Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2004, Том 6, Выпуск 2

УДК **517.927**

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТОЧЕК СПЕКТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ УСЛОВИЙ СОГЛАСОВАНИЯ

М. Г. Завгородний, Р. Ч. Кулаев

На связном геометрическом графе рассматривается краевая задача на собственные значения, порожденная линейным обыкновенным дифференциальным оператором второго порядка, условиями согласования, заданными в каждой внутренней вершине графа, и краевыми условиями типа Дирихле. Для такой задачи установлено, что ее собственные значения непрерывно зависят от параметров, входящих в условия согласования.

1. Геометрический граф

Понятие геометрического графа дадим согласно работе [1].

Пусть дано конечное множество попарно непересекающихся открытых отрезков пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через V множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, которые являются концевыми точками двух и более интервалов. Объединение всех точек интервалов и множества V обозначим через Γ и будем называть геометрическим графом. При этом интервалы будем называть ребрами геометрического графа Γ, а точки множества V — его внутренними вершинами. Далее, для краткости вместо термина «геометрический граф» будем использовать выражение «граф».

Таким образом, в нашем понимании граф — это множество, включающее в себя не только множество вершин V, но и все точки интервалов, образующие ребра, т. е. в геометрической интерпретации графа его вершины и ребра суть множества одной природы — они есть подмножества пространства $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что множество концевых точек ребер (интервалов) графа Γ не исчерпывается множеством внутренних вершин V, так как могут существовать точки пространства $\mathbb{R}^n$, которые являются концевыми лишь для одного ребра. Концевые точки ребер не принадлежащие множеству V будем называть граничными вершинами графа Γ. Совокупность всех граничных вершин обозначим через $\partial\Gamma$. По определению множество граничных вершин $\partial\Gamma$ не включено в граф Γ.

Пусть вершина a является концевой точкой ребра γ. Тогда будем говорить, что ребро γ примыкает к вершине a. Если обе вершины a и b, к которым примыкает ребро γ, внутренние, то ребро γ будем называть внутренним. В противном случае, когда хотя бы одна из вершин a и b граничная, ребро γ назовем граничным.

Занумеруем произвольным образом все ребра графа Γ. Для каждой вершины a графа Γ обозначим через $I(a)$ множество индексов всех ребер, примыкающих к a. В силу сделанных выше определений, множество $I(a)$ состоит из одного индекса, если вершина a — граничная, и не менее чем из двух индексов, если вершина a внутренняя.

Всюду далее будем полагать, что граф Γ является связным множеством в $\mathbb{R}^n$. И, кроме того, что у графа Γ отсутствуют циклические (замкнутые) маршруты (последовательности) ребер, т. е. что граф Γ является деревом. Первое предположение означает, что граф содержит хотя бы одну внутреннюю вершину, если число ребер не меньше двух, а второе — что у графа имеется хотя бы одна граничная вершина. Таким образом, во всех содержательных случаях множества V и $\partial\Gamma$ не пусты.

2. Дифференциальные уравнения на геометрическом графе

Рассмотрим множество $C(\Gamma)$ функций $u : \Gamma \to \mathbb{R}$, определенных на всем графе Γ и равномерно непрерывных на каждом его ребре. Для любой такой функции $u(\cdot)$ через $u_i(\cdot)$ будем обозначать сужение ее на ребро γ_i, т. е. $u_i(x) = u(x)$ при $x \in \gamma_i$. Далее, если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ, то под $u_i(a)$ понимается $\lim\limits_{x\to a} u_i(a)$. Заметим, что в силу предположения о равномерной непрерывности функции $u(\cdot)$ на каждом ребре такой предел всегда существует.

Пусть a — внутренняя вершина графа Γ. Для каждой функции $u(\cdot)$ в вершине a определено ее значение $u(a)$ и множество $u_i(a)$, $i \in I(a)$, односторонних пределов вдоль всех ребер γ_i, примыкающих к вершине a. Равенства всех этих величин мы не требуем. Если все же выполняются равенства $u_i(a) = u(a)$ для любого $i \in I(a)$, то функцию $u(\cdot)$ будем называть непрерывной во внутренней вершине a. Функция $u(\cdot)$ непрерывна на всем графе Γ, если она непрерывна во всех внутренних вершинах графа Γ.

