Владикавказский математический журнал
октябрь–декабрь, 2006, Том 8, Выпуск 4

УДК **517.98**

О ТЕОРЕМЕ ТИПА ШТРАССЕНА В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗМЕРИМЫХ СЕЛЕКТОРОВ[1]

А. Г. Кусраев

Светлой памяти А. М. Рубинова

Устанавливается вариант теоремы Штрассена о дезинтегрировании для пространства измеримых селекторов измеримых банаховых расслоений с лифтингом.

1. Введение

Одним из ключевых вопросов при исследовании выпуклых интегральных функционалов и операторов является вопрос об аналитическом представлении соответствующих субдифференциалов [2, 5]. Формально говоря, речь идет о перестановочности операций интегрирования и субдифференцирования, т. е. о справедливости формулы вида

$$\partial\left(\int\limits_{\Omega} f(\omega,\cdot(\omega))\,d\mu(\omega)\right)(u_0)=\int\limits_{\Omega}\partial f(\omega,\cdot)(u_0(\omega))\,d\mu(\omega).$$

Несмотря на внешнюю схожесть с классическим правилом дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, обоснование этого математического факта, называемого иногда *дезинтегрированием*, связано с тонкими вопросами теории меры и теории положительных операторов. Впервые такой результат получил В. Штрассен [6] для случая субдифференциалов в нуле сублинейных функционалов. Дальнейшие исследования в этом направлении привели к созданию теории двойственности выпуклых интегральных функционалов и операторов в пространствах измеримых вектор-функций, которая вместе соответствующей библиографией и историческими комментариями представлена в [2, 4, 5].

Развитие аналогичной теории в пространствах измеримых селекторов представляется важным не только как содержательная теоретическая задача, но и с точки зрения приложений к экстремальным задачам. Вместе с тем, хорошей основой для такого расширения двойственности выпуклых интегральных функционалов может послужить теория измеримых банаховых расслоений с лифтингом, построенная А. Е. Гутманом, см. [1, 3]. Настоящую работу, в которой устанавливается вариант теоремы Штрассена в

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант РФФИ № 06-01-00622).

пространстве измеримых селекторов (сечений), можно рассматривать как первый шаг в указанном направлении.

Своим интересом к выпуклым интегральным операторам я обязан А. М. Рубинову*, памяти которого посвящается настоящая статья с чувством искренней признательности.

2. Измеримое банахово расслоение

Всюду ниже (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, которое, как правило, обладает свойством прямой суммы. Необходимые сведения из теории измеримых банаховых расслоений см. в [1, 3].

Банахово расслоение над Ω — произвольное отображение $\mathcal{X}$, определенное на Ω и ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое банахово пространство $\mathcal{X}_\omega := \mathcal{X}(\omega)$ — *слой* в точке ω. Норма элемента x в слое $\mathcal{X}(\omega)$ будет обозначаться символом $\|x\|_\omega := \|x\|_{\mathcal{X}(\omega)}$. Функция u, определенная на подмножестве $\operatorname{dom}(u) \subset \Omega$, называется *сечением* (реже, *селектором*) над $\operatorname{dom}(u)$ *расслоения* $\mathcal{X}$, если $u(\omega) \in \mathcal{X}(\omega)$ для всех $\omega \in \operatorname{dom}(u)$. Говорят, что сечение u определено почти всюду, если множество $\Omega \setminus \operatorname{dom}(u)$ имеет нулевую меру. Множество всех почти всюду определенных сечений расслоения $\mathcal{X}$ обозначается символом $S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$. Множество сечений $U \subset S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$ называют послойно плотным в $\mathcal{X}$, если множество $\{u(\omega) : u \in U,\ \omega \in \operatorname{dom}(u)\}$ плотно в $\mathcal{X}(\omega)$ для любой точки $\omega \in \Omega$. Сечение u называют *скалярно измеримым*, если измерима функция $\omega \mapsto \|u(\omega)\|_\omega$. Линейная комбинация двух почти всюду определенных сечений определяется поточечно и представляет собой почти всюду определенное сечение (над пересечением их областей определения).

