Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2004, Том 6, Выпуск 1

УДК **517.98**

О ПОРЯДКОВОЙ СТРУКТУРЕ АБСТРАКТНОГО СПИН-ФАКТОРА

К. В. Коробова, В. Т. Худалов

Памяти Юрия Александровича
Абрамовича посвящается

В статье изучены геометрические свойства конуса положительных элементов в абстрактном спин-факторе. Устанавливается равносильность (с некоторыми ограничениями) ортогональности элементов по Роберу и их ортогональности как элементов алгебры.

Введение

В последние годы возрос интерес к изучению JB-алгебр — вещественных аналогов C^*-алгебр. Основы теории JB-алгебр разработаны в работе Э. Алфсена, Ф. Шульца и Э. Штёрмера [6], где, в частности, установлен аналог теоремы Гельфанда — Наймарка для JB-алгебр. Ранее этот круг вопросов рассматривал Д. М. Топпинг [7] в рамках класса йордановых алгебр самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. В работе А. Г. Кусраева [3] к вопросу о классификации и представлении спин-алгебр применены методы булевозначного анализа. Данная работа посвящена исследованию порядковых свойств абстрактного спин-фактора.

В первом параграфе приведены необходимые определения и вспомогательные факты. Второй параграф посвящен геометрическим свойствам конуса положительных элементов в абстрактном спин-факторе. В третьем параграфе устанавливаются условия совпадения алгебраической ортогональности и ортогональности по Роберу. Четвертый параграф содержит описание множеств положительных и отрицательных частей произвольного элемента, а также множества элементов, на котором реализуется минимум в формуле расстояния от элемента до конуса.

В статье использованы терминология и обозначения из [1, 2]. Необходимые сведения из теории конусов имеются в [4].

1. Предварительные сведения

Приведем необходимые для дальнейшего определения и результаты.

1.1. Пусть E — банахово пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, E_+ — конус в E. Конус E_+ называется *регулярным*, если выполнены следующие условия:

(1) $\pm x \leqslant y \Longrightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$ для любых $x, y \in E$,

(2) для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in E_+$ такой, что $\pm x \leqslant y$ и $\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|$.

Регулярный конус E_+ называется *строго регулярным*, если выполнено условие (2) при $\varepsilon = 0$, т. е.

($2'$) для любого $x \in E$ существует $y \in E_+$ такой, что $\pm x \leqslant y$ и $\|y\| = \|x\|$.

Если E упорядочено замкнутым строго регулярным конусом E_+, то пишут $(E, E_+) \in (\mathfrak{R})$, см. [1, 2].

1.2. Напомним один общий метод построения конуса в произвольном банаховом пространстве. Пусть X — банахово пространство, $f \in X^*$ — произвольный непрерывный линейный функционал на X такой, что $\|f\| = 1$. Для любого $\alpha \in (0,1]$ определим круглый конус

$$K(f,\alpha) := \{x \in X : \ f(x) \geqslant \alpha\|x\|\}.$$

Конус $K(f,\alpha)$ замкнут, нормален и несплющен [4].

1.3. Пусть $(E, E_+) \in (\mathfrak{R})$. Для любого $x \in E$ обозначим через $|X|$ множество элементов $y \in E$ таких, что $\pm x \leqslant y$ и $\|x\| = \|y\|$. Положим

$$X_+ = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|X|, \qquad X_- = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|X|.$$

Множества X_+ и X_- называются множествами *положительных* (соответственно *отрицательных*) *частей элемента* x. Строго регулярный конус E_+ называется простым, если для любого $x \in E$ множество $|X|$ состоит из одного элемента. В этом случае этот элемент называется *метрическим модулем* и обозначается $|x|$. Тогда метрически положительная и метрически отрицательная части элемента x имеют вид:

$$x_+ = \frac{1}{2}(x + |x|), \qquad x_- = \frac{1}{2}(|x| - x).$$

Из этих определений следует, что $|x| \geqslant \pm x$, причем

$$x = x_+ - x_-, \quad |x| = x_+ + x_-, \quad \|x_+ - x_-\| = \|x_+ + x_-\|, \quad \|x\| = \||x|\|.$$

Понятно, что в случае простого конуса элементы $|x|$, x_+, x_- определены однозначно. Примером пространства с простым конусом является (H, H_+), где H — гильбертово пространство [4].

1.4. Напомним, что конус E_+ в упорядоченном банаховом пространстве (E, E_+) называется *достижимым*, если для любого $x \in E$ существует элемент $Px \in E_+$, на котором реализуется минимум в формуле расстояния от x до E_+, т. е. $d(x, E_+) = \inf\{\|a - x\| : a \in E_+\} = \|Px - x\|$. Множество всех таких Px обозначается символом $M(x)$. Достижимый конус E_+ называется *чебышевским*, если для любого $x \in E$ множество $M(x)$ состоит из одного элемента. Достижимый строго регулярный конус E_+ называется *вполне достижимым*, если $M(x) = x_+$ для любого $x \in E$. Чебышевский простой конус E_+ называется *вполне чебышевским*, если $Px = x_+$ для любого $x \in E$, см. [4].

Приведем двойственное условие, характеризующее ближайшую к элементу x точку Px [4].

Теорема. *Пусть E_+ — произвольный клин в нормированном пространстве E и $x \in E$ — произвольный элемент, не принадлежащий замыканию E_+. Для того, чтобы элемент $Px \in E_+$ был ближайшим к x элементом клина E_+ необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал $f \in E_+^*$ с нормой $\|f\| = 1$ такой, что $f(Px) = 0$, $f(Px - x) = \|Px - x\|$.*

Следствием этой теоремы является утверждение, устанавливающее зависимость между величиной расстояния от элемента до конуса и разложением элемента на положительную и отрицательную метрические части.

Утверждение. *Пусть $(E, E_+) \in (\mathfrak{R})$ и $x \notin E_+$. Элемент $x_+ \in E_+$ является ближайшим к x элементом конуса E_+ тогда и только тогда, когда существует $f \in E_+^*$, $\|f\| = 1$, $f(x_+) = 0$, $f(x_-) = \|x_-\|$. В этом случае $d(x, E_+) = \|x_-\|$.*

1.5. Пусть E — банахово пространство над $\mathbb{R}$ со строго регулярным замкнутым конусом E_+. Элементы $x, y \in E_+$ называются *н-дизъюнктными* или *ортогональными по Роберу* (обозначается $x \underset{R}{\perp} y$), если $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ для любого $\lambda \geqslant 0$.