Пусть b — граничная вершина графа Γ. Так как множество $\partial\Gamma$ граничных вершин не включено в Γ, то функция $u(\cdot)$ не определена в вершине b. Везде в дальнейшем под значением $u(b)$ будем понимать односторонний предел функции $u(x)$ при $x \to b$ вдоль единственного ребра, примыкающего к вершине b. Множество значений $u(b)$ для всех граничных вершин b будем обозначать через $u\big|_{\partial\Gamma}$.

Для того чтобы ввести понятие производной функции $u(\cdot)$, заданной на графе Γ, зададим на графе ориентацию каждого его ребра. Точнее говоря, поставим в соответствие каждому ребру γ_i один из двух коллинеарных ему единичных векторов, который обозначим через h_i. Тогда производную функции $u(\cdot)$ в смысле заданной ориентации ребер определим как функцию

$$u'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x + th_i) - u(x)}{t} \quad (x \in \gamma_i).$$

Заметим, что смена ориентации ребра γ_i на противоположную ведет лишь к смене знака производной на противоположный. Производная $u'(\cdot)$ функции $u(\cdot)$ определена нами в каждой точке объединения всех ребер. Во внутренних вершинах графа Γ определять производную $u'(\cdot)$ не будем. Предполагаем также, как и выше, что производная $u'(\cdot)$ равномерно непрерывна на каждом ребре графа Γ и поэтому существуют все односторонние пределы $u_i'(a)$, $i \in I(a)$, для каждой внутренней вершины a.

Для функций p и q, принадлежащих пространству $C(\Gamma)$, зададим на графе Γ однородное дифференциальное уравнение

$$-(pu')' + qu = 0. \tag{1}$$

Под решением дифференциального уравнения (1) будем понимать функцию $u \in C(\Gamma)$, непрерывную на всем графе Γ, удовлетворяющую на каждом ребре γ_i уравнению

(1) (и, следовательно, обладающую необходимой гладкостью на ребре γ_i) и удовлетворяющую в каждой внутренней вершине условию

$$\sum_{i\in I(a)} \alpha_i(a)u_i'(a) = 0, \tag{2}$$

где $\{\alpha_i(a)\}_{i\in I(a)}$ — приписываемый внутренней вершине a набор вещественных чисел. Заметим, что решение $u(\cdot)$ дифференциального уравнения (1) не обязано быть тождественно равным нулю, так как множество граничных вершин $\partial\Gamma$ не пусто. Относительно функции $p(\cdot)$ дополнительно предполагается, что она дифференцируема на Γ и $p(x) > 0$. Это означает, что решение $u(\cdot)$ уравнения (1) дважды дифференцируемо на Γ. Везде в дальнейшем будем полагать, что знаки констант $\alpha_i(a)$, $i \in I(a)$, для каждой внутренней вершины a согласованы с ориентацией ребер, примыкающих к a. А именно, будем полагать, что в условиях (2) все константы $\alpha_i(a)$ положительны и все пределы $u_i'(a)$ производной функции $u(\cdot)$ посчитаны при ориентации ребер от вершины a. Условия (2) будем называть условиями согласования.

Пусть $u(\cdot)$ решение уравнения (1). Тогда оно удовлетворяет условиям согласования (2). И в силу положительности величин $\alpha_i(a)$ обладает следующими свойствами:

1) Для каждой внутренней вершины a решение $u(\cdot)$ либо тождественно равно нулю на всех ребрах γ_i, $i \in I(a)$, либо отлично от тождественного нуля на не менее, чем на двух ребрах, примыкающих к a.

2) Решение $u(\cdot)$ либо тождественно равно нулю на всем графе Γ, либо отлично от тождественного нуля на двух и более граничных ребрах.

Действительно, если предположить, что решение $u(\cdot)$ равно тождественно нулю на всех ребрах, примыкающих к внутренней вершине a, кроме, быть может, одного ребра γ_i, то в силу непрерывности $u_i(a) = 0$, а в силу условий согласования и не обращению в нуль величин $\alpha_i(a)$ имеем $u_i'(a) = 0$. Сужая уравнение (1) на ребро γ_i получаем задачу Коши с нулевыми начальными условиями, что гарантирует тождественное равенство нулю решения $u(\cdot)$ и на ребре γ_i. Первое свойство доказано. Второе свойство вытекает из первого свойства, в силу того, что граф Γ — является деревом, и у него отсутствуют циклические маршруты.

3. Постановка краевой задачи на собственные значения, заданной на графе

Рассмотрим на графе Γ краевую задачу на собственные значения

$$-(pu')' + qu = \lambda u, \tag{3}$$

$$u\big|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{4}$$

со спектральным параметром λ. Известно (см. [2, 3]), что спектр Λ краевой задачи (3), (4) состоит из последовательности изолированных собственных значений, не имеющей конечных предельных точек. Кроме того, в работе [4] было показано, что если все величины $\alpha_i(a)$, $i \in I(a)$, для каждой внутренней вершины a положительны, при ориентации всех ребер, примыкающих к вершине a, от вершины a, то все собственные значения вещественны. Занумеруем все собственные значения краевой задачи (3) с учетом их кратности в порядке возрастания: $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$. Итак, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Для произвольного вещественного числа $\lambda \notin \Lambda$ при фиксированной граничной вершине b рассмотрим решение $z_b(\cdot, \lambda)$ дифференциального уравнения (3) удовлетворяющее следующим граничным условиям

$$u\big|_{\partial\Gamma} \setminus \{b\} = 0, \quad u(b) = 1. \tag{5}$$

Такое решение существует и единственно, так как число λ не является собственным значением краевой задачи (3), (4) и, следовательно, краевая задача (3), (5) однозначно разрешима.

Положим $\varphi(\lambda) = \frac{\partial z_b(x,\lambda)}{\partial x}\Big|_{x=b}$. В последнем равенстве производная в точке b определена в направлении «от b».

Лемма 1. *Функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна и возрастает на каждом интервале $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$, где λ_{k-1} и λ_k не равные друг другу собственные значения краевой задачи* (3), (4).

$\lhd$ Рассмотрим множество $\tilde\Lambda$ тех λ из $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$, для которых $z_b(\cdot, \lambda)$ имеет нули во внутренних вершинах графа Γ. Покажем, что множество $\tilde\Lambda$ конечно.

Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{\tilde\lambda_k\}$ с различными членами такая, что функция $z_b(\cdot, \tilde\lambda_k)$ имеет нули в V при любом значении k. Ввиду конечности множества V из последовательности $\{\tilde\lambda_k\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{\tilde\lambda_{k_n}\}$ обладающую свойством: каждая из функций $z_b(\cdot, \tilde\lambda_{k_n})$ равна нулю в некоторой вершине $a \in V$ и, будучи решением (3), нетривиальна по крайней мере на двух ребрах примыкающих к a. Это, с учетом конечности множества $I(a)$, означает, что ограниченная последовательность $\{\tilde\lambda_{k_n}\}$ включает в себя бесчисленное множество собственных значений одной из задач

$$-(pu')' + qu = \lambda u \quad (x \in \Gamma_j,, j \in I(a)), \quad u\big|_{\partial\Gamma_j = 0}, \tag{6}$$

где Γ_j — это один из подграфов на которые распадается граф Γ при удалении из него вершины a и который не содержит ребра примыкающего к вершине b.

Но, как отмечалось выше, спектр задачи (6) не имеет конечных предельных точек. Получаем противоречие, доказывающее конечность $\tilde\Lambda$.

Так как множество $\tilde\Lambda$ конечно, то интервал $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$ можно разбить на конечное число интервалов (μ'_j, μ''_j), каждый из которых содержит один и только один элемент $\tilde\lambda_j$ множества $\tilde\Lambda$. Покажем, что функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна и возрастает в каждом из интервалов (μ'_j, μ''_j). Тем самым будет доказана непрерывность и возрастание $\varphi(\cdot)$ в $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$.

Рассмотрим функцию $z_b(\cdot, \tilde\lambda_j)$. Функция $z_b(\cdot, \tilde\lambda_j)$ является решением (3) и значит, нетривиальна хотя бы на двух граничных ребрах графа Γ. Поэтому существует вершина $b_j \in \partial\Gamma \backslash \{b\}$ такая, что $z'_b(b_j, \tilde\lambda_j) \neq 0$ (здесь и везде ниже знак производной означает дифференцирование по первому аргументу). Далее, для любого $\lambda \in (\mu'_j, \mu''_j) \backslash \lambda_j$ функция $z_b(\cdot, \lambda)$ не имеет нулей во внутренних вершинах графа Γ, а значит, нетривиальна на всех граничных ребрах графа. Поэтому для всех $\lambda \in (\mu'_j, \mu''_j)$ выполняется неравенство $z'_b(b_j, \lambda) \neq 0$. Тогда при любом $\lambda \in (\mu'_j, \mu''_j)$ функция

$$z(\cdot, \lambda) = \frac{z_b(\cdot, \lambda)}{z'_j(b_j, \lambda)} \tag{7}$$

является решением уравнения (3) и удовлетворяет граничным условиям

$$u\big|_{\partial\Gamma\backslash\{b\}} = 0, \quad u'(b_j) = 1. \tag{8}$$

В работе [5] доказано, что если задача (3), (8) имеет нетривиальное решение $z(\cdot,\lambda)$ при любом λ из некоторого интервала, то функция $z(\cdot,\cdot)$ и ее производная по первому аргументу непрерывно зависят от λ в указанном интервале. А так как (см. (7))

$$\varphi(\lambda) = z'(b,\lambda)\cdot z'_b(b_j,\lambda) = \frac{z'(b,\lambda)}{z(b,\lambda)} \tag{9}$$

и $z(b,\lambda)\neq 0$ при $\lambda\in(\mu'_j,\mu''_j)$, то функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна в (μ'_j,μ''_j).

Остается доказать, что $\varphi(\cdot)$ возрастает в (μ'_j,μ''_j). Пусть $\lambda_1,\lambda_2\in(\mu'_j,\mu''_j)$ и $\lambda_1<\lambda_2$. Если c — это ближайший к вершине b нуль функции $z(\cdot,\lambda_1)$, то на основании теоремы сравнения для уравнений на графах (см. [1]) функция $z(\cdot,\lambda_2)$ не имеет нулей на пути графа Γ соединяющем точки c и b. Непосредственным дифференцированием устанавливается, что функция

$$p(\cdot)\left\{z(\cdot,\lambda_1)\cdot z'(\cdot,\lambda_1) - (z(\cdot,\lambda_1))^2\frac{z'(\cdot,\lambda_2)}{z(\cdot,\lambda_2)}\right\}$$

возрастает на пути «от b к c», откуда, учитывая $p(\cdot)>0$ и $z(c,\lambda_1)=0$, следует, что

$$z(b,\lambda_1)\cdot z'(b,\lambda_1) - (z(b,\lambda_1))^2\frac{z'(b,\lambda_2)}{z(b,\lambda_2)} < 0$$

или

$$\frac{z'(b,\lambda_1)}{z(b,\lambda_1)} < \frac{z'(b,\lambda_2)}{z(b,\lambda_2)}.$$

Сопоставляя последнее неравенство с (9) получим $\varphi(\lambda_1)<\varphi(\lambda_2)$. Лемма полностью доказана. $\triangleright$

4. Непрерывная зависимость собственных значений краевой задачи от констант, входящих в условия согласования

Пусть a — некоторая фиксированная внутренняя вершина графа Γ. Удалим вершину a из множества Γ. Тогда граф Γ распадется на конечное число непересекающихся подграфов Γ_i, $i\in I(a)$. На каждом подграфе Γ_i рассмотрим краевую задачу (3), (4). Спектр каждой такой задачи обладает свойствами перечисленными в п. 3. Обозначим через $\Lambda(a)$ объединение спектров краевых задач (3), (4), заданных на Γ_i, $i\in I(a)$. В силу определения множество $\Lambda(a)$ состоит из последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел, не имеющей конечных предельных точек. Более того (см. [5]), элементы последовательностей Λ и $\Lambda(a)$ перемежаются

$$\lambda_0\leqslant\nu_1\leqslant\lambda_1\leqslant\nu_2\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots.$$

Для всякого $\lambda\notin\Lambda(a)$ обозначим через $z(\cdot,\lambda,i)$ решение уравнения (3), суженного на граф Γ_i, и удовлетворяющее условиям

$$u\,\big|_{\partial\Gamma\setminus\{a\}} = 0\,,\quad u'(a)=1. \tag{10}$$

Это определение корректно, так как $\lambda\notin\Lambda(a)$ и задача невырождена. Положим

$$\rho(\lambda)=\sum_{i\in I(a)}\alpha_i\cdot z'(a,\lambda,i).$$

В последнем равенстве $z'(a,\lambda,i)$ — это производная функции $z(\cdot,\lambda,i)$ в вершине a определяемая в направлении «от a», α_i — положительные вещественные числа.

