Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2003, Том 5, Выпуск 1

УДК **517.98**

РАЗЛОЖЕНИЕ АТОМИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

С. Н. Табуев

Доказана теорема о разложении атомического оператора по специальному базису из решеточных гомоморфизмов. Показано, что такое разложение в определенном смысле единственно.

1. Предварительные сведения

В этом параграфе приведены обозначения и сведения из теории векторных решеток, необходимые для дальнейшего изложения.

1.1. Всюду ниже E — векторная решетка, F — порядково полная векторная решетка. Полосу всех порядково ограниченных линейных операторов из E в F обозначим через $L^{\sim}(E,F)$. Пусть $L_a^{\sim}(E,F)$ полоса в $L^{\sim}(E,F)$, порожденная множеством решеточных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(E,F)$. Напомним, что оператор $T \in L^{\sim}(E,F)$ называют *атомическим*, если он попадает в полосу $L_a^{\sim}(E,F)$.

Линейный оператор σ из идеала G векторной решетки F в F назовем *ортоморфизмом*, если он порядково ограничен и сохраняет полосы, т. е. $\sigma(K \cap G) \subseteq K$ для любой полосы K из F. Через $\mathrm{Orth}(G,F)$ обозначим множество всех ортоморфизмов из G в F.

Если $\mathrm{Orth}(T,F) := \mathrm{Orth}(G,F)$, *где* G *— порядковый идеал в* F, *порожденный* $T(E)$, *то для произвольного решеточного гомоморфизма* T *имеет место* $\{T\}^{\perp\perp} = \mathrm{Orth}(T,F) \circ T$.

◁ Это утверждение является следствием теоремы Кутателадзе (см. [2; 3.3.4, 3.3.5 (4)]). ▷

1.2. Множество $\mathfrak{P}(F)$ всех порядковых проекторов, упорядоченное правилом $\pi \leqslant \rho \iff \pi \circ \rho = \pi$, является булевой алгеброй (см. [3; 1.3.5]).

Пусть B — булева алгебра. Подмножество $E \subset B$ минорирует подмножество $B_0 \subset B$, если для каждого $0 < b \in B_0$ существует $x \in E$ такой, что $0 < x \leqslant b$. Будем называть E минорантным для B_0.

Если E *минорантно в* B, *то всякий ненулевой элемент* B *является супремумом некоторого дизъюнктного подмножества* E.

◁ Доказательство данного утверждения, известного как «принцип исчерпывания», можно найти в [4]. ▷

1.3. Множество попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов $\mathcal{H}$ из E в F назовем *строго порождающим*, если $\mathcal{H}^{\perp\perp} = L_a^{\sim}(E,F)$ и $\mathrm{im}(S)^{\perp\perp} = F$ при всех $S \in \mathcal{H}$.

Лемма. *Пусть* E *и* F *— векторные решетки, причем* F *— расширенное* K*-пространство и* $F = (\cup\{T(E) : T \in \mathrm{Hom}(E,F)\})^{\perp\perp}$. *Для любого ненулевого проектора* π *в* F *существует подпроектор* $0 \neq \rho \leqslant \pi$ *такой, что в* $L_a^{\sim}(E,\pi F)$ *имеется строго порождающее множество решеточных гомоморфизмов.*

$\triangleleft$ Пусть $T \in \mathrm{Hom}(E, \pi F)$ и пусть $T(E)^{\perp\perp} = F_1 \subset \pi F$. Обозначим через $\mathcal{T}$ максимальное множество попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов из E в F_1 таких, что $T(E)^{\perp\perp} = F_1 \neq \{0\}$. Рассмотрим множество $\mathcal{L} := \mathcal{T}^{\perp} \cap L_a^{\sim}(E, F_1)$. Если $\mathcal{L} = \{0\}$, то $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию леммы. Пусть $\mathcal{L} \neq \{0\}$, т. е. существуют решеточные гомоморфизмы $S \in \mathrm{Hom}(E, F_1)$ такие, что $S \in \mathcal{T}^{\perp}$, причем из максимальности $\mathcal{T}$ следует, что $S(E)^{\perp\perp} \neq F_1$. Обозначим множество всех подобных гомоморфизмов через $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L} \cap \mathrm{Hom}(E, F_1)$.

Из максимальности $\mathcal{T}$ следует, что существует $F_2 \subset F_1$ такой, что $\mathcal{L}_0 \cap \mathrm{Hom}(E, F_2) = \{0\}$. Обозначим через $F_0 := F_1 \cap F_2^{\perp}$. Ясно, что $F_0 \neq \{0\}$. Тогда существует разбиение $\{\rho_\xi\}$ единицы I_{F_0} такое, что для любого ξ существует решеточный гомоморфизм $S_\xi \in \mathcal{L}_0$ и $S_\xi(E)^{\perp\perp} = \rho_\xi(F_0)$. Но тогда существует оператор S такой, что $Se = \sum \rho_\xi S_\xi e$ (для $e \in E_+$), причем $S \in \mathcal{L}_0$ и $S(E)^{\perp\perp} = F_0$, что противоречит максимальности $\mathcal{T}$. $\triangleright$

Непосредственно из приведенного доказательства следует утверждение.

Строго порождающее множество в $L_a^{\sim}(E, F)$ существует тогда и только тогда, когда в нем существует хотя бы один оператор S такой, что $\mathrm{im}(S)^{\perp\perp} = F$.

2. Разложение атомического оператора

2.1. Проектор $\pi \in \mathfrak{P}(F)$ назовем (γ, E)-*однородным*, если в $L_a^{\sim}(E, \pi F)$ существует строго порождающее множество $\mathcal{H}_a$ такое, что $\mathrm{card}(\mathcal{H}_a) = \gamma$ и, кроме того, для каждого ненулевого проектора $\rho \leqslant \pi$ и для любого строго порождающего множества $\mathcal{H}$ попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов из E в ρF выполняется $\mathrm{card}(\mathcal{H}) \geqslant \gamma$.

Строго порождающее множество $\mathcal{H}_a$ удовлетворяющее сформулированным выше условиям назовем *атомическим базисом* в $L_a^{\sim}(E, \pi F)$.

Если π — ненулевой проектор со строго порождающим множеством, то существует (γ, E)-однородный проектор ρ такой, что $0 \neq \rho \leqslant \pi$.

$\triangleleft$ Рассмотрим множество ненулевых подпроекторов проектора π. Поставим в соответствие каждому из таких проекторов ρ кардинал γ — наименьший из кардиналов строго порождающих множеств в $L_a^{\sim}(E, \rho F)$. Прообраз относительно отображения $\pi \mapsto \gamma(\pi)$ наименьшего из этих кардиналов и будет требуемым проектором. $\triangleright$

2.2. *Теорема.* *Пусть E и F — векторные решетки, причем F — порядково полна и расширена. Тогда существует множество кардиналов Γ и для каждого кардинала $\gamma \in \Gamma$ существуют проектор $\pi_\gamma \in \mathfrak{P}(F)$ и семейство попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов $(\Phi_{\gamma,\alpha})_{\alpha \leqslant \gamma}$ из E в F такие, что справедливы следующие утверждения:*

(1) *$(\pi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ представляет собой разбиение единицы в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$, причем $\pi_\gamma \neq 0$ при всех $\gamma \in \Gamma$;*

(2) *π_γ является (γ, E)-однородным проектором;*

(3) *$(\mathrm{im}\, \Phi_{\gamma,\alpha})^{\perp\perp} = \pi_\gamma(F) \quad (\gamma \in \Gamma, \alpha < \gamma)$;*

(4) *каждый оператор $T \in L^{\sim}(E, F)$ допускает единственное представление в виде:*

$$T = T_0 + o\text{-}\sum_{\gamma \in \Gamma} o\text{-}\sum_{\alpha < \gamma} \sigma_{\gamma,\alpha} \circ \Phi_{\gamma,\alpha},$$

где $T_0 \in L_d^{\sim}(E, F)$ и $\sigma_{\gamma,\alpha} \in \mathrm{Orth}(\Phi_{\gamma,\alpha}, \pi_\gamma(F))$.

$\lhd$ Для доказательства существования разбиения единицы π_γ воспользуемся «принципом исчерпывания». Согласно 1.3 в любом проекторе π содержится подпроектор ρ такой, что $\rho \leqslant \pi$ и в $L_a^\sim(E, \rho F)$ есть строго порождающее множество. Ввиду 2.1 в проекторе ρ с указанным выше свойством содержится хотя бы один (γ, E)-однородный проектор ρ_γ. Следовательно, множество (γ, E)-однородных проекторов в $\mathfrak{P}(F)$ минорантно.

Определим функцию $\phi : \mathfrak{P}(F) \to \Gamma$ следующим образом. Если $\rho \in \mathfrak{P}(F)$ — (γ, E)-однородный проектор, то $\phi(\rho) = \gamma$.

Если же проектор ρ не (γ, E)-однороден, то ввиду минорантности множества (γ, E)-однородных проекторов его можно представить в виде супремума (γ, E)-однородных проекторов. И в этом случае $\phi(\gamma)$ равно супремуму кардиналов однородных компонент.

Для доказательства корректности этого определения необходимо доказать, что супремум π_γ (γ, E)-однородных проекторов $(\rho_\gamma^\xi)_{\xi\in\Xi}$ также (γ, E)-однороден. Для этого достаточно доказать, что в π_γ существует строго порождающее множество мощности γ.

Пусть $\Phi_{\alpha\leqslant\gamma}^\xi$ — атомический базис в $L_a^\sim(E, \rho_\xi F)$, тогда $\Phi_{\alpha\leqslant\gamma} = \sum_{\xi\in\Xi} \Phi_{\alpha\leqslant\gamma}^\xi$ будет атомическим базисом в $L_a^\sim(E, \pi_\gamma F)$. В противном случае, в $L_a^\sim(E, \pi_\gamma F)$ существует оператор Ψ дизъюнктный ко всем базисным векторам. Однако из определения этого оператора следует, что его проекция $\rho_\xi\Psi$ на любую из (γ, E)-однородных компонент должна быть дизъюнктна к соответствующему атомическому базису. Это возможно только тогда, когда $\rho_\xi\Psi{=}0$. В силу произвольности ξ получаем, что $\Psi = 0$. Тем самым π_γ — (γ, E)-однородный проектор.

Согласно 1.2 в $\mathfrak{P}(F)$ существует разложение единицы на (γ, E)-однородные компоненты $(\pi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Операторы, требуемые в пунктах (3) и (4), будут в точности атомическими базисами соответствующих полос.

Не ограничивая общности, для простоты обозначений, докажем единственность разложения оператора T в одной из компонент с (γ, E)-однородным проектором. Пусть $\sigma_\alpha^1\Phi_\alpha$ и $\sigma_\alpha^2\Phi_\alpha$ — два разложения оператора T. Пусть эти разложения не совпадают в первом элементе. Тогда $S_1 = \sigma_1^1\Phi_1 - \sigma_1^2\Phi_1 \neq 0$. В то же время из того, что $\mathrm{im}(\Phi_\alpha)^{\perp\perp} = (\pi_\gamma F)$ следует, что S_1 дизъюнктен к остальным базисным элементам. Это противоречит тому, что разность двух разложений должна быть равна нулю. Таким образом наше разложение единственно. $\rhd$

Один атомический базис можно получить из другого путем перестановки и «перемешивания». Иначе, если мы имеем два базиса $(\Phi_\alpha)_{\alpha\leqslant\gamma}$ и $(\Psi_\alpha)_{\alpha\leqslant\gamma}$, то для каждого $\alpha \leqslant \gamma$ существует разбиение единицы $(\pi_{\alpha,\beta})_{\beta\leqslant\gamma}$ такое, что

$$\Psi_{\alpha,\gamma} = \sum_{\alpha\leqslant\gamma} \sigma_{\alpha,\beta}\pi_(\alpha,\beta)\Phi_\alpha,$$

где $\sigma_{\alpha,\beta} \in \mathrm{Orth}(\pi_{\alpha,\beta}\Phi_\alpha, \pi_{\alpha,\beta}(F))$.

$\lhd$ Рассмотрим разложение оператора Ψ_α по базису $(\Phi_\alpha)_{\alpha\leqslant\gamma}$. Из предыдущей теоремы имеем, что

$$\Psi_\alpha = o\text{-}\sum_{\alpha\leqslant\gamma} \sigma_\alpha \circ \Phi_\alpha.$$

В качестве $(\pi_{\alpha,\beta})_{\beta\leqslant\gamma}$ будем рассматривать проекторы на полосы, порождаемые образами $\sigma_\alpha \circ \Phi_\alpha$. Их дизъюнктность непосредственно вытекает из следствия к теореме

Кутателадзе о том, что два решеточных гомоморфизма, мажорируемые решеточным гомоморфизмом, дизъюнктны в том и только в том случае, когда дизъюнктны их образы. То, что π_γ — разбиение единицы следует из того, что $\mathrm{im}(\Psi_\alpha)^{\perp\perp} = F$. Теперь для $\pi_{\alpha,\beta}\Phi_\alpha$ и $\pi_{\alpha,\beta}\Psi_\alpha$ существует ортоморфизм $\sigma_{\alpha,\beta}$ такой, что

$$\pi_{\alpha,\beta}\Psi_\alpha = \sigma_{\alpha,\beta}\pi_{\alpha,\beta}\Phi_\alpha. \ \triangleright$$

Литература

1. *Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартный анализ и векторные решетки.— Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.—380 с.
2. *Кусраев А. Г.* Порядковый анализ 3. Положительные операторы: Учеб. пос.—Владикавказ: Изд-во Владикавказского научного центра, 2001.—111 с.
3. *Кусраев А. Г.* Порядковый анализ 1. Булевы алгебры. Векторные решетки: Учеб. пос.—Владикавказ: Изд-во Владикавказского научного центра, 2000.—87 с.
4. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—318 с.

г. Владикавказ *Статья поступила 15 февраля 2003 г.*