1.6. Напомним, что векторное пространство A над полем $\mathbb{R}$ называется *йордановой алгеброй*, если в A введена операция умножения $x \circ y$ $(x, y \in A)$, удовлетворяющая условиям:

(1) $x \circ y = y \circ x$ для любых $x, y \in A$;
(2) $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$ для любых $x, y, z \in A$;
(3) $\lambda(x \circ y) = (\lambda x) \circ y$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x, y \in A$;
(4) $(x^2 \circ y) \circ x = x^2 \circ (y \circ x)$ для любых $x, y \in A$.

2. Об отношении порядка в абстрактном спин-факторе

В этом параграфе изучаются геометрические свойства конуса положительных элементов в абстрактном спин-факторе.

2.1. Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим декартово произведение $\mathbb{R} \times H = \{(\alpha, h) : \alpha \in \mathbb{R}, h \in H\}$. Определим в $\mathbb{R} \times H$ бинарную операцию $\circ$ следующим образом:

$$(\alpha, h) \circ (\beta, f) = (\alpha\beta + (h, f), \alpha f + \beta h) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ h, f \in H).$$

Норму на $\mathbb{R} \times H$ определим по формуле

$$\|(\alpha, h)\| = |\alpha| + \sqrt{(h, h)} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, h \in H).$$

Непосредственно проверяется [5–7], что $A = \mathbb{R} \times H$ является JB-алгеброй, т. е. йордановой алгеброй с единицей $\mathbf{1} = (1, 0)$ и нормой, удовлетворяющей условиям:

(1) $\|x \circ y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ для любых $x, y \in A$;
(2) $\|x^2\| = \|x\|^2$ для любых $x \in A$;
(3) $\|x^2\| \leqslant \|x^2 + y^2\|$ для любых $x, y \in A$.

Эту алгебру принято называть *абстрактным спин-фактором*, см. [6, 7]. Так как $A := \mathbb{R} \times H$ — рефлексивное банахово пространство, то A будет также и AJW-алгеброй.

2.2. *Для конуса положительных элементов $A_+ = \{z^2 : z \in A\}$ в алгебре $A = \mathbb{R} \times H$ имеет место представление $A_+ = \{(\beta, f) \in A : \beta \geqslant \|f\|\}$.*

$\triangleleft$ Действительно, если $z = (\alpha, h) \in A$, то

$$z^2 = (\alpha^2 + \|h\|^2, 2\alpha h) \quad \text{и} \quad \alpha^2 + \|h\|^2 \geqslant \|2\alpha h\| = 2|\alpha|\|h\|.$$

Обратно, пусть элемент $(\beta, f) \in A$ такой, что $\beta \geqslant \|f\|$. Покажем, что существует $(\alpha, h) \in A$ такой, что $(\alpha, h)^2 = (\beta, f)$. Действительно, определим (α, h) из следующих условий: $2\alpha h = f$, $\alpha^2 + \|h\|^2 = \beta$.

Если $f=0$, то берем $(\alpha,h)=\big(\pm\sqrt{\beta},0\big)$. Если $f\neq 0$, то $\alpha\neq 0$ и, полагая $h=f/2\alpha$, получаем $\alpha^2+\frac{\|f\|^2}{4\alpha^2}=\beta$. По условию $\beta\geqslant\|f\|$. Рассмотрим два случая.

1. Если $\beta=\|f\|$, то для элемента $(\|f\|,f)$ существуют два корня $\pm\Big(\frac{\|f\|}{\sqrt{2}},\frac{f}{\sqrt{2}\sqrt{\|f\|}}\Big)$, причем один из них является положительным элементом, другой — отрицательным.

2. Если $\beta>\|f\|$, то существует четыре квадратных корня.

$$z_1=\left(\frac{\sqrt{\beta+\sqrt{\beta^2-\|f\|^2}}}{\sqrt{2}},\ \frac{f}{\sqrt{2}\sqrt{\beta+\sqrt{\beta^2-\|f\|^2}}}\right),\qquad z_2=-z_1.$$

$$z_3=\left(\frac{\sqrt{\beta-\sqrt{\beta^2-\|f\|^2}}}{\sqrt{2}},\ \frac{f}{\sqrt{2}\sqrt{\beta-\sqrt{\beta^2-\|f\|^2}}}\right),\qquad z_4=-z_3.$$

Таким образом, равенство множеств $\{z^2:\,z\in A\}=\{(\beta,f)\in A:\,\beta\geqslant\|f\|\}$ доказано. $\rhd$

2.3. *Пространство* $(\mathbb{R}\times H)$ *с конусом* A_+ *является пространством ограниченных элементов с единицей* $u=(1,0)$ *и нормой*

$$\|a\|:=\inf\{0<\lambda\in\mathbb{R}:\,-\lambda u\leqslant a\leqslant\lambda u\}\quad(a\in A).$$

$\lhd$ См. [6; теорема 2.1]. $\rhd$

Ответ на вопрос, при каких условиях произведение элементов из конуса попадает в конус, дает следующее утверждение.

2.4. *Пусть* $x=(\alpha,h)\in A_+, y=(\beta,f)\in A_+$. *Тогда справедливы утверждения:*

(1) *Если* $h=0$ *или* $f=0$, *то* $x\circ y\in A_+$;

(2) *Если* $h\neq 0$ *и* $f\neq 0$, *то* $x\circ y\in A_+$ *тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\alpha}{\|h\|}+\frac{\beta}{\|f\|}\leqslant 2(1+\sin\varphi),$$

где φ *— угол между* h *и* f.

$\lhd$ Рассмотрим $x\circ y=(\alpha\beta+(h,f),\alpha f+\beta h)$. Согласно 2.2 $x\circ y\in A_+$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha\beta+(h,f)\geqslant\|\alpha f+\beta h\|. \tag{2.1}$$

(1): Если $x=(\alpha,h)\in A_+, y=(\beta,f)\in A_+$ и $h=0$, то неравенство (2.1) имеет вид:

$$\alpha\beta\geqslant\|\alpha f\|\iff\beta\geqslant\|f\|. \tag{2.2}$$

Последнее выполняется, так как $y=(\beta,f)\in A_+$. При $f=0$ рассуждения аналогичны.