Лемма 2. *Если при некотором k для чисел $\nu_{k-1}, \nu_k \in \Lambda(a)$ выполняется неравенство $\nu_{k-1} < \nu_k$, то в интервале (ν_{k-1}, ν_k) функция $\rho(\cdot)$ непрерывна и возрастает.*

$\triangleleft$ Интервал (ν_{k-1}, ν_k) не содержит точек спектра ни одной из задач (3), (4) заданных на Γ_i, $i \in I(a)$. Поэтому, на основании леммы 1, каждая из функций $z'(a,\cdot,i)$, $i \in I(a)$, а, следовательно, и функция $\rho(\cdot)$, непрерывна и возрастает в (ν_{k-1}, ν_k). Лемма доказана. $\triangleright$

Пусть α_1 и α_2 два различных фиксированных значения параметра $\alpha_{i_0}(a)$. Для определенности будем считать $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Обозначим через $\{\lambda_k^{(j)}\}$ $(j = 1,2)$ спектры краевых задач, соответствующих значениям α_1и α_2.

Теорема 1. *Пусть при некотором значении k выполнено $\lambda_k^{(1)} \neq \lambda_k^{(2)}$. Тогда любому значению параметра $\alpha_{i_0}(a)$ из интервала (α_1, α_2) отвечает единственное собственное значение λ_k задачи* (3), (4), *лежащее в интервале $(\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)})$. Наоборот, каждому значению $\lambda \in (\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)})$ отвечает число $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ такое, что λ является собственным значением задачи* (3), (4) *при $\alpha_{i_0}(a) = \alpha$.*

$\triangleleft$ В работе [5] доказано, что если некоторому собственному значению λ задачи (3), (4) отвечает собственная функция равная нулю, в вершине a, то значение λ не зависит от выбора чисел $\alpha_i(a)$ $(i \in I(a))$. Поэтому неравенство $\lambda_k^{(1)} \neq \lambda_k^{(2)}$ означает, что значениям $\lambda_k^{(j)}$ не может отвечать собственная функция равная нулю в вершине a, и, значит, числа $\lambda_k^{(j)}$ не принадлежат множеству $\Lambda(a)$, т. е. $\nu_{k-1} < \lambda_k^{(j)} < \nu_k$.

Пусть, для определенности, $\lambda_k^{(1)} < \lambda_k^{(2)}$. (Вообще говоря, большему значению $\alpha_{i_0}(a)$ не обязательно отвечает большее собственное значение). Для каждого значения $\alpha_{i_0}(a) \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и каждого $\lambda \in [\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)}]$ определена функция

$$\beta(\alpha_{i_0}(a), \lambda) = \sum_{i \in I(a)} \alpha_i(a) \cdot z'(a,\lambda,i),$$

где через $z(\cdot,\lambda,i)$ по-прежнему обозначаем решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (10).

Легко видеть, что если при некотором значении $\alpha_{i_0}(a) = \alpha_0$ и некотором $\lambda = \lambda_0$ выполняется равенство $\beta(\alpha_0, \lambda_0) = 0$, то число λ_0 является собственным значением задачи (3), (4) соответствующим значению $\alpha_{i_0}(a) = \alpha_0$. Поэтому

$$\beta(\alpha_1, \lambda_k^{(1)}) = 0 = \beta(\alpha_2, \lambda_k^{(2)}). \tag{11}$$

Из леммы 2 следует, что при каждом $\alpha_{i_0}(a)$ функция $\beta(\alpha_{i_0}(a), \cdot)$ непрерывна и возрастает в $[\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)}]$. Легко также видеть, что при каждом λ функция $\beta(\cdot, \lambda)$ непрерывна и возрастает в $[\alpha_1, \alpha_2]$. Поэтому, с учетом (11), выполняются неравенства

$$\beta(\cdot, \lambda_k^{(1)}) < 0, \quad \beta(\cdot, \lambda_k^{(2)}) > 0, \quad \beta(\alpha_1, \cdot) > 0, \quad \beta(\alpha_2, \cdot) < 0. \tag{12}$$

Из непрерывности $\beta(\cdot,\cdot)$ и (12) следует, что для любого $\alpha_{i_0}(a) \in (\alpha_1, \alpha_2)$ в интервале $(\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)})$ найдется единственное значение λ, обращающее функцию $\beta(\alpha_{i_0}(a), \cdot)$ в нуль. И наоборот, каждому $\lambda \in (\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)})$ отвечает $\alpha_{i_0}(a) \in (\alpha_1, \alpha_2)$, обращающее функцию $\beta(\cdot, \lambda)$ в нуль. $\triangleright$

Доказанная теорема непосредственно приводит к утверждению.

Теорема 2. *Если один из параметров $\alpha_i(a)$, входящих в условия согласования (2) непрерывно меняется на положительной полуоси, то собственные значения задачи (3), (4) непрерывно меняются на вещественной оси, либо остаются неизменными.*

Опираясь на теорему 2 уже легко получить основной результат данной работы.

Обозначим через m число всех параметров $\alpha_i(a)$, входящих во все условия согласования рассматриваемой задачи (3), (4). Так как все ребра графа Γ занумерованы, то мы можем упорядочить числа $\alpha_i(a)$ и рассмотреть этот упорядоченный набор как точку пространства $\mathbb{R}^m$, все координаты которой положительны. Тогда можно считать, что каждой такой точке отвечает своя краевая задача (3), (4).

Зафиксируем некоторую точку $\alpha^* = \{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_m^*\} \in \mathbb{R}^m$ $(\alpha_i^* > 0)$ и обозначим через $\{\lambda_k^*\}$ спектр задачи (3), (4) отвечающей α^*. Через $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ $(\alpha_i > 0)$ обозначим произвольную точку из $\mathbb{R}^m$, а через $\{\lambda_k\}$ — спектр задачи (3), (4) отвечающей α.

Теорема 3. *Если $\alpha \to \alpha^*$ в смысле нормы $\mathbb{R}^m$, то каждое из чисел $\lambda_k \to \lambda_k^*$ в смысле нормы $\mathbb{R}$.*

$\lhd$ Так как, в силу теоремы 2, каждое собственное значение непрерывно зависит от одного параметра $\alpha_i(a)$ при фиксированных остальных параметрах $\alpha_j(a)$, $j \neq i$, то оно непрерывно зависит и от совокупности всех параметров $\{\alpha_i(a)\}_{i \in I(a)}$, задающих условие согласования (2) во внутренней вершине a. $\rhd$

Литература

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М.* О теоремах сравнения для уравнений на графе // Диф. уравнения.—1989.—Т. 25, № 7.—С. 1147–1150.
2. *Завгородний М. Г., Покорный Ю. В.* О спектре краевой задачи на графе // Успехи мат. наук.—1989.—Т. 44, № 4.—С. 220–221.
3. *Завгородний М. Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // Докл. РАН.—1994.—Т. 335, № 3.—С. 281–283.
4. *Аль-Обейд А., Прядиев В. Л.* О спектре краевой задачи на графе.—М., 1993.—20 с. Деп. в ВИНИТИ. 09.03.93, № 537-В93.
5. *Аль-Обейд А.* О перемежаемости спектров краевых задач на графе.—М., 1993.—26 с. Деп. в ВИНИТИ. 10.09.93, № 2011-В93.
6. *Завгородний М. Г., Кулаев Р. Ч.* О зависимости собственных значений краевой задачи на графе от параметров, входящих в условия гладкости.—М., 1997.—19 с. Деп. в ВИНИТИ 09.12.97, № 3697-В97.

Статья поступила 27 мая 2003 г.

Завгородний Михаил Григорьевич, к. ф.-м. н.
г. Воронеж, Воронежский государственный университет

Кулаев Руслан Черменович, к. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН