Владикавказский математический журнал
Июнь–сентябрь, 2001, Том 3, Выпуск 3

УДК **517.98**

О ВЕРХНИХ ОГИБАЮЩИХ СЕМЕЙСТВА n-ДИЗЪЮНКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. А. Раднаев

В этой статье устанавливается характеризация сублинейных операторов, являющихся верхними огибающими семейства n-дизъюнктных операторов, дается описание возникающих субдифференциалов и их крайних точек.

1. Введение

На протяжении всей статьи, если не оговорено особо, X и E — векторные решетки над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, причем E порядково полна (K-пространство). Рассматриваемые отображения действуют из X в E.

1. Определение. Линейный оператор $T : X \to E$ называется *n-дизъюнктным*, если T является порядково ограниченным и для любых попарно дизъюнктных элементов $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$ выполнено соотношение

$$\bigwedge_{i=0}^{n} |T(x_i)| = 0.$$

В настоящей статье изучаются сублинейные операторы, представимые в виде верхних огибающих семейства положительных n-дизъюнктных операторов. Устанавливается, что данный класс сублинейных операторов содержит в себе суммы n сублинейных операторов, сохраняющих конечные верхние границы, причем это включение строгое. Отметим, что для линейных операторов эти классы совпадают: известно, что положительные n-дизъюнктные операторы, действующие в порядково полные векторные решетки, сводятся к суммам n попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов (см. [1–2]).

При исследовании этого класса сублинейных операторов важную роль играют вопросы геометрического строения возникающих субдифференциалов. Здесь возникают задачи внутренней характеризации субдифференциала и описания множества его крайних точек. Стоит подчеркнуть, что эти задачи были решены первоначально для канонического оператора (= операции взятия точной верхней границы у порядково ограниченной функции) (см. [3, 2.2.9]), затем для операторов, сохраняющих конечные верхние границы (см. [3, 2.5.7, 2.5.8]).

2. Вспомогательные сведения

Перед тем как приступить к подробному изложению, напомним некоторые сведения об основных объектах, рассматриваемых в данной работе. Мы будем следовать общепринятым обозначениям и терминологии согласно [3–5].

Известно, что регулярные (= порядково ограниченные) операторы, действующие из X в E, образуют K-пространство $L_r(X,E)$ регулярных операторов с положительным конусом, который обозначается символом $L^+(X,E)$.

Субдифференциалом (в нуле) ∂P сублинейного оператора P, называется множество

$$\partial P := \{T \in L(X,E) : (\forall x \in X) Tx \leqslant P(x)\},$$

где $L(X,E)$ — пространство линейных операторов из X в E.

Символом $\mathrm{Ch}(P)$ обозначается совокупность всех крайних (или экстремальных) точек субдифференциала ∂P. Через $\mathrm{Orth}(E)$ обозначаем *кольцо ортоморфизмов на E с единицей I_E.*

2. ***Теорема*** [3, 2.2.7]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор $S \in \mathrm{Ch}(P)$;*

(2) *если для операторов $S_1, \dots, S_n \in \partial P$ и ортоморфизмов $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, I_E]$ выполняются соотношения $\sum_{k=1}^n \alpha_k = I_E$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k \circ S_k = S$, то $\alpha_k \circ S = \alpha_k \circ S_k$ для каждого $k = 1, \dots, n$.*

Для произвольного непустого множество Q обозначим символом $l_\infty(Q,E)$ совокупность всех (порядково) ограниченных отображений из Q в E. Несложно проверить, что $l_\infty(Q,E)$ является K-пространством при наделении покоординатными алгебраическими операциями и упорядочением. Оператор ε_Q из $l_\infty(Q,E)$ в E, действующий по правилу:

$$\varepsilon_Q : f \mapsto \sup\{f(\alpha) : \alpha \in Q\} \quad (f \in l_\infty(Q,E)),$$

называют *каноническим оператором.* Символ ε_n используют, когда мощность множества Q равна n. Сам оператор ε_n при этом называют *конечнопорожденным.*

Сублинейный оператор P называют *возрастающим*, если для любых $x, y \in X$ из $x \leqslant y$ следует, что $P(x) \leqslant P(y)$.

Заметим, что для конечнопорожденного оператора ε_n формулу [3, 2.1.5(1)] можно уточнить:

3. ***Предложение.*** *Пусть P — возрастающий сублинейный оператор. Тогда*

$$\partial(P \circ \varepsilon_n) = \{S \in L^+(X^n, E) : (\forall x \in X)\ S(x, x, \dots, x) \leqslant P(x)\}.$$

4. *Предложение* [3, 2.1.8 (1)]. *Пусть $P_1, \dots, P_n$ — сублинейные операторы. Тогда справедливо представление:*

$$\partial\left(\bigvee_{i=0}^{n} P_i\right) = \bigcup\left\{\alpha_0 \circ \partial P_0 + \dots + \alpha_n \circ \partial P_n : \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}^+(E),\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = I_E\right\}.$$

5. *Теорема* [2, 3.6]. *Для оператора $T \in L_r(X, E)$ следующие утверждения равносильны:*

(1) *оператор T является n-дизъюнктным;*

(2) *для любых попарно дизъюнктных операторов $T_0, T_1, \dots, T_n \in L^+(X, E)$ таких, что $\sum_{i=0}^{n} T_1 = |T|$ найдутся ортоморфизмы $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}^+(E)$ такие, что $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = I_E$ и для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ выполнено $\alpha_i T_i = 0$.*

Всюду ниже, имея некоторый набор элементов $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, условимся считать, что $x_{-1} := x_n$, $x_{n+1} := x_0$.

Следующее утверждение представляет собой эквивалентную формулировку определения положительного n-дизъюнктного оператора.

6. *Теорема* [2, 3.4]. *Пусть X, E — векторные решетки, $T \in L^+(X, E)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор T является n-дизъюнктным;*

(2) *для всех $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$ выполняется*

$$T\left(\bigvee_{i=0}^{n} x_i\right) = \bigvee_{i=0}^{n} T(x_0 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n).$$

3. Сублинейные операторы, сохраняющие n-супремумы

Напомним, что множество $\mathcal{A} \subseteq L_r(X, E)$ называется *слабо порядково ограниченным*, если для каждого $x \in X$ множество $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ порядково ограничено в E.

7. Замечание. Несложно проверить, что свойство (2) для линейного оператора в теореме 6 выполняется и для более широких классов отображений, чем класс положительных n-дизъюнктных операторов: для любого слабо порядково ограниченного семейства положительных n-дизъюнктных операторов $(T_\xi)_{\xi \in \Xi}$ из X в E их верхняя огибающая P, действующая по формуле

$P(x) = \sup\{T_\xi(x) : \xi \in \Xi\}$ $(x \in X)$, является сублинейным оператором, удовлетворяющим равенству

$$P\left(\bigvee_{i=0}^{n} x_i\right) = \bigvee_{i=0}^{n} P(x_0 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n) \qquad (*)$$

для всех $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$. Мотивируясь этим наблюдением, введем следующий класс сублинейных операторов.

8. Определение. Пусть $P : X \to E$ — сублинейный оператор из X в E. Будем говорить, что P *сохраняет n-супремумы*, если P удовлетворяет условию $(*)$. В случае $n = 1$ говорят, что P сохраняет конечные верхние границы. Как мы установим позже, указанное свойство является характеристическим для изучаемого класса сублинейных операторов, представимых в виде верхних огибающих семейства положительных n-дизъюнктных операторов.

Изучим подробнее свойства введенного класса операторов.

