Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2004, Том 6, Выпуск 3

УДК **517.98**

ТЕОРЕМА БАНАХА ОБ ОБРАТНОМ ОПЕРАТОРЕ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА — КАНТОРОВИЧА

К семидесятипятилетию
Юрия Григорьевича Решетняка

И. Г. Ганиев, К. К. Кудайбергенов

В статье доказывается аналог теоремы Банаха об обратном операторе для операторов, действующих в пространствах Банаха — Канторовича.

Введение

Известно [1], что всякое пространство Банаха — Канторовича (ПБК) над кольцом измеримых функций можно представить в виде измеримого расслоения банаховых пространств. В работах [2, 3] было доказано, что всякий линейный циклически компактный оператор (ограниченный оператор) в ПБК можно представить как измеримое расслоение линейных компактных операторов (ограниченных операторов). Верно и обратное: измеримое расслоение линейных ограниченных операторов порождает ограниченный линейный оператор в пространстве Банаха — Канторовича, при этом требовалось, чтобы послойные нормы операторов образовывали измеримое отображение.

В данной работе мы получим этот результат без условия измеримости этого отображения, а также докажем аналог теоремы Банаха об обратном операторе для операторов, действующих в пространствах Банаха — Канторовича.

1. Предварительные сведения

Пусть (Ω, Σ, m) — пространство с полной конечной мерой, $L_0 = L_0(\Omega)$ алгебра всех измеримых функций на (Ω, Σ, m) (равные почти всюду функции отождествляются).

Рассмотрим векторное пространство E над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Отображение $\|\cdot\| : E \to L_0(\Omega)$ называется $L_0(\Omega)$-*значной нормой на* E, если для любых $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ имеют место соотношения:

1) $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется *решеточно нормированным* пространством (РНП) над $L_0(\Omega)$.

Говорят, что РНП E d-разложимо, если для любого $x \in E$ и для любого разложения $\|x\| = f + g$ в сумму дизъюнктных элементов найдутся такие $y, z \in E$, что $x = y + z$ и $\|y\| = f$, $\|z\| = g$.

Сеть $\{x_\alpha\}$ элементов из E называется *(bo)-сходящейся к $x \in E$*, если сеть $\{\|x_\alpha - x\|\}$ (o)-сходится к нулю в $L_0(\Omega)$.

Пространством Банаха — Канторовича (ПБК) над $L_0(\Omega)$ называется (bo)-полное d-разложимое РНП над $L_0(\Omega)$ [4, 5].

Пусть X — отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое банахово пространство $(X(\omega), \|\cdot\|_{X(\omega)})$. *Сечением* X называется функция u, определенная почти всюду в Ω и принимающая значение $u(\omega) \in X(\omega)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}(u)$, где $\mathrm{dom}(u)$ есть область определения u.

Пусть L — некоторое множество сечений.

Определение 1 ([1], см. также [5]). Пара (X, L) называется *измеримым банаховым расслоением* (ИБР) над Ω, если

а) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1, c_2 \in L$, где $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \mathrm{dom}(c_1) \cap \mathrm{dom}(c_2) \to \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$;

б) функция $\|c\| : \omega \in \mathrm{dom}(c) \to \|c(\omega)\|_{X(\omega)}$ измерима при всех $c \in L$;

в) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{c(\omega) : c \in L, \omega \in \mathrm{dom}(c)\}$ плотно в $X(\omega)$.

Вместо (X, L) будем писать просто X.

Сечение s называется *ступенчатым*, если $s(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega) c_i(\omega)$, где $c_i \in L, A_i \in \Sigma$, $i = 1, \dots, n$. Сечение u называется *измеримым*, если найдется такая последовательность s_n ступенчатых сечений, что $\|s_n(\omega) - u(\omega)\|_{X(\omega)} \to 0$ п. в.

Пусть $M(\Omega, X)$ — множество всех измеримых сечений. Символом $L_0(\Omega, X)$ обозначим факторизацию $M(\Omega, X)$ по отношению равенства почти всюду. Через $\overline{u}$ обозначим класс из $L_0(\Omega, X)$, содержащий сечение u. Отметим, что функция $\omega \to \|u(\omega)\|_{X(\omega)}$ измерима для любого $u \in M(\Omega, X)$. Класс эквивалентности, содержащий функцию $\|u(\omega)\|_{X(\omega)}$ обозначим через $\|\overline{u}\|$.

В работе [1; стр. 144] доказано, что $(L_0(\Omega, X), \|\cdot\|)$ является ПБК над $L_0(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{L}^\infty(\otimes)$ алгебра ограниченных измеримых функций на (Ω, Σ, m), $L^\infty(\Omega)$-факторизация $\mathcal{L}^\infty(\otimes)$ по отношению равенства п. в. Положим $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$=$\{u \in M(\Omega, X) : \|u(\omega)\|_{X(\omega)} \in \mathcal{L}^\infty(\otimes)\}$

Элементы из $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называются *ограниченными измеримыми сечениями.* Множество классов эквивалентности существенно ограниченных сечений обозначается символом $L^\infty(\Omega, X)$. Рассмотрим произвольный лифтинг $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\otimes)$ [6].

Определение 2 (см. [1]). Отображение $\rho_X : L^\infty(\Omega, X) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называется *векторнозначным лифтингом, ассоциированным с лифтингом p*, если:

а) для всех $\overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)$ выполнено $\rho_X(\overline{u}) \in \overline{u}, \mathrm{dom}(\rho_X(\overline{u})) = \Omega$;

б) $\|\rho_X(\overline{u})\|_{X(\omega)} = p(\|\overline{u}\|)(\omega)$ для всех $\overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)$;

в) если $\overline{u}, \overline{v} \in L^\infty(\Omega, X)$, то $\rho_X(\overline{u} + \overline{v}) = \rho_X(\overline{u}) + \rho_X(\overline{v})$;

г) если $\overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)$ и $e \in L^\infty(\Omega)$, то $\rho_X(e\overline{u}) = p(e)\rho_X(\overline{u})$;

д) множество $\{\rho_X(\overline{u})(\omega) : \overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Из [1; теоремы 4.4.1 и 4.4.8] следует, что для всякого ПБК E над $L_0(\Omega)$ существует ИБР (X, L) такое, что E изометрически изоморфно $L_0(\Omega, X)$ и на $L^\infty(\Omega, X)$ существует лифтинг, для которого $\{\rho_X(\overline{u})(\omega) : \overline{u} \in L^\infty(\Omega, X)\} = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Пусть ∇ булева алгебра всех идемпотентов в $L_0(\Omega)$. Если $\{u_\alpha\} \subset L_0(\Omega, X)$ и $\{\pi_\alpha\}$ разбиение единицы в ∇, то ряд $\sum\limits_\alpha \pi_\alpha u_\alpha$ (bo)-сходится в $L_0(\Omega, X)$ и сумма этого ряда называется *перемешиванием* $\{u_\alpha\}$ *относительно* $\{\pi_\alpha\}$. Это сумма обозначается через $\operatorname{mix}(\pi_\alpha u_\alpha)$. Для $K \subset L_0(\Omega, X)$ через $\operatorname{mix} K$ обозначается множество всех перемешиваний произвольных семейств элементов из K. Множество K называется *циклическим*, если $\operatorname{mix} K = K$. Для направленного множества A через $\nabla(A)$ обозначается множество всех разбиений единицы в ∇, заиндексованных элементами A. Пусть $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ сеть в $L_0(\Omega, X)$. Для каждого $\nu \in \nabla(A)$ положим $u_\nu = \operatorname{mix}(\nu(\alpha)u_\alpha)$ и получим новую сеть $\{u_\nu : \nu \in \nabla(A)\}$.

Произвольная подсеть сети $\{u_\nu : \nu \in \nabla(A)\}$ называется *циклической подсетью сети* $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$.

Определение 3 (см. [5]). Подмножество $K \subset L_0(\Omega, X)$ называется *циклически компактным*, если оно циклично и всякая сеть в K имеет циклическую подсеть сходящуюся к некоторой точке из K.