Измеримой структурой в $\mathcal{X}$ называют послойно плотное множество скалярно измеримых сечений $\mathcal{C} \subset S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$, замкнутое относительно образования линейной комбинации любых двух элементов. Банахово расслоение над Ω с фиксированной измеримой структурой называют *измеримым банаховым расслоением* над Ω. При этом пишут проще $\mathcal{X}$ вместо $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ и иногда обозначать измеримую структуру $\mathcal{C}$ символом $\mathcal{C}_\mathcal{X}$.

Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ — измеримое банахово расслоение над Ω. Сечение, совпадающее с u на измеримом множестве $A \in \Sigma$ и равное нулю на дополнении к A, обозначим символом $[A]u$. Сечение $s \in S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$ называют ступенчатым, если $s = \sum_{k=1}^{n} [A_k] c_k$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ и $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}$. Сечение $u \in S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$ именуют *измеримым*, если для каждого $K \in \Sigma,\ \mu(K) < +\infty$, существует такая последовательность $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, что $s_n(\omega) \to u(\omega)$ для почти всех $\omega \in K$.

Множество всех измеримых сечений расслоения $\mathcal{X}$ обозначим символом $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$. Для $u, v \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ положим $u \sim v$, если $u(\omega) = v(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Класс эквивалентности, содержащий элемент $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$, обозначается символом $\tilde{u} := u^\sim$. Фактор-множество $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})/\!\sim$ естественным образом превращается в векторное пространство.

---

*) При нашей первой встрече в 1978 году А. М. Рубинов находился под впечатлением недавно изданной монографии Шарля Кастена и Мишеля Валадье [5], содержащей, в частности, результаты о двойственности выпуклых интегральных функционалов и обобщение теоремы В. Штрассена о дезинтегрировании. Он рассказывал об основных идеях и результатах книги, о своих собственных замыслах, частично воплощенных в монографии: *Рубинов А. М.* Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам.—Л.: Наука, 1980.—166 с. Его увлеченность математикой была заразительной, а генерируемые им идеи — вдохновляющими. Он был щедр на оригинальные мысли и добрые чувства, потому общение с ним было легким и радостным. Последующие встречи с ним не изменили этих первых впечатлений. Таким он и остается в моей памяти...

Далее, для каждого элемента $\tilde{u} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})/\!\sim$ вводится векторная норма $|\!|\tilde{u}|\!| := |\!|u|\!|^{\sim} \in L^0(\Omega)$. Ясно, что пара $\big(\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})/\!\sim, |\!|\cdot|\!|\big)$ является решеточно нормированным пространством над $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$; это пространство будем обозначать символом $L^0(\Omega, \Sigma, \mu, \mathcal{X})$ или, короче, $L^0(\Omega, \mathcal{X})$. Заметим, что пространство $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ можно снабдить также естественной структурой модуля над кольцом $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, полагая $\tilde{e}\tilde{u} := (eu)^{\sim}$ для всех $e \in \mathcal{M}(\Omega)$ и $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$. При этом выполняется $|\!|\tilde{e}\tilde{u}|\!| = |\!|\tilde{e}|\!||\!|\tilde{u}|\!|$.

Пусть E — идеальное пространство над $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Положим

$$E(\mathcal{X}) := \{u \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu, \mathcal{X}) : \ |\!|u|\!| \in E\}.$$

Известно, что $E(\mathcal{X})$ — пространство Банаха — Канторовича, а $L^0(\Omega, \Sigma, \mu, \mathcal{X})$ — его максимальное расширение, см. [3; теорема 2.5.3].

3. Сопряженное банахово расслоение

По измеримому банахову расслоению с лифтингом $\mathcal{X}$ над Ω однозначно определяется новое измеримое банахово расслоение с лифтнгом $\mathcal{X}'$ над Ω, которое называют *сопряженным.* При этом в каждой точке $\omega \in \Omega$ слой $\mathcal{X}'(\omega)$ является замкнутым подпространством сопряженного пространства $\mathcal{X}(\omega)'$. Включение $\mathcal{X}'(\omega) \subset \mathcal{X}(\omega)'$ может оказаться строгим, но для любой точки $\omega \in \Omega$ пространство $\mathcal{X}'(\omega)$ нормирует $\mathcal{X}(\omega)$, т. е.

$$\|x\|_\omega = \max\{\langle x|x'\rangle_\omega : x' \in \mathcal{X}'(\omega), \ \|x'\|_\omega \leqslant 1\}$$

для всех $x \in \mathcal{X}(\omega)$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ — каноническая билинейная форма двойственности $\mathcal{X}(\omega) \leftrightarrow \mathcal{X}(\omega)'$.

Если $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ и $u' \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X}')$, то $\langle u, u' \rangle \in \mathcal{M}(\Omega)$, где $\langle u, u' \rangle$ обозначает функцию $\omega \mapsto \langle u(\omega), u'(\omega) \rangle$. Более того, для произвольных классов $\tilde{u} \in L^0(\Omega, \mathcal{X})$ и $\tilde{u}' \in L^0(\Omega, \mathcal{X}')$ и любых представителей $u \in \tilde{u}$ и $u' \in \tilde{u}'$ функции $\langle u(\cdot), u'(\cdot) \rangle$, определяют один и тот же класс эквивалентности входящий в $L^0(\Omega)$, который обозначим таким же символом $\langle \tilde{u}, \tilde{u}' \rangle$.

Отображение $(\tilde{u}, \tilde{u}') \mapsto \langle \tilde{u}, \tilde{u}' \rangle$ является билинейным оператором, приводящим пространства $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ и $L^0(\Omega, \mathcal{X}')$ в $L^0(\Omega)$-значную двойственность. При этом для любых фиксированных $u_0 \in M(\Omega, \mathcal{X})$ и $u_0' \in M(\Omega, \mathcal{X}')$ выполняется

$$|\!|u_0|\!| = \max\{\langle u_0, u' \rangle : \ u' \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X}'), \ |\!|u'|\!| \leqslant 1\},$$
$$|\!|u_0'|\!| = \sup\{\langle u, u_0' \rangle : \ u \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X}), \ |\!|u|\!| \leqslant 1\},$$

где $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ обозначает $E(\mathcal{X})$ при $E = L^\infty(\Omega)$. Все эти факты о сопряженном измеримом банаховом расслоении имеются в [1].

4. Основной результат

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, а $\mathcal{X}$ — измеримое банахово расслоение над (Ω, Σ, μ). Рассмотрим идеальное пространство $E \subset L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и двойственное к нему идеальное пространство

$$E' := \{e' \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu) : \ (\forall\, e \in E)\ ee' \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)\}.$$

Предположим, что дано семейство $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ непрерывных сублинейных функционалов $p_\omega : \mathcal{X}_\omega \to \mathbb{R}$, причем для каждого $u \in E(\mathcal{X})$ функция $\omega \mapsto p_\omega(u(\omega)) := p(\omega, x(\omega))$ μ-измерима, а функция $\omega \mapsto \|p_\omega\|$ мажорируется некоторой измеримой функцией из E'. Тогда формула

$$p(u) = \int\limits_\Omega p(\omega, (u(\omega)))\, d\mu(\omega) \quad (u \in E(\mathcal{X})),$$

определяет сублинейный функционал $p : E(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$.

Обозначим символом $\int_\Omega \partial(p_\omega)\,d\mu(\omega)$ множество всех линейных функционалов на $E(\mathcal{X})$, представимых в виде

$$u(\cdot) \mapsto \int\limits_\Omega \langle u(\omega), u'(\omega)\rangle\, d\mu(\omega),$$

где $u'(\cdot)$ — измеримое сечение сопряженного расслоения $\mathcal{X}'$ такое, что $u'(\omega) \in \partial(p_\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $|u'| \in E'$.

Измеримое банахово расслоение $\mathcal{X}$ назовем *сепарабельным*, если существует счетное множество измеримых сечений, послойно плотное в $\mathcal{X}$.

Теорема. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы, а $\mathcal{X}$ — сепарабельное банахово расслоение над (Ω, Σ, μ) с лифтингом. Если семейство $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ удовлетворяет указанным выше условиям, то имеет место представление*

$$\partial p = \int\limits_\Omega \partial(p_\omega)\, d\mu(\omega).$$

$\lhd$ Доказательство содержится в следующих ниже трех леммах. $\rhd$

Замечание. Заменим в этой теореме p_ω на выпуклую функцию $f_\omega : \mathcal{X}_\omega \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ и обозначим $f(\omega, u(\omega)) := f_\omega(u(\omega))$. Положим

$$I_f(u) := \int_\Omega f(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega) \quad (u \in E(\mathcal{X})),$$

если функция $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ суммируема, и $I_f(u) := +\infty$, в противном случае. Допустим, что для некоторых $u_0 \in E(\mathcal{X})$ и $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ выполнены условия:

(1) шар $B(u_0(\omega), \epsilon)$ содержится в эффективном множестве $\operatorname{dom} f_\omega$ при всех $\omega \in \Omega$;

(2) функция $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ суммируема для каждого сечения и такого, что $u(\omega) \in B(u_0(\omega), \epsilon)$ $(\omega \in \Omega)$;

(3) для любого сечения $h \in E(\mathcal{X})$ существует измеримая функция $\lambda : \Omega \to (0, +\infty)$ такая, что $u_0(\omega) + \lambda(\omega)h(\omega) \in B(u_0(\omega), \epsilon)$.

Тогда из сформулированной выше теоремы можно вывести справедливость представления

$$\partial I_f(u_0) = \int_\Omega \partial f_\omega(u_0(\omega))\, d\mu(\omega).$$

5. Доказательство основного результата

Обозначим символом $E(\mathcal{X})^*$ множество всех линейных операторов $S : E(\mathcal{X}) \to L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, для которых существует элемент $0 \leqslant e' \in E'$ такой, что

$$|Su| \leqslant e'|u| \quad (u \in E(\mathcal{X})).$$

Лемма 1. *Если $\mathcal{X}$ — измеримое банахово расслоение с лифтингом, то пространство измеримых сечений $E'(\mathcal{X}')$ и пространство операторов $E(\mathcal{X})^*$ линейно изометричны. Линейная изометрия осуществляется сопоставлением измеримому сечению $v \in E'(\mathcal{X}')$ оператора $S_v : E(\mathcal{X}) \to L^1(\Omega, \Sigma, , \mu)$, определяемого формулой $S_v : u \mapsto \langle u, v\rangle$.*

$\lhd$ Так как $|\langle u,v\rangle| \leqslant |u| \cdot |v|$ и $|v| \in E'$, то $S_v \in E(\mathcal{X})^*$. Наоборот, пусть $S \in E(\mathcal{X})^*$. Учитывая, что оператор S сохраняет полосы и пользуясь техникой разложения пространства $E(\mathcal{X})$ на полосы, можно свести все к случаю $|S| = \mathbb{1}$, когда оператор действует в $L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$. Если теперь $\rho := \rho_{\mathcal{X}}$ — лифтинг пространства $L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$, то сечение $v \in L^0(\Omega,\mathcal{X}')$, определяемая условиями

$$\langle x, v(\omega)\rangle_\omega := (\rho \circ S)(\omega),\ x = u(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

будет искомым. $\rhd$

С семейством $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ свяжем оператор $P : E(\mathcal{X}) \to L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ по формуле

$$Pu := \pi(p(\cdot,u(\cdot))) \quad (u \in E(\mathcal{X})),$$

где $\pi(f)$ — класс эквивалентности суммируемой функции f. Очевидно, что P сублинейный оператор.

Лемма 2. *Для произвольного измеримого банахова расслоения имеет место представление*

$$\partial p = \int\limits_\Omega \partial P\, d\mu(\omega).$$

$\lhd$ Известно, что оператор Магарам можно выносить слева из под знака субдифференциала, см. [4; теорема 4.5.2]. Так как интеграл $I_\mu : L^1(\Omega,\Sigma,\mu) \to \mathbb{R}$, очевидно, является функционалом Магарам, то имеет место формула

$$\partial(I_\mu \circ P) = I_\mu \circ \partial P,$$

что равносильно требуемому. $\rhd$

Лемма 3. *Если расслоение $\mathcal{X}$ сепарабельно, то для любого оператора $S \in \partial P$ существует единственное с точностью до эквивалентности сечение u' сопряженного расслоения $\mathcal{X}'$ такое, что $u'(\omega) \in \partial(p_\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, $|x'| \in E'$ и имеет место представление*

$$Su = \pi(\langle u_0, u'\rangle) \quad (u \in E(\mathcal{X}),\ u_0 \in u).$$

$\lhd$ Если $S \in \partial P$ и $\|p_\omega\| \leqslant e'(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ для некоторого $e' \in E'$, то $|Su| \leqslant e'|u|$ $(u \in E(\mathcal{X}))$, следовательно, $S \in E(\mathcal{X})^*$. По лемме 1 имеет место представление $Su = \langle u, v\rangle$ $(u \in E(\mathcal{X}))$ для некоторого $v \in E'(\mathcal{X}')$. Далее, привлекая свойство прямой суммы и разлагая $E(\mathcal{X})$ на дизъюнктные полосы, можно считать без ограничения общности, что функция, тождественно равная единице на Ω, содержится в E. Пусть последовательность измеримых сечений $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ послойно плотна в $\mathcal{X}$. Заменив, если нужно, u_n на $u_n/(1 + |u_n|)$, можно считать, что $(u_n) \subset E$.

Возьмем произвольный представитель $v_0 \in v$ из класса эквивалентности v. Обозначим символом $\Omega(u)$ множество тех $\omega \in \Omega$, для которых нарушается неравенство $\langle u(\omega), v_0(\omega)\rangle \leqslant p(\omega,u(\omega))$. Тогда $\Omega_0 := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega(u_n)$ — множество нулевой меры. Для любого $\omega \notin \Omega_0$ выполняется неравенство $\langle u_n(\omega), v_0(\omega)\rangle \leqslant p(\omega,u_n(\omega))$ $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для каждого $\omega \notin \Omega_0$ будет $\langle x, v_0(\omega)\rangle \leqslant p(\omega,x)$ при $x \in \mathcal{X}_0(\omega) := \{u_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$. Множество $\mathcal{X}_0(\omega)$ по условию плотно в $\mathcal{X}_\omega$, значит в силу непрерывности функционалов p_ω и $v_0(\omega)$ это неравенство выполняется на всем $\mathcal{X}_\omega$. Но это означает, что $v_0(\omega) \in \partial p_\omega$. Определим теперь сечение u' полагая $u'(\omega) := v_0(\omega)$ при $\omega \notin \Omega_0$ и считая $u'(\omega)$ произвольным функционалом из ∂p_ω при $\omega \in \Omega_0$. Тогда u' — измеримое сечение сопряженного расслоения

$\mathcal{X}'$, $u'(\omega) \in \partial p_\omega$ для всех $\omega \in \Omega$ и $u'(\omega) = v_0(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Остается заметить, что в силу последнего утверждения $\langle u(\omega), u'(\omega)\rangle = \langle u(\omega), v_0'(\omega)\rangle$ для почти всех $\omega \in \Omega$, поэтому $Su = \pi(\langle u_0, v_0\rangle) = \pi(\langle u_0, u'\rangle)$, где $u_0 \in u$. $\triangleright$

Литература

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // В кн.: Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
2. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с. (Английский перевод: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.—398 p.)
5. *Castaing Ch., Valadier M.* Convex Analysis and Measurable Multifunctions.—Berlin etc.: Springer, 1977.—278 p. (Lecture Notes in Math. 580).
6. *Strassen V.* The existence of probability measures with given martingals // Ann. Math. Stat.—1965.—V. 36.—P. 423–439.

Статья поступила 20 октября 2006 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич, д. ф.-м. н.
Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
E-mail: `kusraev@alanianet.ru`