9. ***Предложение.*** **(1)** *Пусть $P : X \to E$ — сублинейный оператор, сохраняющий n-супремумы. Тогда его субдифференциал ∂P состоит из положительных операторов.*

(2) *Пусть $P_i : X \to E$ $(i = 1, \dots, n)$ сублинейные операторы, сохраняющие конечные верхние грани. Тогда их сумма $P = \sum_{i=0}^{n} P_i$ является сублинейным оператором, сохраняющим n-супремумы.*

$\lhd$ (1) Пусть $x, y \in X$, $x \leqslant y$. Тогда из рассмотрения семейства $\{x_0, \dots, x_n\}$, где $x_0 := y$, а для каждого $i = 1, \dots, n$ $x_i := x$ вытекает, что $P(x) \leqslant P(y)$. Требуемое теперь вытекает из [3, 2.1.2].

(2) Возьмем элементы $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$. Тогда

$$\begin{aligned} P(x_0 \vee \dots \vee x_n) &= P_1(x_0 \vee \dots \vee x_n) + \dots + P_n(x_0 \vee \dots \vee x_n) \\ &= P_1(x_0) \vee \dots \vee P_1(x_n) + \dots + P_n(x_0) \vee \dots \vee P_n(x_n) \\ &= \sup\{P_1(x_{i_1}) + \dots + P_n(x_{i_n}) : i_1, \dots, i_n \in \{0, 1, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

Заметим, что в каждом наборе $\{i_1, \dots, i_n\}$ отсутствует по крайней мере один элемент из множества $\{0, 1, \dots, n\}$. Поэтому, упорядочив взятие супремумов, получим:

$$P(x_0 \vee x_1 \vee \dots \vee x_n) = \bigvee_{i=0}^{n} \sup\Big\{P_1(x_{i_1}) + \dots + P_n(x_{i_n}) :$$

$$i_1, \dots, i_n \in \{0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}\Big\}$$

$$= \bigvee_{i=0}^{n} \Big(P_1(x_0 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n) + \dots + P_n(x_0 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n)\Big)$$

$$= \bigvee_{i=0}^{n} P(x_0 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n),$$

что и требовалось доказать. $\triangleright$

Покажем, что предложение 9 (2) нельзя обратить. Более того, для каждой векторной решетки E найдется E-значный сублинейный оператор, сохраняющий 2-супремумы, но не являющийся суммой двух сублинейных операторов, сохраняющих конечные верхние грани.

10. Пример. Пусть E — произвольная векторная решетка, p — отображение из $E \times E$ в E, действующее по правилу

$$p(x, y) = (x + y)^+ \quad \big((x, y) \in E \times E\big).$$

Тогда p является сублинейным оператором, сохраняющим 2-супремумы. Проверим, например, последнее свойство. Возьмем произвольные элементы $e_0 = (x_0, y_0)$, $e_1 = (x_1, y_1)$, $e_2 = (x_2, y_2)$ из $E \times E$. Тогда

$$p(e_0 \vee e_1 \vee e_2) = (x_0 \vee x_1 \vee x_2 + y_0 \vee y_1 \vee y_2)^+ = \bigvee_{i,j=0}^{2} (x_i + y_j)^+.$$

С другой стороны,

$$p(e_0 \vee e_1) \vee p(e_0 \vee e_2) \vee p(e_1 \vee e_2)$$

$$= (x_0 \vee x_1 + y_0 \vee y_1)^+ \vee (x_0 \vee x_2 + y_0 \vee y_2)^+ \vee (x_1 \vee x_2 + y_1 \vee y_2)^+ = \bigvee_{i,j=0}^{2} (x_i + y_j)^+.$$

Таким образом, $p(e_0 \vee e_1 \vee e_2) = p(e_0 \vee e_1) \vee p(e_0 \vee e_2) \vee p(e_1 \vee e_2)$, т. е. p сохраняет 2-супремумы.

Покажем, что p не разлагается в сумму двух сублинейных операторов, сохраняющих конечные верхние грани. Предположим обратное: пусть $p = p_1 + p_2$, где p_1, p_2 — сублинейные операторы с упомянутым свойством. Зафиксируем $i \in \{1, 2\}$. Сначала проверим, что $p_i \geqslant 0$. Заметим, что в силу неравенства $p_i(x, y) \geqslant p_i(x \wedge y, x \wedge y)$ $((x, y) \in E \times E)$, достаточно проверить, что $p_i(x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$.

Действительно, из соотношений:

$$p_1(x, x) + p_2(x, x) = 2x^+,$$
$$p_1(x^+, x^+) + p_2(x^+, x^+) = 2x^+,$$
$$p_i(x, x) \leqslant p_i(x^+, x^+)$$

следует, что $p_i(x^+, x^+) = p_i(x, x)$ $(i = 1, 2)$. А так как $p_i(x^+, x^+) = (p_i(x, x))^+$, то $p_i(x, x) \geqslant 0$. Итак, $p_i(x, y) \geqslant 0$ для всех $(x, y) \in E \times E$.

Теперь из уравнений

$$(x+y)^+ = p_1(x,y) + p_2(x,y),$$

$$(x+y)^- = p_1(-x,-y) + p_2(-x,-y)$$

вытекает, что $p_i(x,y) \wedge p_i(-x,-y) = 0$ $((x,y) \in E \times E)$. Следовательно, $|x+y| = (x+y)^+ + (x+y)^- = p_1(x,y) \vee p_1(-x,-y) + p_2(x,y) \vee p_2(-x,-y) = p_1(|x|,|y|) + p_2(|x|,|y|) = |x| + |y|$.

Ясно, что полученное соотношение $|x+y| = |x|+|y|$ не выполняется для всех $x, y \in E$. Противоречие. Следовательно, p нельзя представить в виде суммы двух сублинейных операторов, сохраняющих конечные верхние границы.

Более глубокие взаимосвязи между сублинейными операторами, сохраняющими n-супремумы, и положительными n-дизъюнктными операторами раскрываются при изучении геометрии возникающих субдифференциалов.

4. Строение субдифференциала

Сформулируем характеризацию сублинейного оператора, сохраняющего n-супремумы, в терминах его субдифференциала.

11. *Теорема.* *Для возрастающего сублинейного оператора $P : X \to E$ следующие утверждения равносильны:*

(1) *P сохраняет n-супремумы;*

(2) *для каждого набора $t = (T_0, T_1, \dots, T_n)$, где $T_i \in L^+(X,E)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, $\sum_{i=0}^n T_i \in \partial P$ существует набор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ элементов $\mathrm{Orth}^+(E)$, для которых $\sum_{j=0}^n \alpha_j = I_E$ и найдется матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & T_1^0 & \dots & T_i^0 & \dots & T_n^0 \\ T_0^1 & 0 & \dots & T_i^1 & \dots & T_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ T_0^j & T_1^j & \dots & 0 & \dots & T_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0^n & T_1^n & \dots & T_i^n & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $T_i^j \in L^+(X,E)$, $T_i^j = 0$ $(i = 0, 1, \dots, n;\ j = 0, 1, \dots, n)$, и сумма элементов каждой строки матрицы A лежит в субдифференциале ∂P, такая, что справедливо равенство $\alpha \circ A = t$, т. е. $\sum_{j=0}^n \alpha_j T_i^j = T_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$.

$\lhd$ Определим следующие отображения из X^{n+1} в E:

$$P(x_0, x_1, \dots, x_n) = P\left(\bigvee_{i=0}^n x_i\right),$$

$$P_i(x_0, x_1, \dots, x_n) := P(x_0 \vee x_1 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n),$$

где $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X^{n+1}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тогда функции $P : X^{n+1} \to E$, $P_i : X^{n+1} \to E$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ являются сублинейными операторами, для которых выполнено соотношение $P = \bigvee_{i=0}^{n} P_i$, что равносильно равенству соответствующих субдифференциалов, т. е. $\partial P = \partial(\bigvee_{i=0}^{n} P_i)$. Пусть ε_{n+1} — конечнопорожденный канонический оператор из X^{n+1} в X. Воспользовавшись формулой из предложения 3, выводим

$$\partial P = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \to T_0 x_0 + T_1 x_1 + \cdots + T_n x_n \\ : T_i \in L^+(X, E)(i = 0, 1, \ldots, n), \quad \sum_{i=0}^{n} T_i \in \partial P\}.$$

Аналогично, для каждого $i = 0, 1, \ldots, n$ справедливо соотношение

$$\partial P_i = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \to \Theta_0^j x_0 + \cdots + \Theta_{j-1}^i x_{i-1} + \Theta_{j+1}^i x_{i+1} + \cdots + \Theta_n^i x_n : \\ \Theta_j^i \in L^+(X, E) \ (j = 0, 1, \ldots, n, j \neq i) \ \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \Theta_j^i \in \partial P\}.$$

Наконец, вычисляя субдифференциал $\partial(\bigvee_{i=0}^{n} P_i)$ согласно предложению 4 и сравнивая с ∂P, получим требуемый результат. $\rhd$

Нижеследующая теорема является ключевой для понимания взаимосвязей между сублинейными операторами, сохраняющими n-супремумы и их линейными аналогами — n-дизъюнктными операторами.

12. *Теорема.* *Крайние точки субдифференциала сублинейного оператора, сохраняющего n-супремумы, являются n-дизъюнктными операторами.*

$\lhd$ Пусть $T \in \mathrm{Ch}(P)$. Для того, чтобы установить требуемое, воспользуемся критерием 6 n-дизъюнктного оператора. Для этого возьмем операторы $T_0, T_1, \ldots, T_n \in L^+(X, E)$ такие, что $T_i \perp T_j$ $(i \neq j)$, $\sum_{i=0}^{n} T_i = T$. В силу теоремы 11 найдется семейство операторов $\{T_i^j \in L^+(X, E) : i = 0, 1, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, n\}$ и набор ортоморфизмов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{Orth}^+(E)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $T_i^j = 0$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$;

(2) $\sum_{i=0}^{n} T_i^j \in \partial P$ для каждого $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$;

(3) $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = I_E$;

(4) $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j T_i^j = T_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$.

Для каждого $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ обозначим $S_j := \sum_{i=0}^{n} T_i^j$. Согласно условию (2) выполнено $S_j \in \partial P$. Кроме того, суммируя по $i = 0, \ldots, n$ в соотношении (4), получим равенство $T = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j T_i^j = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j S_j$. Зафиксируем $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. В силу теоремы 2 выполнено равенство $\alpha_j S_j = \alpha_j T$. Отсюда с учетом (4) из дизъюнктности семейства $\{T_i : i = 0, \ldots, n\}$ вытекает, что для каждого $i = 0, \dots, n$, $i \neq j$ выполняется соотношение $\alpha_j T_i^j \perp T_j$. Теперь, суммируя по i, получаем, что выполнено $\alpha_j S_j \perp T_j$. Но поскольку $\alpha_j S_j = \alpha_j T$, то из неравенств $0 \leqslant \alpha_j T_j \leqslant \alpha_j T$ и $0 \leqslant \alpha_j T_j \leqslant T_j$ выводим $0 \leqslant \alpha_j T_j \leqslant \alpha_j T \wedge T_j = 0$, т. е. $\alpha_j T_j = 0$. В силу произвольности j, привлекая теорему 5, получим, что T является n-дизъюнктным оператором. $\rhd$

Отметим, что в случае, когда $n = 1$ и E — расширенное K-пространство, теоремы 11 и 12 были ранее получены С. С. Кутателадзе (см. например, [3, 2.5.7, 2.5.8]).

5. Основной результат

Теперь установим основной результат — характеризации сублинейных операторов, представимых в виде верхних огибающих семейства положительных n-дизъюнктных операторов.

13. *Теорема.* *Для сублинейного оператора P следующие утверждения равносильны:*

(1) *P представим в виде верхней огибающей семейства положительных n-дизъюнктных операторов;*

(2) *P является оператором, сохраняющим n-супремумы;*

(3) *P допускает представление в виде суперпозиции сублинейного оператора, сохраняющего конечные верхние границы, и n-дизъюнктного оператора.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2). Согласно теореме Крейна — Мильмана для субдифференциалов (см. [3, 2.2.2]) для всех $x \in X$ выполнено соотношение $P(x) = \sup\{T(x) : T \in \mathrm{Ch}(P)\}$. Возьмем произвольные элементы $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$. Из теоремы 12 вытекает, что операторы $\mathrm{T} \in \mathrm{Ch}(P)$ являются n-дизъюнктными, а, значит, сохраняют n-супремумы (теорема 6). Отсюда легко выводим требуемое.

(2) $\Rightarrow$ (1). Очевидно в силу существования представления $P(x) = \sup\{T(x) : T \in \mathrm{Ch}(P)\}$ $(x \in X)$ и теоремы 12.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $T \in \mathrm{Ch}(P)$. Тогда, как известно, (см. [3, 2.1.4, 2.2.2)]) имеет место представление $P = \varepsilon_Q^0 \langle Q \rangle$, где $Q = \mathrm{Ch}(P)$ и линейный оператор $\langle Q \rangle : X \to l_\infty(Q, E)$ действует по правилу: $\langle Q \rangle(x) := (\mathrm{T} \to \mathrm{T}x)$, $T \in Q$, т. е. $\langle Q \rangle(x)$ — функция из $l_\infty(Q, E)$, сопоставляющая каждому $T \in Q$ элемент Tx. Очевидно, что канонический оператор ε_Q сохраняет конечные верхние границы, поэтому в силу теоремы 6 для завершения доказательства остается показать, что $\langle Q \rangle$ сохраняет n-супремумы. Зафиксируем элементы $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$, $T \in Q$. Из теоремы 12 вытекает, что Q состоит из положительных n-дизъюнктных операторов, а, значит, выполнено $\langle Q \rangle(\bigwedge_{i=0}^n x_i)(\mathrm{T}) = \mathrm{T}(\bigwedge_{i=0}^n x_i) = \bigwedge_{i=0}^n T(x_0 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n)$. С другой

стороны, поскольку порядок в $l_\infty(Q,E)$ поточечный, справедливо соотношение

$$\left(\bigvee_{i=0}^{n}\langle Q\rangle(x_0\vee\dots\vee x_{i-1}\vee x_{i+1}\vee\dots\vee x_n)\right)(T)$$
$$=\bigvee_{i=0}^{n}\langle Q\rangle(x_0\vee\dots\vee x_{i-1}\vee x_{i+1}\vee\dots\vee x_n)(T)$$
$$=\bigvee_{i=0}^{n}T(x_0\vee\dots\vee x_{i-1}\vee x_{i+1}\vee\dots\vee x_n).$$

Следовательно, выполнено равенство $\langle Q\rangle\left(\bigvee_{i=0}^n x_i\right)=\bigvee_{i=0}^n\langle Q\rangle(x_0\vee\dots\vee x_{i-1}\vee x_{i+1}\vee\dots\vee x_n)$, что и требовалось доказать.

(3) ⇒ (2). Легко проверяется с использованием характеризации 6 n-дизъюнктных операторов как операторов, сохраняющих n-супремумы. ▷

Литература

1. *Bernau S. J., Huijsmans C. B., de Pagter B.* Sums of lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc.—1992.—V. 115, No. 1.—P. 151–156.
2. *Radnaev V. A.* On n-disjoint operators // Siberian Adv. Math.—1997.—V. 7, No. 4.—P. 45–79.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—269 с.
4. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators.—New York: Akad. Press, 1985.
5. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000.—446 с.

г. Улан-Уде *Статья поступила 26 июля 2001*