Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2006, Том 8, Выпуск 2

УДК **517.98**

О РЕГУЛЯРНЫХ КОНУСАХ ДЕМАРРА — КРАСНОСЕЛЬСКОГО

К. В. Коробова, В. Т. Худалов

Рассмотрен класс конусов Демарра — Красносельского специального вида. Получено описание всех регулярных конусов Демарра — Красносельского в пространствах l_∞^n, $n > 1$, и в гильбертовом пространстве. Описано множество элементов наилучшего приближения. Для произвольного элемента указано его разложение в виде ортогональных по Роберу элементов конуса.

1. В монографии Б. З. Вулиха [1] рассматривается следующий способ построения конуса в векторном пространстве. Пусть X — векторное пространство над полем действительных чисел, $F \subset X$ — выпуклое множество, не содержащее нуля ($0 \notin F$). Составим множество

$$K(F) = \bigcup_{\alpha \geqslant 0} \alpha F = \{x \in X : (\exists z \in F)(\exists \alpha \geqslant 0)\ x = \alpha z\}.$$

Нетрудно показать, что $K(F)$ — конус.

2. Пусть X — банахово пространство над $\mathbb{R}$. Одним из наиболее общих методов построения конуса в произвольном банаховом пространстве, обладающего свойствами нормальности, несплющенности [1], а также телесности, оштукатуриваемости [2], является следующий: если $f \in X^*$ — произвольный непрерывный линейный функционал на X такой, что $\|f\| = 1$ и $\alpha \in (0, 1]$, то положим

$$K[f, \alpha] := \{x \in X : \ f(x) \geqslant \alpha \|x\|\}.$$

В монографии [5] показано, что $K[f, \alpha]$ — замкнутый, нормальный и несплющенный конус при $\alpha \in (0, 1)$. Конус $K[f, \alpha]$ назовем *круглым конусом*, определяемым f и α.

3. Приведем известные результаты о круглых конусах. Напомним, что замкнутый конус E_+ в банаховом пространстве E называется *регулярным*, если:

(1) $\pm x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$ для любых $x, y \in E$;

(2) для любого $x \in E$ существует $y \in E_+$ такой, что $\pm x \leqslant y$ и $\|y\| = \|x\|$.

В монографии [5] получено описание всех круглых регулярных конусов в гильбертовом пространстве. Оказывается, что для любого функционала $a \in H^*$, $\|a\| = 1$, конус $K[a, \alpha]$ регулярен в H тогда и только тогда, когда $\alpha = 1/\sqrt{2}$ (при $\dim H > 1$).

Кроме того, в [5] доказано, что сопряженным к круглому конусу в гильбертовом пространстве является круглый конус, т. е.

$$K^*[a, \alpha] = K\big[a, \sqrt{1 - \alpha^2}\big].$$

Заметим, что круглый конус в гильбертовом пространстве является самосопряженным, т. е. $K^*[a, \alpha] = K[a, \alpha]$, тогда и только тогда, когда $\alpha = 1/\sqrt{2}$, а значит, конус $K[a, \alpha]$ является регулярным.

Описание всех регулярных круглых конусов в пространстве l_1^n, $n > 1$, получено в [6], где доказано, что нерешеточный круглый конус является регулярным только при $\alpha = 1/2$, при этом одна координата вектора $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ равна ± 1, а все остальные — нули. Таким образом, при $f_j = 1$, $f_k = 0$, $k \neq j$ получаем

$$K[f, 1/2] = K_j = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_j \geqslant \sum_{k=1, k\neq j}^{n} |x_k| \right\}.$$

4. Пусть X — банахово пространство, $a \in X$, $\|a\| = 1$ и $r \in (0,1)$. Обозначим через $B[a,r]$ замкнутый шар с центром в a радиуса r:

$$B[a,r] = \{x \in X : \ \|a - x\| \leqslant r\}.$$

Пусть $\mathrm{Con}[a,r] = K(B[a,r]) = \bigcup_{\mu \geqslant 0} \mu B[a,r]$ — конус Демарра — Красносельского специального вида. Опишем конус, сопряженный к $\mathrm{Con}[a,r]$.

Теорема 1. *Имеет место следующее равенство:*

$$\mathrm{Con}^*[a,r] = K[a,r] = \{f \in X^* : \ f(a) \geqslant r\|f\|\}.$$

$\lhd$ Рассмотрим произвольный элемент $f \in \mathrm{Con}^*[a,r]$. Тогда $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathrm{Con}[a,r]$. Пусть $z \in X$, $\|z\| \leqslant r$. Положим $x = a \pm z$. Тогда $x \in \mathrm{Con}[a,r]$, так как $x \in B[a,r]$. Отсюда получаем $f(x) = f(a) \pm f(z) \geqslant 0$ для любого z такого, что $\|z\| \leqslant r$. Значит, $f(a) \geqslant |f(z)|$ для всех таких z, что $\|z\| \leqslant r$. Следовательно,

$$f(a) \geqslant \sup\{|f(z)| : \ \|z\| \leqslant r\} = \sup\left\{ r \left| f\left(\frac{z}{r}\right) \right| : \ \left\|\frac{z}{r}\right\| \leqslant 1 \right\} = r\|f\|,$$

т. е. $f \in K[a,r]$. Следовательно, $\mathrm{Con}^*[a,r] \subset K[a,r]$.

Обратно, пусть $f \in K[a,r]$, т. е. $f(a) \geqslant r\|f\|$. Возьмем произвольный элемент $x \in \mathrm{Con}[a,r]$. Если $x = 0$, то $f(0) = 0$. Если $x \neq 0$, то существует $\mu > 0$ такое, что $\frac{x}{\mu} \in B[a,r]$, значит, $\|a - x/\mu\| \leqslant r$. Имеем:

$$f(x) = \mu f(x/\mu) = \mu(f(a) + f(x/\mu - a));$$

$$|f(x/\mu - a)| \leqslant \|f\| \, \|x/\mu - a\| \, .$$

Отсюда следует, что

$$-\|f\| \left\| \frac{x}{\mu} - a \right\| \leqslant f\left(\frac{x}{\mu} - a\right) \leqslant \|f\| \left\| \frac{x}{\mu} - a \right\|$$

или

$$f(x) \geqslant \mu \left(r\|f\| - \|f\| \left\| \frac{x}{\mu} - a \right\| \right) = \mu\|f\| \left(r - \left\| \frac{x}{\mu} - a \right\| \right),$$

следовательно, $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathrm{Con}[a,r]$, т. е. $f \in \mathrm{Con}^*[a,r]$. Тем самым, $K[a,r] \subset \mathrm{Con}^*[a,r]$, и теорема доказана. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть H — гильбертово пространство, $a \in H$, $\|a\| = 1$ и $r \in (0,1]$, тогда*

1) $K[a,r] = \mathrm{Con}[a, \sqrt{1 - r^2}]$;

2) $\mathrm{Con}^*[a,r] = \mathrm{Con}[a, \sqrt{1 - r^2}]$.

$\lhd$ Действительно, имеем

$$K[a,r] = K^*[a,\sqrt{1-r^2}] = (\mathrm{Con}^*[a,\sqrt{1-r^2}])^* = \mathrm{Con}[a,\sqrt{1-r^2}]$$

и $\mathrm{Con}^*[a,r] = K[a,r] = \mathrm{Con}[a,\sqrt{1-r^2}]$. $\rhd$

Теорема 3. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, тогда $K^*[a,r] = \mathrm{Con}[a,r]$.*

Используя описание всех регулярных круглых конусов в гильбертовом пространстве и в пространствах l_1^n, $n > 1$, и теоремы 2 и 3, получаем описание всех регулярных конусов Демарра — Красносельского специального вида в гильбертовом пространстве и пространствах l_∞^n, $n > 1$.

Теорема 4. *Пусть H — гильбертово пространство, $\dim H > 1$, $a \in H$, $\|a\| = 1$ и $r \in (0,1]$. Конус $\mathrm{Con}[a,r]$ является регулярным тогда и только тогда, когда $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. когда конус $\mathrm{Con}[a,r]$ самосопряжен.*

Теорема 5. *Пусть $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in l_\infty^n$ и $\|f\| = 1$. Конус $\mathrm{Con}[a,r]$ является регулярным в l_∞^n, $n > 1$, только при двух значениях $r \in (0,1]$:*

1) $r = 1$; *в этом случае каждая координата вектора $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ равна 1 или -1; при этом получаем 2^n конусов, которые порождают порядково изоморфные и изометричные между собой упорядоченные банаховы пространства (порядково изоморфные и изометричные банаховой решетке l_∞^n с естественным конусом положительных элементов);*

2) $r = 1/2$; *в этом случае одна координата вектора $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ равна ± 1, а все остальные — нули; получаем $2n$ конусов, порождающих порядково изоморфные и изометричные между собой упорядоченные банаховы пространства (порядково изоморфные и изометричные пространству l_∞^n с конусом*

$$K_j = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_j \geqslant \sup\{|x_k| : \ k \neq j, k = 1, \ldots, n\}\}).$$

$\lhd$ Действительно, $\mathrm{Con}[f,r] = K^*[f,r]$ является регулярным тогда и только тогда, когда $K^*[f,r]$ регулярен, что равносильно регулярности конуса $K[f,r]$ в l_1^n. Остается использовать описание регулярных круглых конусов в пространстве l_1^n и показать, что $K^*[f,1/2] = K[f,1]$ в l_∞^n. Действительно, пусть функционал f имеет вид $f = (1,0,\ldots,0)$ и $y = (y_1,\ldots,y_n) \in K[f,1] \subset l_\infty^n$, тогда $y_1 \geqslant \|y\| = \sup\{|y_k|\}$. Для любого $x = (x_1,\ldots,x_n) \in K[f,1/2] \subset l_1^n$ покажем, что $y(x) \geqslant 0$. Рассмотрим

$$y(x) = x_1 y_1 + \sum_{k \geqslant 2} x_k y_k.$$

Так как $x \in K[f,1/2]$, то $x_1 \geqslant \sum_{k\geqslant 2} |x_k|$ и

$$\pm \sum_{k\geqslant 2} x_k y_k \leqslant \left| \sum_{k\geqslant 2} x_k y_k \right| \leqslant \sum_{k\geqslant 2} |x_k y_k| \leqslant y_1 \sum_{k\geqslant 2} |x_k| \leqslant x_1 y_1.$$

Таким образом, $x_1 y_1 + \sum_{k\geqslant 2} x_k y_k = y(x) \geqslant 0$.

Обратно, пусть $y \in K^*[f, 1/2]$, т. е. $y(x) \geqslant 0$ для любого $x \in K[f, 1/2]$. Покажем, что $y_1 \geqslant \sup\{|y_k| : k \geqslant 2\}$. Пусть $\sup\{|y_k|\} = A$, тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется n такой, что $|y_n| > A - \epsilon$. В качестве x возьмем элемент такой, что $x_1 = 1$, $x_n = -\operatorname{sign} y_n$, $x_k = 0$ $(k \neq n)$. Очевидно, что $x \in K[f, 1/2]$. Тогда имеем

$$y(x) = y_1 - \operatorname{sign}(y_n) y_n \geqslant 0, \quad |y_n| > A - \epsilon.$$

Таким образом, $y_1 > A - \epsilon$. При $\epsilon \to 0$ получим $y_1 \geqslant A$. $\rhd$

5. Напомним, что если пространство E упорядочено строго регулярным конусом E_+, т. е. $(E, E_+) \in (\mathfrak{R})$, то для любого элемента $x \in E$ можно определить множество $|X|$ элементов $y \in E$ таких, что $\pm x \leqslant y$ и $\|x\| = \|y\|$. Множество $|X|$ называют *множеством метрических модулей* элемента x.

Положим

$$X_+ = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|X|, \qquad X_- = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|X|.$$

Множества X_+ и X_- называются множествами *положительных* (соответственно *отрицательных*) *частей элемента* x.

Строго регулярный конус E_+ называется *простым*, если для любого $x \in E$ множество $|X|$ состоит из одного элемента. Примером пространства с простым конусом является (H, H_+), где H — гильбертово пространство [5]. Метрические характеристики элемента пространства l_1^n получены и изучены в статьях [3–4].

Множество метрических модулей элемента пространства l_∞^n описывает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть пространство l_∞^n упорядочено круглым регулярным конусом K_j, тогда для произвольного элемента $x = (x_1, \ldots, x_n) \notin \pm K_j$ метрический модуль представляет собой следующее множество:*

$$|X| = \big\{y \in l_\infty^n : \, y_j = \|x\|, -\|x\| + |x_j + x_k| \leqslant y_k \leqslant \|x\| - |x_j - x_k|\big\}.$$

$\lhd$ Проведем доказательство для случая, когда пространство l_∞^n упорядочено конусом K_1. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in l_\infty^n$. Найдем $y \in K_1$ такой, что $\pm x \leqslant y$, $\|x\| = \|y\|$. Система, описывающая элемент y, имеет вид

$$\begin{cases} y_1 \geqslant \|y\|, \\ \|x\| = \|y\|, \\ y \pm x \in K_1; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} y_1 = \|x\|, \\ y_1 - x_1 \geqslant \|y - x\|, \\ y_1 + x_1 \geqslant \|y + x\|. \end{cases}$$

Отсюда выводим

$$\begin{cases} y_1 = \|x\|, \\ -\|x\| + x_1 + x_k \leqslant y_k \leqslant \|x\| - x_1 + x_k, \\ -\|x\| - x_1 - x_k \leqslant y_k \leqslant \|x\| + x_1 - x_k. \end{cases}$$

Тогда для любого $k \neq 1$ имеем

$$\max\{-\|x\| + x_1 + x_k, -\|x\| - (x_1 + x_k)\} \leqslant y_k \leqslant \min\{\|x\| - (x_1 - x_k), \|x\| + (x_1 - x_k)\},$$

что равносильно

$$-\|x\| + \max\{x_1 + x_k, -(x_1 + x_k)\} \leqslant y_k \leqslant \|x\| + \min\{-(x_1 - x_k), x_1 - x_k\}$$

или

$$-\|x\| + |x_1 + x_k| \leqslant y_k \leqslant \|x\| - |x_1 - x_k|.$$

Таким образом, множество метрических модулей для произвольного элемента x пространства (l^n_∞, K_1) имеет вид

$$|X| = \big\{ y \in l^n_\infty : \, y_1 = \|x\|, -\|x\| + |x_1 + x_k| \leqslant y_k \leqslant \|x\| - |x_1 - x_k| \big\}.$$

В общем же случае, т. е. для (l^n_∞, K_j), справедлива формула

$$|X| = \big\{ y \in l^n_\infty : \, y_j = \|x\|, -\|x\| + |x_j + x_k| \leqslant y_k \leqslant \|x\| - |x_j - x_k| \big\}. \ \rhd$$

Следствие. *Для произвольного элемента* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *пространства* (l^n_∞, K_j) *справедливо представление* $x = x_+ - x_-$, $x_+ \in X_+$, $x_- \in X_-$, *где:*

$$|X_+| = \left\{ y \in l^n_\infty : \, y_j = \frac{\|x\| + x_j}{2}, \frac{1}{2}\big(-\|x\| + |x_j + x_k| + x_k \big) \leqslant y_k \leqslant \frac{1}{2}\big(\|x\| - |x_j - x_k| + x_k \big) \right\};$$

$$|X_-| = \left\{ y \in l^n_\infty : \, y_j = \frac{\|x\| - x_j}{2}, \frac{1}{2}\big(-\|x\| + |x_j + x_k| - x_k \big) \leqslant y_k \leqslant \frac{1}{2}\big(\|x\| - |x_j - x_k| - x_k \big) \right\}.$$

6. Конус E_+ в упорядоченном банаховом пространстве (E, E_+) называется *достижимым*, если для любого $x \in E$ существует элемент $Px \in E_+$, на котором реализуется минимум в формуле расстояния от x до E_+, т. е. $d(x, E_+) = \inf\{\|a - x\| : a \in E_+\} = \|Px - x\|$. Множество всех таких Px обозначается символом $M(x)$ и называется *множеством элементов наилучшего приближения*.

Известно [5], что если пространство упорядочено регулярным конусом и норма аддитивна на конусе, тогда E_+ — *вполне достижимый* конус, т. е. конус, для которого множества $M(x)$ и X_+ совпадают.

Нетрудно убедиться, что норма аддитивна на конусе $K[f, 1]$, поэтому справедливо

Утверждение 1. *Конус* $K[f, 1]$ *вполне достижимый, т. е. для произвольного элемента пространства* l^n_∞ *справедливо равенство*

$$M(x) = X_+.$$

7. В произвольных банаховых пространствах вводят различные аналоги понятия ортогональности. Рассмотрим, так называемую, ортогональность по Роберу: элементы x, $y \in E_+$ называются *ортогональными по Роберу* (обозначается $x \underset{R}{\perp} y$), если $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ для любого $\lambda \geqslant 0$.

Пусть $(E, E_+) \in (\mathfrak{R})$. Конус E_+ называется *вполне регулярным*, если для любого $x \in E$ и любых x_+, x_- таких, что $x = x_+ - x_-$ и $\|x_+ - x_-\| = \|x_+ + x_-\|$ выполняется равенство $\|x_+ - \lambda x_-\| = \|x_+ + \lambda x_-\|$, т. е. они ортогональны по Роберу.

Известно [5], что любой вполне достижимый конус вполне регулярен. Тогда справедливо

Утверждение 2. *Конус* $K[f, 1]$ *в пространстве* l^n_∞ *вполне регулярен.*

Литература

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин.: Изд-во КГУ, 1977.—84 с.
2. *Вулих Б. З.* Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах.—Калинин.: Изд-во КГУ, 1978.—84 с.
3. *Коробова К. В.* О геометрии регулярных конусов в пространствах l_1^n и l_1 // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 3.—С. 47–51.
4. *Коробова К. В.* Геометрические свойства регулярного круглого конуса в пространстве l_1^n // Тр. молодых ученых.—2005.—Вып.1—С. 11–24.
5. *Худалов В. Т.* Упорядоченные банаховы пространства и их приложения.—Владикавказ: Иристон, 1999.—200 с.
6. *Вишняков Ю. Г., Худалов В. Т.* Описание всех регулярных круглых конусов в l_1^n // Вестник СОГУ. Естественные науки.—1999.—№ 1.—С. 5–6.

Статья поступила 17 апреля 2006 г.

Коробова Карина Валерьевна
Владикавказ, Владикавказский институт управления
E-mail: g_k_v@mail.ru

Худалов Владимир Темирсолтанович, к. ф.-м. н.
Москва, Московский автомобильно-дорожный институт (ГТУ)