Множество называется *относительно циклически компактным*, если оно содержится в некотором циклически компактном множестве.

Пусть $L_0(\Omega, X)$ и $L_0(\Omega, Y)$ ПБК над $L_0(\Omega)$. Оператор $T : L_0(\Omega, X) \to L_0(\Omega, Y)$ называется $L_0(\Omega)$-*линейным*, если $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ для всех $\alpha, \beta \in L_0(\Omega), x, y \in L_0(\Omega, X)$.

$L_0(\Omega)$-линейный оператор T называется $L_0(\Omega)$-*ограниченным* (*циклически компактным*), если для всякого ограниченного множества B в $L_0(\Omega, X)$ множество $T(B)$ ограничено в $L_0(\Omega, Y)$ (относительно циклически компактно в $L_0(\Omega, Y)$).

Для $L_0(\Omega)$-ограниченного оператора T положим $|T| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$. Известно [2, 3], что для всякого ограниченного (циклически компактного) $L_0(\Omega)$-линейного оператора $T : L_0(\Omega, X) \to L_0(\Omega, Y)$ существует семейство ограниченных (компактных) операторов $\{T(\omega) : X(\omega) \to Y(\omega)\}$ такое, что для всякого $x \in L_0(\Omega, X)$ верно $(T(x))(\omega) = T(\omega)(x(\omega))$ для п. в. $\omega \in \Omega$.

Если $|T| \in L^\infty(\Omega)$, то $\rho_Y(T(x))(\omega) = T(\omega)(\rho_X(x)(\omega))$ для всех $x \in L^\infty(\Omega, X)$, где ρ_X и ρ_Y векторнозначные лифтинги на $L^\infty(\Omega, X)$ и $L^\infty(\Omega, Y)$ соответственно, ассоциированные с лифтингом $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\otimes)$.

Обратно, если $\{T(\omega) : X(\omega) \to Y(\omega)\}$ такое семейство ограниченных (компактных) операторов, что $T(\omega)(x(\omega)) \in M(\Omega, Y)$ для любого $x \in M(\Omega, X)$ и $\|T(\omega)\| \in L_0(\Omega)$, то линейный оператор $T : L_0(\Omega, X) \to L_0(\Omega, Y)$, определенный равенством $T\overline{u} = \overline{T(\omega)(u(\omega))}$ является $L_0(\Omega)$-ограниченным (циклически компактным).

2. Основные результаты

Пусть $\{T(\omega) : X(\omega) \to Y(\omega)\}$ измеримое расслоение ограниченных операторов (ИРОО), т. е. $T(\omega)(x(\omega)) \in M(\Omega, Y)$ для любого $x \in M(\Omega, X)$. Равенство

$$T\overline{u} = \overline{T(\omega)(u(\omega))}, \tag{1}$$

очевидно, определяет $L_0(\Omega)$-линейный оператор $T : L_0(\Omega, X) \to L_0(\Omega, Y)$. В следующей теореме показывается, что требование $\|T(\omega)\| \in L_0(\Omega)$ является лишним при установлении ограниченности оператора T.

Теорема 1. *Оператор T, определенный равенством* (1), *является $L_0(\Omega)$-ограниченным.*

$\lhd$ Пусть $S = \{x \in L_0(\Omega, X) : \|x\| = 1\}$. Для каждого $n \in N$ положим $\nabla_n = \{\pi \in \nabla : (\exists x \in S), \pi\|T(x)\| \geqslant \pi n\}$.

Пусть $\pi_n = \sup \nabla_n$. Тогда существует такое дизъюнктное семейство $\{q_k^n : k \in N\}$ в ∇_n, что $\bigvee_{k=1}^{\infty} q_k^n = \pi_n$. Возьмем такое $x_k^n \in S$, что

$$q_k^n \|T(x_k^n)\| \geqslant q_k^n n. \tag{2}$$

Пусть $x_n = \sum q_k^n x_k^n$. Тогда $\|x_n\| = \pi_n$, и из (2) следует, что

$$\pi_n \|T(x_n)\| \geqslant \pi_n n. \tag{3}$$

Из определения идемпотента π_n следует, что для всякого x из S верно

$$\pi_n^{\perp} \|T(x_n)\| \leqslant \pi_n^{\perp} n. \tag{4}$$

Очевидно, что $\pi_1 \geqslant \pi_2 \geqslant \ldots \geqslant \pi_n \ldots$

Положим $\pi_0 = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \pi_n$, предположим, что $\pi_0 \neq 0$. Рассмотрим измеримое множество $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : p(\pi_0)(\omega) = 1\}$. Тогда $m(\Omega_0) > 0$. Из (3) следует, что $\pi_n \|T(x_n)(\omega)\|_{Y(\omega)} \geqslant \pi_n(\omega) n$ для п. в. $\omega \in \Omega_0$. Отсюда $\|T(\omega)(x_n)(\omega)\|_{Y(\omega)} \geqslant n$, и так как $\|x_n\| = \pi_n$, то $\|x_n(\omega)\|_{X(\omega)} = 1$ для п. в. $\omega \in \Omega_0$. Это означает, что $T(\omega)$ неограничено для п. в. $\omega \in \Omega_0$. Из полученного противоречия вытекает, что $\pi_0 = 0$. Поэтому $\bigvee_{n=1}^{\infty} \pi_n^{\perp} = (\bigwedge_{n=1}^{\infty} \pi_n)^{\perp} = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единица в булевой алгебре ∇.

Положим $q_1 = \pi_1^{\perp}$, $q_n = \pi_n^{\perp} \wedge q_{n-1}^{\perp}$, $n \geqslant 2$. Тогда $\bigvee_{n=1}^{\infty} q_n = \mathbf{1}$, $q_n q_m = 0$ при $n \neq m$. В силу (4) имеем, что $q_n \|T(x)\| \leqslant q_n n$ для всех $x \in S$. Положим $C = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n n$. Тогда $C \in L_0(\Omega)$ и для всех $x \in S$ верно

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n x\right)\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} q_n \|Tx\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} q_n n = C.$$

Это означает, что T — $L_0(\Omega)$-ограниченный оператор. $\triangleright$

Для каждого $L_0(\Omega)$-линейного оператора $T : L_0(\Omega, X) \to L_0(\Omega, Y)$ положим как обычно, $\ker(T) = \{x : Tx = 0\}$ и $R(T) = \{Tx : x \in L_0(\Omega, X)\}$.

Теорема 2. *Пусть $T : L_0(\Omega, X) \to L_0(\Omega, Y)$ $L_0(\Omega)$-ограниченный $L_0(\Omega)$-линейный оператор, $\ker(T) = 0$, $R(T) = L_0(\Omega, Y)$. Тогда T^{-1} является $L_0(\Omega)$-ограниченным $L_0(\Omega)$-линейным оператором.*

$\triangleleft$ На множествах $L_0(\Omega, X)$ и $L_0(\Omega, Y)$ рассмотрим метрики

$$d_X(x_1, x_2) = \int\limits_{\Omega} \frac{\|x_1 - x_2\|}{1 + \|x_1 - x_2\|}\, dm, \quad x_1, x_2 \in L_0(\Omega, X)$$

и

$$d_Y(y_1, y_2) = \int\limits_{\Omega} \frac{\|y_1 - y_2\|}{1 + \|y_1 - y_2\|}\, dm, \quad y_1, y_2 \in L_0(\Omega, Y).$$

Очевидно, что d_X, d_Y — инвариантные метрики. Покажем полноту пространства $(L_0(\Omega, X), d_X)$. Пусть $\{x_n\} \subset L_0(\Omega, X)$ и $d_X(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$. Тогда $\|x_n - x_m\| \to 0$ по мере при $n, m \to \infty$. Поэтому существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\|x_{n_k} - x_{n_p}\| \to 0$ п. в. при $k, p \to \infty$. Так как $L_0(\Omega, X)$ — (bo)-полно, то $\|x_{n_k} - x_0\| \to 0$ п. в. для некоторого x_0 из $L_0(\Omega, X)$. Тогда $d_X(x_{n_k}, x_0) \to 0$, и поэтому $d_X(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает полноту $(L_0(\Omega, X), d_X)$. Следовательно, линейное топологическое пространство $(L_0(\Omega, X), d_X)$ является F-пространством.

Без ограничения общности, можно считать, что $|T| = \mathbf{1}$. Пусть $x_n, x \in L_0(\Omega, X)$ и $d_X(x_n, x) \to 0$.

Имеем

$$d_Y(Tx_n, Tx) = \int\limits_{\Omega} \frac{\|Tx_n - Tx\|}{1 + \|Tx_n - Tx\|}\, dm \leqslant \int\limits_{\Omega} \frac{\|x_n - x\|}{1 + \|x_n - x\|}\, dm = d_X(x_n, x) \to 0.$$

Это означает, что T непрерывное линейное отображение из $(L_0(\Omega, X), d_X)$ на $(L_0(\Omega, Y), d_Y)$. Так как $\ker(T) = 0$ и $R(T) = L_0(\Omega, Y)$, то по теореме Банаха об обратном операторе для F-пространств T есть изоморфизм между $(L_0(\Omega, X), d_X)$ и $(L_0(\Omega, Y), d_Y)$.

Покажем, что T^{-1} — $L_0(\Omega)$-ограниченный оператор. Пусть $b = \inf\{\|Tx\| : x \in S\}$. Положим $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : p(b)(\omega) = 0\}$ и $\pi = \chi_{\Omega_0}$.

Предположим, что $\pi \neq 0$. Тогда $\pi b = 0$ и $\inf\{\pi\|Tx\| : x \in S\} = 0$. Так как $\{\|Tx\| : x \in S\}$ — циклическое множество, то существует такая последовательность $\{x_n\} \subset S$, что $\pi\|Tx_n\| \to 0$ п. в. Следовательно, $d_Y(\pi Tx_n, 0) \to 0$. Так как $T^{-1}(\pi Tx_n) = \pi x_n$, то $d_X(\pi x_n, 0) \to 0$.

С другой стороны,

$$d_X(\pi x_n, 0) = \int\limits_{\Omega} \frac{\pi\|x_n\|}{1 + \pi\|x_n\|}\, dm = \int\limits_{\Omega_0} \frac{1}{2}\, dm = \frac{1}{2}\, m(\Omega_0) > 0,$$

что противоречит сходимости $d_X(\pi x_n, 0) \to 0$. Поэтому $\pi = 0$, т. е. $b(\omega) > 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$.

Пусть $y \in L_0(\Omega, Y), \|y\| = 1$. Возьмем $x \in L_0(\Omega, X)$ такое, что $Tx = y$. Так как $\ker(T) = 0$, то $x(\omega) \neq 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$ и $\|x\|(\omega) > 0$ п. в. Из определения элемента b имеем, что $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \geqslant b$. Отсюда $\|T(x)\| \geqslant b\|x\|$ и $b\|T^{-1}(y)\| \leqslant \|y\|$, т. е. $\|T^{-1}(y)\| \leqslant b^{-1}$. Это означает, что T^{-1} — $L_0(\Omega)$-ограниченный оператор. $\triangleright$

Авторы благодарны профессору В. И. Чилину за полезное обсуждение результатов.

Литература

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН.—1995.—С. 63–211.
2. *Ganiev I. G., Kudaybergenov K. K.* Measurable bundles of compact operators // Methods of Func. An. and Topology.—2001.—V. 7, № 4.—P. 1–6.
3. *Ганиев И. Г.* Описание ограниченных операторов в пространствах Банаха — Канторовича // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы теоретической и прикладной матаематики».—Самарканд, 1997.—С. 3–4.
4. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
5. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
6. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.

Статья поступила 30 мая 2004 г.

Ганиев Иномжан Гуломжанович, д. ф.-м. н.
Узбекистан, г. Ташкент, Ташкентский институт инженеров
железнодорожного транспорта
E-mail: `inam@comuz.uz`

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович, к. ф.-м. н.
Узбекистан, г. Нукус, Нукусский государственной университет