(2): Пусть $h\neq 0, f\neq 0$. Возводя в квадрат неравенство (2.1), получаем

$$\alpha^2\beta^2+(h,f)^2+2\alpha\beta(h,f)\geqslant\alpha^2\|f\|^2+\beta^2\|h\|^2+2\alpha\beta(h,f).$$

Учитывая, что $(h,f)=\|h\|\|f\|\cos\varphi$, где φ — угол между h и f, имеем

$$\alpha^2\beta^2+\|h\|^2\|f\|^2\cos^2\varphi\geqslant\alpha^2\|f\|^2+\beta^2\|h\|^2$$

или

$$\|h\|^2\|f\|^2\left(\left(\frac{\alpha}{\|h\|}\right)^2\left(\frac{\beta}{\|f\|}\right)^2+\cos^2\varphi-\left(\frac{\alpha}{\|h\|}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\|f\|}\right)^2\right)\geqslant 0.$$

Обозначив $\big(\alpha/\|h\|\big)^2 = a$, $\big(\beta/\|f\|\big)^2 = b$, $\cos^2\varphi = t$, заметим, что $a, b \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Более того, так как $x = (\alpha, h) \in A_+, y = (\beta, f) \in A_+$, то $a, b \geqslant 1$. Таким образом, последнее неравенство примет вид $ab + t - (a+b) \geqslant 0$. Поскольку $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, то

$$\begin{cases} a + b \leqslant ab + t, \\ -(a+b)^2 \leqslant -4ab, \end{cases}$$

значит, $4(a+b) - (a+b)^2 \leqslant t$. Таким образом, получаем

$$2 - 2\sqrt{1-t} \leqslant a + b \leqslant 2 + 2\sqrt{1-t}, \quad a + b \leqslant 2 + 2\sqrt{1-t},$$

откуда выводим

$$\frac{\alpha}{\|h\|} + \frac{\beta}{\|f\|} \leqslant 2 + 2\sqrt{1-t} \implies \frac{\alpha}{\|h\|} + \frac{\beta}{\|f\|} \leqslant 2(1 + \sin\varphi). \ \rhd$$

2.5. Заметим, что $(\mathbb{R} \times H, \|\cdot\|)^* = (\mathbb{R} \times H, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|(\beta, f)\|_\infty = \sup\{|\beta|, \|f\|\}$. Двойственность между $A = \mathbb{R} \times H$ и его сопряженным задается формулой

$$\langle(\alpha, h), (\beta, f)\rangle = \alpha\beta + (h, f).$$

Конус A_+ совпадает с круглым конусом $K(F, 1/2)$, где $F \in A^*$, $F = (1, 0)$.

$\lhd$ Действительно,

$$\begin{aligned} K(F, 1/2) &= \{(\alpha, h) : \langle(\alpha, h), (1, 0)\rangle \geqslant (|\alpha| + \|h\|)/2\} = \{(\alpha, h) : \alpha \geqslant (|\alpha| + \|h\|)/2\} \\ &= \{(\alpha, h) : \alpha \geqslant \|h\|\} = A_+. \ \rhd \end{aligned}$$

2.6. *Конус A_+ строго регулярен.*

$\lhd$ Пусть $\pm x \leqslant y, x = (\alpha, h), y = (\beta, f)$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 \leqslant y - x = (\beta - \alpha, f - h) \implies \beta - \alpha \geqslant \|f - h\| \geqslant \|h\| - \|f\|, \\ 0 \leqslant y + x = (\beta + \alpha, f + h) \implies \beta + \alpha \geqslant \|f + h\| \geqslant \|h\| - \|f\|, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{cases} \beta + \|f\| - \|h\| \geqslant \alpha, \\ \beta + \|f\| - \|h\| \geqslant -\alpha. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\beta + \|f\| - \|h\| \geqslant |\alpha|$, т. е. $|\beta| + \|f\| \geqslant |\alpha| + \|h\|$ или, что то же самое, $\|y\| \geqslant \|x\|$.

Возьмем произвольный $x = (\alpha, h)$ и рассмотрим два случая.

1. Пусть $|\alpha| \geqslant \|h\|$. Если $\alpha \geqslant 0$, то полагаем $y = x$; если $\alpha < 0$, то — $y = (-\alpha, h)$. В обоих случаях $\pm x \leqslant y$ и $\|x\| = \|y\|$.

2. Пусть $|\alpha| < \|h\|$. Тогда $\|h\| > 0$. Возьмем $y = (\|h\|, \alpha h/\|h\|)$. Убедимся, что $\pm x \leqslant y$ и $\|x\| = \|y\|$. Действительно, $y \pm x = (\|h\| \pm \alpha, \alpha h/\|h\| \pm h)$ и $\|h\| \pm \alpha \geqslant \big\|h(\alpha \pm \|h\|)/\|h\|\big\| = \|h\| \pm \alpha$, т. е. $\pm x \leqslant y$. Кроме того, $\|y\| = \|h\| + |\alpha|\|h\|/\|h\| = \|x\|$. $\rhd$

2.7. Для любого $x \in A$ $(x \notin \pm A_+)$ положим

$$\{x\}_+ = \left\{u \in A_+ : \ u = \frac{y + x}{2}, \ y \in A_+, \ y \geqslant \pm x, \ \|y\| = \|x\|\right\},$$

$$\{x\}_- = \left\{ v \in A_+ : v = \frac{y-x}{2},\ y \in A_+,\ y \geqslant \pm x,\ \|y\| = \|x\| \right\}.$$

Тогда согласно 2.6 для элемента $x = (\alpha, h)$ имеем

$$u = x_+ = \frac{1}{2}\left(\left(\|h\|, \frac{\alpha h}{\|h\|}\right) + (\alpha, h)\right) = \frac{1}{2}(\alpha + \|h\|)\left(1, \frac{h}{\|h\|}\right) = (\alpha + \|h\|)P(x),$$

$$v = x_- = \frac{y-x}{2} = (\|h\| - \alpha)P^{\perp}(x),$$

где $P(x) = \frac{1}{2}\big(1, h/\|h\|\big)$ и $P^{\perp}(x) = \frac{1}{2}(1, -h/\|h\|)$. При этом P и $P^{\perp}$ — ортогональные проекторы, т. е. $P^2 = P$, $(P^{\perp})^2 = P^{\perp}$ и $P \circ P^{\perp} = 0$.

Утверждение. *Конус A_+ является н-дизъюнктно разложимым.*

$\lhd$ Пусть $x = (\alpha, h)$. Если $|\alpha| \geqslant \|h\|$, то при $\alpha > 0$ имеем $x \in A_+$, $x = x - 0$, $x \underset{R}{\perp} 0$, а при $\alpha < 0$ будет $x = 0 - (-\alpha, -h)$, $0 \underset{R}{\perp} (-\alpha, -h)$.

Если $|\alpha| < \|h\|$, то $x = x_+ - x_-$. Покажем, что $x_+ \underset{R}{\perp} x_-$, т. е. $\|x_+ + tx_-\| = \|x_+ - tx_-\|$ для любого $t \geqslant 0$. Действительно,

$$\|x_+ + tx_-\|^2 = \|(x_+ + tx_-)^2\| = \|x_+^2 + t^2 x_-^2\|;$$
$$\|x_+ - tx_-\|^2 = \|(x_+ - tx_-)^2\| = \|x_+^2 + t^2 x_-^2\|. \ \rhd$$

2.8. Вычислим расстояние от произвольного элемента $x \in A$ до конуса A_+. Пусть $x = (\alpha, h) \in A$. Ясно, что если $\alpha \geqslant \|h\|$, т. е. $x \in A_+$, то $d(x, A_+) = 0$, и ближайшим к элементу x в конусе A_+ является он сам. Если $x = (\alpha, h)$ и $\alpha \leqslant -\|h\|$, то $x \in -A_+$, $d(x, A_+) = \|x\| = |\alpha| + \|h\|$ и ближайшим элементом является 0.

Пусть теперь $|\alpha| < \|h\|$. Тогда, согласно пункту 2.7 $x = x_+ - x_-$, где $x_+ = (\alpha + \|h\|)Px$, $x_- = (\|h\| - \alpha)Px^{\perp}$, где $Px = \frac{1}{2}(1, h/\|h\|)$ и $Px^{\perp} = \frac{1}{2}(1, -h/\|h\|)$. Покажем, что сопряженным к конусу A_+ в сопряженном пространстве $(\mathbb{R} \times H, \|\cdot\|_\infty)$ будет конус A_+, т. е. $A_+^* = A_+$.

В самом деле, если $(\beta, f) \in A_+$, то для любой пары $(\alpha, h) \in A_+$ имеем $\langle(\alpha, h), (\beta, f)\rangle = \alpha\beta + (h, f) \geqslant \|h\|\|f\| + (h, f) \geqslant 0$, так как $\alpha \geqslant \|h\|$ и $\beta \geqslant \|f\|$, т. е. $A_+ \subset A_+^*$. Наоборот, пусть $(\beta, f) \in A_+^*$, т. е. для любой пары $(\alpha, h) \in A_+$ имеем $\alpha\beta + (h, f) \geqslant 0$. Если $f = 0$, то для $(\alpha, h) = (1, 0)$ получим $\beta \geqslant 0$, т. е. $(\beta, 0) \in A_+$. Пусть $f \neq 0$ и возьмем $(\alpha, h) = (1, -f/\|f\|)$. Тогда $(\alpha, h) \in A_+$ и $\beta \geqslant \|f\|$, т. е. $(\beta, f) \in A_+$. Тем самым установлено $A_+ = A_+^*$.

Докажем теперь, что элемент x_+ является ближайшим к элементом конуса A_+. В силу следствия 2.2.14 из [4] достаточно предъявить линейный функционал $F \in A_+^*$, такой что $F(x_+) = 0$ и $F(x_-) = \|x_-\|$. Таким функционалом является $F = (1, h/\|h\|)$. Действительно,

$$F \in A_+^*, \quad \|F\| = \sup\left\{|1|, \left\|\frac{-h}{\|h\|}\right\|\right\} = 1, \quad F(x_+) = 0,$$

$$F(x_-) = \left\langle \left(\|h\| - \alpha\right)\frac{1}{2}\left(1, \frac{-h}{\|h\|}\right), \left(1, \frac{-h}{\|h\|}\right)\right\rangle = \|h\| - \alpha = \|x_-\|.$$

Следовательно, в случае $|\alpha| < \|h\|$ имеем $d(x, A_+) = \|x_-\| = \|h\| - \alpha$, а ближайшим элементом является

$$x_+ = \frac{1}{2}(\alpha + \|h\|)\left(1, \frac{h}{\|h\|}\right).$$

Так как $A_+ = \{z^2 : z \in A\}$, то для любого элемента $x = (\alpha, h) \in A$ ближайший квадрат находится по формуле:

$$\mathrm{Pr}_{A_+}(x) = \begin{cases} z^2 = x, & \text{если } x \in A_+, \\ z^2 = 0, & \text{если } x \in -A_+, \\ z^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \|h\|)(1, \frac{h}{\|h\|}), & \text{если } x \notin \pm A_+. \end{cases}$$

3. Эквивалентность алгебраической ортогональности и ортогональности по Роберу

Исследуем связь между алгебраической ортогональностью элементов x и y абстрактного спин-фактора (т. е. когда $x \circ y = 0$) и ортогональностью по Роберу (т. е. когда $\|x + ty\| = \|x - ty\|$ для каждого $t \geqslant 0$). Покажем, что если $\alpha\beta \neq 0$, то эти понятия равносильны.

3.1. Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha\beta = 0$.

1. Пусть $\alpha = 0$. Имеем $(0, h) \circ (\beta, f) = ((h, f), \beta h) = 0$, что возможно лишь при $h \perp f$ и $\beta = 0$ или $h = 0$. Ясно, что если $h = 0$, то $x = 0$ и алгебраическая ортогональность равносильна ортогональности по Роберу. Если же $h \neq 0$, то $\beta = 0$ и $h \perp f$. С другой стороны, если $h \perp f$, то для любых h и β имеем $(0, h) \underset{R}{\perp} (\beta, f)$. В самом деле,

$$\|x + ty\| = \|(t\beta, h + tf)\| = |t\beta| + \|h + tf\|,$$

$$\|x - ty\| = \|(-t\beta, h - tf)\| = |-t\beta| + \|h - tf\|.$$

Так как в гильбертовом пространстве обычная ортогональность совпадает с ортогональностью по Роберу [4], то $\|h + tf\| = \|h - tf\|$ для $t \geqslant 0$ и, значит,

$$\|x + ty\| = \|x - ty\| \quad (t \geqslant 0),$$

т. е. $x \underset{R}{\perp} y$. Следовательно, при $\alpha = 0$ в случае, когда $\beta \neq 0$, $h \perp f$ и $h \neq 0$ имеем: $x \underset{R}{\perp} y$, но $x \circ y \neq 0$, т. е. ортогональность по Роберу не влечет алгебраическую ортогональность (хотя обратное имеет место). Случай $\beta = 0$ рассматривается симметричным образом.

2. Пусть $f = 0$ (или $h = 0$). Имеем: $(\alpha, h) \circ (\beta, 0) = (\alpha\beta, \beta h) = 0$, если $\beta = 0$ (т. е. $y = 0$) или $\beta \neq 0$ и одновременно $\alpha = 0, h = 0$. С другой стороны, так как

$$\|x + ty\| = \|(\alpha + t\beta, h)\| = |\alpha + t\beta| + \|h\|,$$

$$\|x - ty\| = \|(\alpha - t\beta, h)\| = |\alpha - t\beta| + \|h\|,$$

то $x \underset{R}{\perp} y$ тогда и только тогда, когда $|\alpha + t\beta| = |\alpha - t\beta|$ для любого t. А это возможно только в том случае, если $\beta = 0$ или $\alpha = 0$. И мы приходим к уже рассмотренному выше случаю.

3.2. Пусть теперь $\alpha\beta \neq 0$ и $f \neq 0$ (так как случай $f = 0$ приводит к $\alpha = 0$ или $\beta = 0$).

Теорема. *Пусть* $x = (\alpha, h) \in A$, $y = (\beta, f) \in A$ *и* $\alpha\beta \neq 0$, $f \neq 0$. *Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $x \circ y = 0$;

(2) $x \underset{R}{\perp} y$.

$\lhd$ (1) $\Longrightarrow$ (2): Пусть $x \circ y = 0$. Для всех $t \geqslant 0$ имеем

$$\|x+ty\|^2 = \|(x+ty)^2\| = \|x^2 + t^2y^2\|;$$

$$\|x-ty\|^2 = \|(x-ty)^2\| = \|x^2 + t^2y^2\|,$$

т. е. $\|x+ty\| = \|x-ty\|$. Отметим. что импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) верна для любых $x, y \in A$.

(2) $\Longrightarrow$(1): При $t \geqslant 0$ имеем

$$\|x+ty\| = \|(\alpha + t\beta, h + tf)\| = |\alpha + t\beta| + \|h + tf\|;$$

$$\|x-ty\| = \|(\alpha - t\beta, h - tf)\| = |\alpha - t\beta| + \|h - tf\|.$$

Так как $x \underset{R}{\perp} y$, то $|\alpha + t\beta| - |\alpha - t\beta| = \|h - tf\| - \|h + tf\|$ $\quad (t \geqslant 0)$. Положим $\varphi(t) = |\alpha + t\beta| - |\alpha - t\beta|$ при $t \geqslant 0$. Рассмотрим два случая

1. Пусть $\operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn}\beta$. Тогда $t_0 = \alpha/\beta > 0$ и

$$\varphi(t) = (\alpha + t\beta)\operatorname{sgn}\alpha - (\alpha - t\beta)\operatorname{sgn}\alpha = 2t|\beta|, \text{ если } 0 \leqslant t < t_0, \tag{3.1}$$
$$\varphi(t) = (\alpha + t\beta)\operatorname{sgn}\alpha + (\alpha - t\beta)\operatorname{sgn}\alpha = 2|\alpha|, \text{ если } t \geqslant t_0. \tag{3.2}$$

Отсюда $\|h - tf\| = \|h + tf\| + 2|\alpha|$ $(t \geqslant t_0)$. Возведя в квадрат обе части, получим

$$-(h,f) = |\alpha|\|h/t + f\| + \alpha^2/t, \quad t \geqslant t_0.$$

При $t \to +\infty$ получаем $-(h,f) = |\alpha|\|f\|$, откуда $|\alpha| = -(h,f)/\|f\|$. Далее, имеем

$$-t(h,f) = -\frac{(h,f)}{\|f\|}\|h + tf\| + \frac{-(h,f)^2}{\|f\|^2} \quad (t \geqslant t_0).$$

Так как $(h,f) \neq 0$ (иначе $\alpha = 0$), то $-t\|f\|^2 = -\|h + tf\|\|f\| + (h,f)$ или $\|h+tf\| = \|tf\| + (h, f/\|f\|)$. Вновь возводя в квадрат, будем иметь

$$\|h\|^2 + 2t(h,f) = 2t\|f\|\frac{(h,f)}{\|f\|} + \left(h, \frac{f}{\|f\|}\right)^2 \Longrightarrow \pm\left(h, \frac{f}{\|f\|}\right) = \|h\|.$$

Поскольку случай $h = 0$ исключается тем, что по предположению $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, получаем $h = \lambda f$. При этом, $|\alpha| = -(\lambda f, f)/\|f\| = -\lambda f$, поэтому $\lambda < 0$.

Пусть $\mu = -\lambda$, $\mu > 0$. Тогда $h = -\mu f$ и $|\alpha| = \mu\|f\| = \|h\|$. При $0 \leqslant t < t_0$, согласно (3.1) будет $\|h - tf\| - \|h + tf\| = 2t|\beta|$, откуда $\|-\mu f - tf\| = \|-\mu f + tf\| + 2t|\beta|$ или $(\mu + t)\|f\| = |\mu - t|\|f\| + 2t|\beta|$. Для всех $t \geqslant 0$, $t \leqslant \mu$, будем иметь $(\mu + t)\|f\| = (\mu - t)\|f\| + 2t|\beta|$. Значит, $\|f\| = 2|\beta| - \|f\| \Rightarrow |\beta| = \|f\|$.

Поскольку $\operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn}\beta$, то либо $\alpha = \|h\|$ и $\beta = \|f\|$, либо $\alpha = -\|h\|$ и $\beta = -\|f\|$. В первом случае имеем

$$x = \left(\|h\|, -\frac{\|h\|}{\|f\|}f\right) = \|h\|\left(1, -\frac{f}{\|f\|}\right), \quad y = (\|f\|, f) = \|f\|\left(1, \frac{f}{\|f\|}\right)$$

и при этом $x \circ y = 0$. Во втором случае будет

$$x = \left(-\|h\|, -\frac{\|h\|}{\|f\|}f\right) = -\|h\|\left(1, \frac{f}{\|f\|}\right), \quad y = (-\|f\|, f) = -\|f\|\left(1, -\frac{f}{\|f\|}\right),$$

и снова $x \circ y = 0$.

2. Пусть $\operatorname{sgn}\alpha = -\operatorname{sgn}\beta$. Рассмотрим (α,h) и $-(\beta,f)$. Если $(\alpha,h)\underset{R}{\perp}(\beta,f)$, то $(\alpha,h)\underset{R}{\perp}(-\beta,-f)$ и так как теперь $\operatorname{sgn}\alpha = -\operatorname{sgn}\beta$, то в силу предыдущего пункта верно $x\circ(-y)=0$, значит, $x\circ y=0$, что и завершает доказательство. $\rhd$

Следствие. *Пусть $x,y\in A_+, x\neq 0, y\neq 0$. Тогда $x\circ y=0$ в том и только в том случае, когда $x\underset{R}{\perp}y=0$.*

4. Описание множеств положительных и отрицательных частей элемента

Дадим теперь явное описание множеств $|X|$, X_+, X_-, $M(x)$ для произвольного элемента $x=(\alpha,h)\in A$.

4.1. Пусть $x\in A_+$, т. е. $\alpha\geqslant\|h\|$. Если $y=(\gamma,f)$, то $\gamma-\alpha\geqslant\|f-h\|$, так как в рассматриваемом случае соотношения $y\geqslant\pm x$ и $y\geqslant x$ равносильны. Пусть при этом $\|y\|=\|x\|$, т. е. $\gamma+\|f\|=\alpha+\|h\|$ или $\gamma-\alpha=\|h\|-\|f\|$. Тогда $\|h\|-\|f\|\geqslant\|f-h\|\geqslant\|h\|-\|f\|$, откуда получаем $\|f-h\|=\|h\|-\|f\|$. Возведение в квадрат последнего равенства приводит к соотношению $(f,h)=\|h\|\|f\|$, которое влечет $f=\lambda h$, где $\lambda\geqslant 0$. Так как $\|h\|\geqslant\|f\|$, то $\|h\|\geqslant\lambda\|h\|$, стало быть, $\lambda\leqslant 1$. Тем самым $\gamma=\alpha+\|h\|(1-\lambda)$. Таким образом, элемент $y=(\alpha+\|h\|(1-\lambda),\lambda h)$, где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, обладает свойствами: $y\geqslant x$ и $\|y\|=\|x\|$. Следовательно, получаем формулы:

$$|X|=\{(\alpha+\|h\|(1-\lambda),\lambda h):\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\},$$

$$X_+=\left\{\left(\alpha+\frac{1-\lambda}{2}\|h\|,\frac{\lambda+1}{2}h\right):\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\right\},$$

$$X_-=\left\{\left(\frac{1-\lambda}{2}\|h\|,\frac{\lambda-1}{2}h\right):\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\right\},$$

$$M(x)=\{(\alpha,h)\}.$$

Отметим, что в этом случае $M(x)\subset X_+$ и $M(x)\cap X_+=M(x)$.

4.2. Пусть $x\in -A_+$, т. е. $x=(-\alpha,-h)$, где $(\alpha,h)\in A_+$, т. е. $\alpha\geqslant\|h\|$. Предположим, что $y\geqslant\pm x$ и $\|y\|=\|x\|$. Тогда $y\geqslant(\alpha,h)$ и согласно 4.1 будем иметь $y=(\alpha+\|h\|(1-\lambda),\lambda h)$, где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, стало быть, справедливы формулы:

$$|X|=\{(\alpha+\|h\|(1-\lambda),\lambda h):\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\},$$

$$X_+=\left\{\left(\frac{1-\lambda}{2}\|h\|,\frac{\lambda-1}{2}h\right):\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\right\},$$

$$X_-=\left\{\left(\alpha+\frac{1-\lambda}{2}\|h\|,\frac{\lambda+1}{2}h\right):\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\right\}.$$

В силу монотонности нормы на конусе, $M(x)$ содержит $(0,0)$ и, значит, $d(x,A_+)=\alpha+\|h\|$.

Пусть $(\gamma,f)\in M(x)$. Тогда $\gamma\geqslant\|f\|$ и $\|(\gamma,f)-(-\alpha,-h)\|=\|(\gamma,f)+(\alpha,h)\|=\alpha+\|h\|$, откуда $\gamma+\alpha+\|f+h\|=\alpha+\|h\|$. Используя те же соображения, что и в 4.1, выводим:

$$\|h\|-\|f\|\leqslant\|f+h\|=\|h\|-\gamma\leqslant\|h\|-\|f\|\Longrightarrow$$

$$\|f+h\|=\|h\|-\|f\|\Longrightarrow(f,h)=-\|h\|\|f\|\Longrightarrow f=-\beta h\ \ (\beta\geqslant 0).$$

Тем самым $\|f+h\| = |1-\beta|\|h\| = \|h\| - \beta\|h\| = \|h\|(1-\beta)$, значит, $\beta \leqslant 1$. Кроме того, $\gamma = \|f\| = \beta\|h\|$.

Итак, если $(\gamma, f) \in M(x)$, то $(\gamma, f) = (\beta\|h\|, -\beta h)$, где $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Стало быть,

$$M(x) = \{(\beta\|h\|, -\beta h) :\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1\}.$$

Как видно, $M(x) \supset X_+, M(x) \cap X_+ = X_+$.

4.3. Рассмотрим теперь основной случай, когда $x \notin \pm A_+$. Пусть $x = (\alpha, h)$ и $|\alpha| < \|h\|$. Предположим, что $(\gamma, f) \in A_+$ и $(\gamma, f) \geqslant \pm(\alpha, h)$, причем $\|(\gamma, f)\| = \|(\alpha, h)\|$, т. е. $\gamma + \|f\| = |\alpha| + \|h\|$. Тогда справедливы неравенства

$$\gamma - \alpha \geqslant \|f-h\| \geqslant \|h\| - \|f\|,$$

$$\gamma + \alpha \geqslant \|f+h\| \geqslant \|h\| - \|f\|.$$

Отсюда при $\alpha \geqslant 0$ получаем $\|h\| - \|f\| = \gamma - |\alpha| = \gamma - \alpha \geqslant \|f-h\| \geqslant \|h\| - \|f\|$, поэтому $\|f-h\| = \|h\| - \|f\|$ и, в частности, $\|h\| \geqslant \|f\|$. Вновь рассуждая как в 4.1, приходим к равенству $(f, h) = \|h\|\|f\|$, следовательно, $f = \lambda h$, $\lambda \geqslant 0$.

Поскольку $\gamma + \lambda\|h\| = |\alpha| + \|h\|$, то $\|h\| - \lambda\|h\| = (1-\lambda)\|h\| \geqslant 0$, стало быть, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $\gamma = (1-\lambda)\|h\| + \alpha$. Итак, $(\gamma, f) = ((1-\lambda)\|h\| + \alpha, \lambda h)$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, при $\alpha \geqslant 0$. При этом $\|(\gamma, f)\| = \|h\| + \alpha; (\gamma, f) \geqslant (\alpha, h)$. Из условия $(\gamma, f) \geqslant -(\alpha, h)$ вытекает $(1-\lambda)\|h\| + 2\alpha \geqslant (1+\lambda)\|h\|$, поэтому $\lambda \leqslant \alpha/\|h\|$.

Итак, при $\alpha \geqslant 0$ $(\gamma, f) = ((1-\lambda)\|h\| + \alpha, \lambda h)$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha/\|h\|$. Если $\alpha < 0$, то $\|h\| - \|f\| = \gamma + \alpha \geqslant \|f+h\| \geqslant \|h\| - \|f\|$, значит, $\|f+h\| = \|h\| - \|f\|$ и $(f, h) = -\|h\|\|f\|$, откуда $f = -\lambda h, \lambda \geqslant 0$. Тогда $\gamma + \alpha = \|h\| - \lambda\|h\| = (1-\lambda)\|h\| \geqslant 0$ и, стало быть, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\gamma = (1-\lambda)\|h\| - \alpha$. Кроме того, из неравенства $(\gamma, f) \geqslant (\alpha, h)$ вытекает $(1-\lambda)\|h\| - 2\alpha \geqslant (1+\lambda)\|h\|$, поэтому $\lambda \leqslant -\alpha/\|h\|$. Объединив оба случая $\alpha \geqslant 0$ и $\alpha < 0$, находим

$$|X| = \left\{(1-\lambda)\|h\| + |\alpha|, \lambda \operatorname{sgn} \alpha h) :\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{|\alpha|}{\|h\|}\right\}.$$

Выведем другую формулу для $|X|$. Поскольку множество $|X|$ выпукло и содержит элементы $(\|h\|, \alpha h/\|h\|)$ и $(|\alpha| + \|h\|, 0)$, то оно содержит и соединяющий их отрезок, т. е. множество

$$\left\{\mu\left(\|h\|, \frac{\alpha h}{\|h\|}\right) + (1-\mu)(|\alpha| + \|h\|, 0) :\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1\right\}$$
$$= \left\{\left(\|h\| + (1-\mu)|\alpha|, \frac{\mu\alpha h}{\|h\|}\right) :\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1\right\} =: |\overline{X}|.$$

Покажем, что $|X| = |\overline{X}|$. Включение $|\overline{X}| \subset |X|$ очевидно. Обратно, пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant |\alpha|/\|h\|$, $\alpha > 0$, и возьмем элемент $((1-\lambda)\|h\| + \alpha, \lambda h)$. Если положить $\mu := \lambda\|h\|/\alpha$, то $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ и

$$\left(\|h\| + (1-\mu)|\alpha|, \frac{\mu\alpha h}{\|h\|}\right) = (\alpha - \lambda\|h\| + \|h\|, \lambda\|h\|) = ((1-\lambda)\|h\| + \alpha, \lambda\|h\|).$$

Пусть $\alpha < 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant |\alpha|/\|h\|$ и положим $\mu := -\lambda\|h\|/\alpha$. Тогда $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ и

$$\left(\|h\| + (1-\mu)|\alpha|, \frac{\mu\alpha h}{\|h\|}\right) = (-(\alpha + \lambda\|h\|) + \|h\|, -\lambda h)$$
$$= ((1-\lambda)\|h\| - \alpha, -\lambda h) = ((1-\lambda)\|h\| + |\alpha|, \lambda \operatorname{sgn} \alpha h).$$

Наконец, если $\alpha = 0$, то получаем $(\|h\|, 0)$. Этот же элемент принадлежит $|\overline{X}|$ при $\alpha = 0$. Следовательно, требуемое равенство обосновано.

Соответствующие формулы для X_+ и X_- имеют вид:

$$X_+ = \frac{1}{2}\left\{\left((1-\mu)|\alpha| + \alpha + \|h\|, \frac{(\mu\alpha + \|h\|)h}{\|h\|}\right) :\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1\right\},$$

$$X_- = \frac{1}{2}\left\{\left((1-\mu)|\alpha| - \alpha + \|h\|, \frac{(\mu\alpha - \|h\|)h}{\|h\|}\right) :\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1\right\}.$$

Опишем теперь множество $\widetilde{M}(x) = \{Px : Px - x \in A_+\}$ для $x = (\alpha, h)$, $|\alpha| < \|h\|$. Пусть $(\beta, g) \in A_+$ удовлетворяет равенству $\|(\beta, g) - (\alpha, h)\| = d(x, A_+) = \|h\| - \alpha$. Тогда $|\beta - \alpha| + \|g - h\| = \|h\| - \alpha$ и $\beta - \alpha \geqslant \|g - h\|$, поэтому $\|g - h\| = \|h\| - \beta$ и $\beta \leqslant \|h\|$. Возведение в квадрат последнего равенства дает $\|g\|^2 - 2(g, h) = \beta^2 - 2\beta\|h\|$, где $\|g\| \leqslant \beta \leqslant \|h\|$. Так как $\min\{\beta^2 - 2\beta\|h\| : \|g\| \leqslant \beta \leqslant \|h\|\}$ достигается при $\beta = \|h\|$, то $\max\{\beta^2 - 2\beta\|h\| : \|g\| \leqslant \beta \leqslant \|h\|\} = \|g\|^2 - 2\|g\|\|h\|$, следовательно,

$$\|g\|^2 - 2(g, h) \leqslant \|g\|^2 - 2\|g\|\|h\| \Longrightarrow \|g\|\|h\| \geqslant (g, h) \geqslant \|g\|\|h\| \Longrightarrow$$

$$(g, h) = \|g\|\|h\| \Longrightarrow g = \lambda h, \lambda \geqslant 0.$$

Кроме того, $\|g\| = \lambda\|h\| \leqslant \|h\|$, значит $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Отсюда $\beta = \|h\| - \|g - h\| = \|h\| - (1-\lambda)\|h\| = \lambda\|h\|$, стало быть, $(\beta, g) = (\lambda\|h\|, \lambda h)$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Но с другой стороны $\beta - \alpha \geqslant \|\lambda h - h\| = (1-\lambda)\|h\|$, а как как $\beta = \lambda\|h\|$, то получаем $\lambda \geqslant \frac{\alpha + \|h\|}{2\|h\|}$. Итак, имеет место представление

$$M(x) = \left\{(\lambda\|h\|, \lambda h) :\ \frac{\alpha + \|h\|}{2\|h\|} \leqslant \lambda \leqslant 1\right\}. \tag{4.2}$$

Действительно, $(\lambda\|h\|, \lambda h) \in A_+$. Кроме того, $(\lambda\|h\|, \lambda h) - (\alpha, h) = (\lambda\|h\| - \alpha, (\lambda - 1)h)$ и $\|(\lambda\|h\| - \alpha, (\lambda-1)h) = |\lambda\|h\| - \alpha| + (1-\lambda)\|h\|$. Так как $\lambda \geqslant \frac{\alpha + \|h\|}{2\|h\|}$, то $\lambda\|h\| - \alpha \geqslant \frac{\alpha + \|h\|}{2} - \alpha = \frac{\|h\| - \alpha}{2}$, то $|\lambda\|h\| - \alpha| + (1-\lambda)\|h\| = \lambda\|h\| - \alpha + \|h\| - \lambda\|h\| = \|h\| - \alpha = d(x, A_+)$, т. е. формула (4.2) справедлива.

Найдем множество $X_+ \cap M(x)$. Пусть $\frac{\alpha + \|h\|}{2\|h\|} \leqslant \lambda \leqslant 1$. Подберем $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ так, чтобы

$$\frac{(1-\mu)|\alpha| + \|h\| + \alpha}{2} = \lambda\|h\|; \quad \frac{(\mu\alpha + \|h\|)h}{2\|h\|} = \lambda h.$$

Из второго равенства при $\alpha \neq 0$ выводим $\mu = \|h\|(2\lambda - 1)/\alpha$. Из первого равенства получаем $(1-\mu)|\alpha| = (2\lambda - 1)\|h\| - \alpha$. Если $\alpha > 0$, то отсюда выводим $\mu = (2\alpha - (2\lambda - 1))\|h\|/\alpha$. Приравняв оба найденных для μ выражения, получим $(2\lambda - 1)\|h\|/\alpha = 1$, откуда $\lambda = \frac{\alpha + \|h\|}{2\|h\|}$.

Таким образом, $\mu = 1$ и элемент x_+, на котором достигается расстояние от x до A_+, имеет вид

$$x_+ = \left(\frac{\|h\| + \alpha}{2}, \frac{(\alpha + \|h\|)h}{2\|h\|}\right).$$

Пусть $\alpha < 0$. Тогда $\mu = \frac{(2\lambda - 1)\|h\|}{\alpha}$. При этом, при $\alpha < 0$ имеем $\frac{\|h\| + \alpha}{2\|h\|} < \frac{\|h\|}{2\|h\|} = \frac{1}{2}$. Так как $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, то $\frac{\|h\| + \alpha}{2\|h\|} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, при $\alpha < 0$ множество $X_+ \cap M(x)$ имеет вид:

$$X_+ \cap M(x) = \left\{(\lambda\|h\|, \lambda h) :\ \frac{\alpha + \|h\|}{2\|h\|} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Если $\alpha = 0$, то $X_+ = \{(\|h\|/2, h/2)\}$ и

$$M(x) = \big\{(\lambda\|h\|, \lambda h) : 1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1\big\}, \quad X_+ \cap M(x) = X_+.$$

Таким образом, множества $|X|$, X_+, X_-, $M(x)$ описаны для всех $x \in A$.

Отметим, что для каждого $x \in A$ множество $X_+ \cap M(x)$ не пусто. Для $x \in A_+$ и $x \notin \pm A_+$, $x = (\alpha, h)$, $\alpha \geqslant 0$ множество $X_+ \cap M(x)$ состоит из одного элемента, в остальных случаях представляет собой линейный сегмент.

Своим интересом к порядковым свойствам абстрактного спин-фактора авторы обязаны А. Г. Кусраеву, которому они выражают благодарность за внимание к работе и полезные советы.

Литература

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин.: Изд-во КГУ, 1977.—84 с.
2. *Вулих Б. З.* Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах.—Калинин.: Изд-во КГУ, 1978.—84 с.
3. *Кусраев А. Г.* О структуре AJW-алгебр тпиа I_2 // Сиб. мат. журн.—1999.—Т. 40, № 4.—С. 905–917.
4. *Худалов В. Т.* Упорядоченные банаховы пространства и их приложения.—Владикавказ: Иристон, 1999.—200 с.
5. *Ajupov Sh. A., Usmanov Sh. M., Rakhimov A. A.* Jordan real and Li structures in operator algebras.—Dordrecht: Kluwer, 2001.—225 p.
6. *Alfsen E. M., Shultz F. W., Störmer E.* A Gelfand–Neumark theorem for Jordan algebras // Adv. Math.—1978.—V. 28, №. 1.—P.11–56.
7. *Topping D. M.* Jordan algebras of self-adjoint operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1965.—V. 53.–48 p.

Статья поступила 16 января 2004 г.

Коробова Карина Валерьевна
г. Владикавказ, Владикавказский институт управления
E-mail: g_k_v@mail.ru

Худалов Владимир Темирсолтанович, к. ф.-м. н.
г. Москва, Московский автодорожный институт —
Государственный технический университет;
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН