.7], сечение $u \in S(Q, \mathscr{X})$ имеет предел $x \in \mathscr{X}(q)$ в точке $q \in Q$ тогда и только тогда, когда предел функции $Q \otimes u : Q \to Q \otimes \mathscr{X}$ в точке q равен (q, x):

$$\lim_{p \to q} u(p) = x \ \Leftrightarrow \ \lim_{p \to q} \big(p, u(p)\big) = (q, x) \ \text{ в } Q \otimes \mathscr{X}.$$

Согласно [3, 2.3.8] и теореме Дюпре последнее соотношение равносильно существованию такого сечения $v \in C(Q, \mathscr{X})$, что $v(q) = x$ и $\lim\limits_{p \to q} \|u(p) - v(p)\| = 0$.

Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное банахово расслоение над Q. Аналогами пространств $c_0(Q)$ и $CD_0(Q)$ являются пространства c_0- и CD_0-сечений

$$c_0(Q, \mathscr{X}) = \big\{u \in S(Q, \mathscr{X}) : \|\!|u|\!\| \in c_0(Q)\big\},$$
$$CD_0(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X}) + c_0(Q, \mathscr{X}),$$

снабженные равномерной нормой. Пространство $CD_0(Q, \mathscr{X})$ было впервые рассмотрено Т. Хоим и Д. А. Роббинсом в статье [14] $\big($там оно фигурирует как сумма $\Gamma(\pi)+\Gamma(\pi_0)\big)$, где, в частности, построена линейная изометрия этого пространства на банахово пространство всех непрерывных сечений некоторого банахова расслоения $\widetilde{\mathscr{X}}$ над удвоением $\widetilde{Q}$ компакта Q. (О том, как устроено расслоение $\widetilde{\mathscr{X}}$, мы поговорим чуть позже.) Кроме того, в [14] установлены некоторые взаимосвязи между $C(Q)$-линейными операторами из $C(Q, \mathscr{X})$ в $C(Q)$ и $C\big(\widetilde{Q}\big)$-линейными операторами из $C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}}\big)$ в $C\big(\widetilde{Q}\big)$.

Достаточно очевидное разложение в прямую сумму $CD_0(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X}) \oplus c_0(Q, \mathscr{X})$ позволяет ввести в рассмотрение линейные проекторы $(\cdot)_c$ и $(\cdot)_d$ пространства $CD_0(Q, \mathscr{X})$ на соответствующие подпространства $C(Q, \mathscr{X})$ и $c_0(Q, \mathscr{X})$. Таким образом, каждое сечение $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ единственным образом представляется в виде суммы $u = u_c + u_d$ своей непрерывной $u_c \in C(Q, \mathscr{X})$ и «дискретной» $u_d \in c_0(Q, \mathscr{X})$ частей.

Из упомянутой выше теоремы В. Г. Троицкого легко вывести ее дословный аналог для сечений.

Следствие. *Сечение $u \in S(Q, \mathscr{X})$ принадлежит $CD_0(Q, \mathscr{X})$ тогда и только тогда, когда u имеет предел в каждой точке Q. При этом непрерывная часть $u_c \in C(Q, \mathscr{X})$ сечения $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ вычисляется формулой*

$$u_c(q) = \lim_{p \to q} u(p) \quad \textit{для всех} \ \ q \in Q.$$

Несложная проверка показывает, что поточечная норма $\|\!|u|\!\| : Q \to \mathbb{R}$ всякого сечения $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ принадлежит $CD_0(Q)$, причем $\|\!|u|\!\|_c = \|\!|u_c|\!\|$ и $\big|\|\!|u|\!\|_d\big| \leqslant \|\!|u_d|\!\|$. Таким образом, пространство $CD_0(Q, \mathscr{X})$, снабженное поточечной нормой $\|\!|\cdot|\!\|$, является решеточно нормированным пространством над банаховой решеткой $CD_0(Q)$ и пространством со смешанной нормой $\|u\| = \big\|\|\!|u|\!\|\big\|$ [6, 7.1.1]. Кроме того, из ограниченности линейных проекторов $(\cdot)_c$ и $(\cdot)_d$ и полноты пространств $C(Q, \mathscr{X})$ и $c_0(Q, \mathscr{X})$ вытекает полнота $CD_0(Q, \mathscr{X})$ относительно этой смешанной нормы $\|\cdot\|$. Отметим также, что $CD_0(Q, \mathscr{X})$ является банаховым $CD_0(Q)$-модулем относительно поточечного умножения.

Обратимся теперь к представлению $CD_0(Q, \mathscr{X})$ в виде пространства непрерывных сечений. Следуя [14], определим слои будущего банахова расслоения $\widetilde{\mathscr{X}}$ над удвоением $\widetilde{Q} = Q_c \cup Q_d$ следующим образом:

$$\widetilde{\mathscr{X}}(q_c) = \widetilde{\mathscr{X}}(q_d) = \mathscr{X}(q), \quad q \in Q.$$

Далее, для каждого сечения $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ определим сечение $\widetilde{u} \in S\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}}\big)$, полагая

$$\widetilde{u}(q_c) := u_c(q), \quad \widetilde{u}(q_d) := u(q), \quad q \in Q.$$

Покажем, что множество

$$\mathscr{C}_{\widetilde{\mathscr{X}}} := \big\{\widetilde{u} : u \in CD_0(Q, \mathscr{X})\big\}$$

является непрерывной структурой в $\widetilde{\mathscr{X}}$. Действительно, в силу очевидной линейности отображения $u \mapsto \widetilde{u}$ множество $\mathscr{C}_{\widetilde{\mathscr{X}}}$ является векторным подпространством $S\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}}\big)$. Кроме того, для любого сечения $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$ мы имеем $\|\widetilde{u}\| = \widetilde{\|u\|} \in C\big(\widetilde{Q}\big)$. Наконец, множество $\mathscr{C}_{\widetilde{\mathscr{X}}}$ содержит послойно плотное в $\widetilde{\mathscr{X}}$ множество $\big\{\widetilde{u} : u \in C(Q, \mathscr{X})\big\}$ и тем самым само является послойно плотным в $\widetilde{\mathscr{X}}$. Условимся сохранять символ $\widetilde{\mathscr{X}}$ для обозначения непрерывного банахова расслоения $\big(\widetilde{\mathscr{X}}, \mathscr{C}_{\widetilde{\mathscr{X}}}\big)$ над $\widetilde{Q}$ и называть расслоение $\widetilde{\mathscr{X}}$ *удвоением расслоения* $\mathscr{X}$.

Теорема [14]. *Отображение $u \mapsto \widetilde{u}$ осуществляет линейную изометрию $CD_0(Q, \mathscr{X})$ на $C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}}\big)$. При этом $\widetilde{fu} = \widetilde{f}\widetilde{u}$ для любых $f \in CD_0(Q)$ и $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$.*

В качестве иллюстрации мы уточним связь между расслоениями и их удвоениями в случае постоянных расслоений, а также продемонстрируем согласование этой связи с переходом к подрасслоению, непрерывной заменой переменной и ограничением на топологическое подпространство. (Подробные доказательства всех приведенных ниже утверждений имеются в [4].)

Рассмотрим произвольное банахово пространство X и предположим, что $\mathscr{X}$ является постоянным банаховым расслоением над Q со слоями $\mathscr{X}(q) = X$. Из определения удвоения $\widetilde{\mathscr{X}}$ видно, что все его слои совпадают с X. Обозначим через $\operatorname{const}(Q, X)$ и $\operatorname{const}\big(\widetilde{Q}, X\big)$ множества всех постоянных сечений расслоений $\mathscr{X}$ и $\widetilde{\mathscr{X}}$ соответственно. Как легко видеть,

$$\operatorname{const}\big(\widetilde{Q}, X\big) = \big\{\widetilde{c} : c \in \operatorname{const}(Q, X)\big\} \subset C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}}\big).$$

Следовательно, $\operatorname{const}\big(\widetilde{Q}, X\big)$ является непрерывной структурой в $\widetilde{\mathscr{X}}$, эквивалентной $\mathscr{C}_{\widetilde{\mathscr{X}}}$, а значит, $\widetilde{\mathscr{X}}$ представляет собой постоянное банахово расслоение над $\widetilde{Q}$ со слоем X. Это наблюдение позволяет почти без изменений перенести все основные факты о пространствах сечений $CD_0(Q, \mathscr{X})$ и $C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}}\big)$ на случай пространств вектор-функций $CD_0(Q, X) = C(Q, X) + c_0(Q, X)$ и $C\big(\widetilde{Q}, X\big)$.

Далее, пусть $\mathscr{X}_0$ — подрасслоение банахова расслоения $\mathscr{X}$ над Q, т. е. такое банахово расслоение над Q, что $\mathscr{X}_0(q)$ является банаховым подпространством $\mathscr{X}(q)$ для каждой точки $q \in Q$ и, кроме того, $C(Q, \mathscr{X}_0) = C(Q, \mathscr{X}) \cap S(Q, \mathscr{X}_0)$ [3, 2.2.2; 6, 2.4.11]. Учитывая очевидное равенство $c_0(Q, \mathscr{X}_0) = c_0(Q, \mathscr{X}) \cap S(Q, \mathscr{X}_0)$, мы заключаем, что

$$CD_0(Q, \mathscr{X}_0) \subset CD_0(Q, \mathscr{X}) \cap S(Q, \mathscr{X}_0).$$

Любопытно отметить, что множества $CD_0(Q, \mathscr{X}_0)$ и $CD_0(Q, \mathscr{X}) \cap S(Q, \mathscr{X}_0)$ могут как различаться, так и совпадать, причем оба случая возможны для нетривиальных подрасслоений $\mathscr{X}_0$ (т. е. ненулевых и не равных всему $\mathscr{X}$). Вместе с тем, несмотря на возможное отсутствие равенства $CD_0(Q, \mathscr{X}_0) = CD_0(Q, \mathscr{X}) \cap S(Q, \mathscr{X}_0)$, аналогичное равенство для удвоений рассматриваемых объектов справедливо всегда: если $\mathscr{X}_0$ — подрасслоение $\mathscr{X}$, то $\widetilde{\mathscr{X}_0}$ — подрасслоение $\widetilde{\mathscr{X}}$ и, в частности, $C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}_0}\big) = C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}}\big) \cap S\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathscr{X}_0}\big)$.

Переходя к анализу согласования между процедурой удвоения и непрерывной заменой переменной, рассмотрим произвольные непустые компакты P и Q без изолированных точек. Для банахова расслоения $\mathscr{X} = (\mathscr{X}, \mathscr{C}_{\mathscr{X}})$ над Q и непрерывной функции $\varphi : P \to Q$ символом $\mathscr{X} \circ \varphi$ обозначается банахово расслоение над P со слоями $(\mathscr{X} \circ \varphi)(p) = \mathscr{X}\big(\varphi(p)\big)$ и непрерывной структурой $\{c \circ \varphi : c \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}\}$ [3, 2.2.6]. Как легко видеть, $u \circ \varphi \in C(P, \mathscr{X} \circ \varphi)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$.

Функцию $\varphi : P \to Q$ назовем *локально уникальной*, если любая точка $p_0 \in P$ имеет такую окрестность $U \subset P$, что $\varphi(p) \neq \varphi(p_0)$ для всех $p \in U \setminus \{p_0\}$. Оказывается, что непрерывные локально уникальные функции самым тесным образом связаны с пространствами CD_0-функций и CD_0-сечений. А именно, следующие свойства непрерывной функции $\varphi : P \to Q$ равносильны:

(1) функция φ локально уникальна;

(2) прообраз $\varphi^{-1}(q)$ любой точки $q \in Q$ конечен;

(3) если $f \in c_0(Q)$, то $f \circ \varphi \in c_0(P)$;

(4) если $f \in CD_0(Q)$, то $f \circ \varphi \in CD_0(P)$, $(f \circ \varphi)_c = f_c \circ \varphi$, $(f \circ \varphi)_d = f_d \circ \varphi$;

(5) если $\mathscr{X}$ — банахово расслоение над Q и $u \in c_0(Q, \mathscr{X})$, то $u \circ \varphi \in c_0(P, \mathscr{X} \circ \varphi)$;

(6) если $\mathscr{X}$ — банахово расслоение над Q и $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$, то $u \circ \varphi \in CD_0(P, \mathscr{X} \circ \varphi)$, $(u \circ \varphi)_c = u_c \circ \varphi$, $(u \circ \varphi)_d = u_d \circ \varphi$.

Не менее удачной оказывается связь локально уникальных функций с удвоениями $\widetilde{P} = P_c \cup P_d$, $\widetilde{Q} = Q_c \cup Q_d$. А именно, если определить «удвоение» $\widetilde{\varphi} : \widetilde{P} \to \widetilde{Q}$ функции $\varphi : P \to Q$ вполне естественными формулами

$$\widetilde{\varphi}(p_c) := \varphi(p)_c, \quad \widetilde{\varphi}(p_d) := \varphi(p)_d, \quad p \in P,$$

то функция $\widetilde{\varphi}$ будет непрерывной тогда и только тогда, когда функция φ непрерывна и локально уникальна. Непрерывность $\widetilde{\varphi} : \widetilde{P} \to \widetilde{Q}$ дает возможность рассмотреть банахово расслоение $\widetilde{\mathscr{X}} \circ \widetilde{\varphi}$ над $\widetilde{P}$ (где $\mathscr{X}$ — по-прежнему банахово расслоение над Q). Как и следовало ожидать, в этом случае имеет место равенство $\widetilde{\mathscr{X}} \circ \widetilde{\varphi} = \widetilde{\mathscr{X} \circ \varphi}$, причем $\widetilde{u} \circ \widetilde{\varphi} = \widetilde{u \circ \varphi}$ для всех $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$.

Пусть теперь P — непустой компакт без изолированных точек, являющийся топологическим подпространством Q. Для банахова расслоения $\mathscr{X} = (\mathscr{X}, \mathscr{C}_{\mathscr{X}})$ над Q символом $\mathscr{X}|_P$ обозначается банахово расслоение над P со слоями $(\mathscr{X}|_P)(p) = \mathscr{X}(p)$ и непрерывной структурой $\{c|_P : c \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}\}$ [3, 2.2.5]. Сразу отметим очевидное равенство $C(P, \mathscr{X}|_P) = C(P, \mathscr{X})$, где $C(P, \mathscr{X})$ — множество всех непрерывных сечений расслоения $\mathscr{X}$, определенных на P [3, 2.1.2]. Вновь оправдывая ожидания, удвоение $\widetilde{P}$ компакта P оказывается топологическим подпространством удвоения $\widetilde{Q}$ компакта Q. При этом имеют место следующие соотношения:

(а) $\widetilde{\mathscr{X}|_P} = \widetilde{\mathscr{X}}\big|_{\widetilde{P}}$ и, в частности, $C\Big(\widetilde{P}, \widetilde{\mathscr{X}|_P}\Big) = C\big(\widetilde{P}, \widetilde{\mathscr{X}}\big)$;

(б) $\widetilde{u|_P} = \widetilde{u}|_{\widetilde{P}}$ для всех $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$;

(в) если $u \in CD_0(Q, \mathscr{X})$, то $u|_P \in CD_0(P, \mathscr{X}|_P)$, $(u|_P)_c = u_c|_P$, $(u|_P)_d = u_d|_P$.

Из определения удвоения $\widetilde{Q} = Q_c \cup Q_d$ видно, что отображение $(\cdot)_c$ является гомеоморфизмом Q на замкнутое подмножество $Q_c \subset \widetilde{Q}$. Это наблюдение позволяет, рассматривая $(\cdot)_c$ в качестве отождествления, считать Q топологическим подпространством $\widetilde{Q}$. Тогда, принимая это соглашение, мы приходим к следующим равенствам:

(а$'$) $\widetilde{\mathscr{X}} \circ (\cdot)_c = \widetilde{\mathscr{X}}\big|_Q = \mathscr{X}$;

(б$'$) $\widetilde{u} \circ (\cdot)_c = \widetilde{u}|_Q = u$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$.

В соответствии со сложившейся традицией, вводя в рассмотрение какие-либо новые объекты, мы не можем позволить себе оставить в стороне исследование соответствующих морфизмов. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — банаховы расслоения над Q. (Как и прежде, Q — непустой компакт без изолированных точек.) Символом $S[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$ обозначим совокупность всевозможных функций H, определенных на Q и сопоставляющих точкам $q \in Q$ ограниченные линейные операторы $H(q):\ \mathscr{X}(q) \to \mathscr{Y}(q)$. Как легко видеть, $S[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ является векторным пространством относительно поточечных операций.

Для $H \in S[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ и $u \in S(Q,\mathscr{X})$ будем обозначать символом Hu сечение расслоения $\mathscr{Y}$, определяемое формулой $(Hu)(q) = H(q)u(q)$. Введем в рассмотрение векторные подпространства $C[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$, $c_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$, $CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}] \subset S[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$, состоящие из тех функций $H \in S[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$, для которых из $u \in C(Q,\mathscr{X})$ следует $Hu \in C(Q,\mathscr{Y})$, $Hu \in c_0(Q,\mathscr{Y})$, $Hu \in CD_0(Q,\mathscr{Y})$ соответственно. Элементы этих трех подпространств условимся называть соответственно *гомоморфизмами*, *c_0-гомоморфизмами* и *CD_0-гомоморфизмами* из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$. Использование термина «CD_0-гомоморфизм» оправдано еще и тем фактом, что пространство $CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ состоит в точности из тех функций $H \in S[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$, для которых из $u \in CD_0(Q,\mathscr{X})$ следует $Hu \in CD_0(Q,\mathscr{Y})$.

Как легко видеть, $C[\mathscr{X},\mathscr{Y}] + c_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}] \subset CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$.

С помощью принципа ограниченности можно показать, что $\sup_{q\in Q}\|H(q)\| < \infty$ для любого CD_0-гомоморфизма H. При этом каждое из пространств $C[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$, $c_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$, $CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ является банаховым пространством относительно равномерной нормы $\|H\| = \sup_{q\in Q}\|H(q)\|$.

Простым примером c_0-гомоморфизма служит любая функция $H \in S[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$, поточечная норма $|\!|\!|H|\!|\!| :\ q \mapsto \|H(q)\|$ которой принадлежит $c_0(Q)$. Тем не менее множество $c_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$, вообще говоря, не исчерпывается функциями такого вида. Действительно, из приведенных в [14, Example 9] построений следует, что в случае сепарабельного компакта Q существует c_0-гомоморфизм, поточечная норма которого равна единице на всюду плотном подмножестве Q. Более того, можно утверждать, что вне зависимости от свойств Q поточечной нормой c_0-гомоморфизма может быть совершенно произвольная ограниченная положительная функция $f:\ Q \to \mathbb{R}$. А именно, для любого непустого компакта Q без изолированных точек существуют банаховы расслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ над Q такие, что для произвольной функции $0 \leqslant f \in \ell^\infty(Q)$ найдется c_0-гомоморфизм $H \in c_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ с поточечной нормой $|\!|\!|H|\!|\!| = f$. Стоит отметить, что в качестве $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ можно выбрать постоянные расслоения, т. е. сформулированное выше утверждение сохраняет силу для функций $H:\ Q \to B(X,Y)$, где X и Y — банаховы пространства.

Как уже отмечалось, сумма гомоморфизма и c_0-гомоморфизма представляет собой CD_0-гомоморфизм. Менее очевидным представляется тот факт, что такими суммами исчерпывается все множество CD_0-гомоморфизмов. А именно, имеет место разложение в прямую сумму

$$CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}] \;=\; C[\mathscr{X},\mathscr{Y}] \oplus c_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}].$$

В частности, любой CD_0-гомоморфизм $H \in CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ единственным образом представляется в виде суммы $H = H_c + H_d$, где $H_c \in C[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ и $H_d \in c_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$. При этом $\|H_c\| \leqslant \|H\|$ и $\|H_d\| \leqslant 2\|H\|$ для всех $H \in CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$.

Очевидное неравенство $\|fH\| \leqslant \|f\|\|H\|$ ($f \in CD_0(Q)$, $H \in CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$) позволяет заключить, что $CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ является банаховым $CD_0(Q)$-модулем.

Теперь рассмотрим удвоения $\widetilde{\mathscr{X}}$ и $\widetilde{\mathscr{Y}}$ банаховых расслоений $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ и для каждого CD_0-гомоморфизма $H \in CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ определим функцию $\widetilde{H} \in S\big[\widetilde{\mathscr{X}},\widetilde{\mathscr{Y}}\big]$, полагая

$$\widetilde{H}(q_c) := H_c(q), \quad \widetilde{H}(q_d) := H(q), \quad q \in Q.$$

Теорема. *Отображение $H \mapsto \widetilde{H}$ осуществляет линейную изометрию банахова пространства $CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ на $C\big[\widetilde{\mathscr{X}},\widetilde{\mathscr{Y}}\big]$. При этом для любых $f \in CD_0(Q)$, $u \in CD_0(Q,\mathscr{X})$ и $H \in CD_0[\mathscr{X},\mathscr{Y}]$ имеют место равенства $\widetilde{Hu} = \widetilde{H}\widetilde{u}$ и $\widetilde{fH} = \widetilde{f}\widetilde{H}$.*

Для произвольной определенной на $\widetilde{Q}$ функции G положим

$$G|_c := G \circ (\cdot)_c = G(\cdot, 0), \quad G|_d := G \circ (\cdot)_d = G(\cdot, 1).$$

Тогда из последней теоремы вытекает следующее описание гомоморфизмов из $\widetilde{\mathscr{X}}$ в $\widetilde{\mathscr{Y}}$: функция $G \in S\big[\widetilde{\mathscr{X}},\widetilde{\mathscr{Y}}\big]$ принадлежит $C\big[\widetilde{\mathscr{X}},\widetilde{\mathscr{Y}}\big]$ в том и только в том случае, если

$$G|_c \in C[\mathscr{X}, \mathscr{Y}], \quad G|_d - G|_c \in c_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$$

или, что равносильно,

$$G|_d \in CD_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}], \quad G|_c = (G|_d)_c.$$

Отметим также, что образы пространств $C[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$ и $c_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$ относительно изометрии $H \mapsto \widetilde{H}$ описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \big\{\, \widetilde{H} \;:\; H \in C[\mathscr{X}, \mathscr{Y}] \,\big\} &= \big\{\, G \in C\big[\widetilde{\mathscr{X}},\widetilde{\mathscr{Y}}\big] \;:\; G|_c = G|_d \,\big\} \\ &= \big\{\, G \in S\big[\widetilde{\mathscr{X}},\widetilde{\mathscr{Y}}\big] \;:\; G|_c = G|_d \in C[\mathscr{X}, \mathscr{Y}] \,\big\}, \\ \big\{\, \widetilde{H} \;:\; H \in c_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}] \,\big\} &= \big\{\, G \in C\big[\widetilde{\mathscr{X}},\widetilde{\mathscr{Y}}\big] \;:\; G|_c = 0 \,\big\} \\ &= \big\{\, G \in S\big[\widetilde{\mathscr{X}},\widetilde{\mathscr{Y}}\big] \;:\; G|_c = 0,\ G|_d \in c_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}] \,\big\}. \end{aligned}$$

Приведенные выше сведения позволяют легко описать пространства гомоморфизмов, c_0-гомоморфизмов и CD_0-гомоморфизмов в терминах их действия в банаховых модулях. Для произвольных банаховых $C(Q)$-модулей $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ обозначим символом $\mathrm{Hom}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ банахов $C(Q)$-модуль всех ограниченных $C(Q)$-линейных операторов из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$. Кроме того, для $H \in CD_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$ определим функцию $T_H \colon C(Q, \mathscr{X}) \to CD_0(Q, \mathscr{Y})$, полагая $(T_H u)(q) = H(q)u(q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и $q \in Q$. Тогда отображение $H \mapsto T_H$ осуществляет $C(Q)$-линейные изометрии между следующими парами банаховых $C(Q)$-модулей:

$$\begin{aligned} C[\mathscr{X}, \mathscr{Y}] &\;\leftrightarrow\; \mathrm{Hom}\big(C(Q, \mathscr{X}), C(Q, \mathscr{Y})\big), \\ c_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}] &\;\leftrightarrow\; \mathrm{Hom}\big(C(Q, \mathscr{X}), c_0(Q, \mathscr{Y})\big), \\ CD_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}] &\;\leftrightarrow\; \mathrm{Hom}\big(C(Q, \mathscr{X}), CD_0(Q, \mathscr{Y})\big). \end{aligned}$$

В частности, банаховы пространства $CD_0[\mathscr{X}, \mathscr{Y}]$, $C\big[\widetilde{\mathscr{X}},\widetilde{\mathscr{Y}}\big]$, $\mathrm{Hom}\big(C(Q, \mathscr{X}), CD_0(Q, \mathscr{Y})\big)$ и $\mathrm{Hom}\big(C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathscr{X}}), C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathscr{Y}})\big)$ линейно изометричны. Кроме того, имеет место разложение в прямую сумму

$$\mathrm{Hom}\big(C(Q, \mathscr{X}), CD_0(Q, \mathscr{Y})\big) \;=\; \mathrm{Hom}\big(C(Q, \mathscr{X}), C(Q, \mathscr{Y})\big) \;\oplus\; \mathrm{Hom}\big(C(Q, \mathscr{X}), c_0(Q, \mathscr{Y})\big).$$

Таким образом, любой ограниченный $C(Q)$-линейный оператор $T : C(Q, \mathscr{X}) \to CD_0(Q, \mathscr{Y})$ единственным образом представляется в виде суммы $T = T_c + T_d$ ограниченных $C(Q)$-линейных операторов $T_c : C(Q, \mathscr{X}) \to C(Q, \mathscr{Y})$ и $T_d : C(Q, \mathscr{X}) \to c_0(Q, \mathscr{Y})$. При этом $T_c = T_{H_c}$ и $T_d = T_{H_d}$, где H — такой CD_0-гомоморфизм из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, что $T = T_H$.

Литература

1. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
2. *Алпай Ш., Эрджан З.* Заметка о пространствах $CD_0(K)$ // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 514–517.
3. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Тр. Ин-та математики СО РАН.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995.—Т. 29.—С. 63–211.

4. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Пространства CD_0-сечений и CD_0-гомоморфизмов банаховых расслоений // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика.—2007.—(В печати).
5. *Коптев А. В.* Несколько классов банаховых расслоений с непрерывными слабо непрерывными сечениями // Сиб. мат. журн.—2004.—Т. 45, № 3.—С. 600–612.
6. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология.—М.: Мир, 1986.—751 с.
8. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* Regular operators from and into a small Riesz space // Indag. Math. N.S.—1991.—V. 2, № 3.—P. 257–274.
9. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* Remarkable classes of unital AM-spaces // J. Math. Anal. Appl.—1993.—V. 180, № 2.—P. 398–411.
10. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2.—1993.—V. 44, № 175.—P. 257–270.
11. *Alpay Ş., Ercan Z.* $CD_0(K,E)$ and $CD_\omega(K,E)$-spaces as Banach lattices // Positivity.—2000.—V. 4, № 3.—P. 213–225.
12. *Ercan Z.* A concrete description of $CD_0(K)$-spaces as $C(X)$-spaces and its applications // Proc. Amer. Math. Soc.—2004.—V. 132.—P. 1761–1763.
13. *Gierz G.* Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality.—Berlin: Springer, 1982. (Lecture Notes in Math.; № 955.)
14. *Hõim T., Robbins D. A.* Section spaces of Banach bundles which generalize some function spaces // Siberian Adv. Math.—2006.—V. 16, № 3.—P. 71–81.
15. *Troitsky V. G.* On $CD_0(K)$-spaces // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 1.—С. 71–73.

Статья поступила 26 сентября 2007 г.

Гутман Александр Ефимович, д. ф.-м. н.
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, 630090, РОССИЯ
E-mail: `gutman@math.nsc.ru`

Коптев Александр Викторович, к. ф.-м. н.
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, 630090, РОССИЯ
E-mail: `koptev@math.nsc.ru`