Владикавказский математический журнал
Апрель–Июнь, 2001, Том 3, Выпуск 2

УДК **532(075.8)**

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ГОРНОМ ВОДОХРАНИЛИЩЕ

Ж. Д. Туаева

Представлена одномерная математическая модель гравитационных волн, для которой предложен численный метод исследования. Использована линейная теория поверхностных волн малой амплитуды. Применяется явная схема со сдвигом сетки на полшага. Автор обобщает предыдущий результат, полученный с помощью аналитического метода решения для модельного примера. Приводятся данные вычислительного эксперимента в виде графика для значений возмущенной поверхности воды.

Проектирование и строительство водохранилищ в горных и предгорных местностях ставит перед исследователями ряд задач, связанных с обеспечением безопасности жизнедеятельности населения. Обрушение значительных масс горной породы в заполненное водохранилище в результате обвально-оползневых явлений провоцирует поверхностные гравитационные волны, приводящие к стихийным бедствиям.

В зимнее время в горные водохранилища и озера часто вторгаются снежные и водогрунтовые лавины, в результате чего и образуются разрушительные гравитационные волны. Крайне важны в исследуемом вопросе прогноз и оценка ожидаемого повышения уровня воды у плотины и объем перелитой воды через створ в зависимости от геометрических, кинематических и динамических характеристик потенциально возможных обвально-оползневых масс, селевых и лавиноподобных потоков.

В настоящей статье представлена математическая модель поверхностных гравитационных волн, для которой предложен численный метод исследования. Приводятся результаты вычислительного эксперимента в виде графика для значений возмущенной поверхности в створе плотины Зарамагского водохранилища (РСО-А). В работе [1] для этой же модели найдено и исследовано аналитическое решение для частного задания основных геометрических характеристик водоема (модельный пример). Это решение будет в дальнейшем использовано для проверки точности вычислительного алгоритма, иначе говоря, для тестирования применяемого метода.

---

1. Гидродинамическая постановка задачи и описание модели

Предположим, что в прямоугольной системе координат $xOyz$ часть пространства, ограниченная условиями $0 \le x \le L$, $-B(x)/2 \le y \le B(x)/2$, $-H_0(x) \le z \le 0$ и заполненная водой, представляет горное водохранилище непризматического очертания в плане и с переменной в продольном направлении глубиной $H_0(x)$. В створе $x = 0$ расположена плотина, $B(x)$ представляет переменную ширину водохранилища.

Рассмотрим волновое движение воды, вызванное тем, что с берега $x = L$ в водохранилище вторгся обвально-оползневый массив или поток селевого либо лавинного характера. В приближении линейной теории мелкой воды волновое движение описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{1}$$

$$B\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial B H_0 V}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где $V(x,t)$ — средняя по ширине каньона скорость движения воды, $B = B(x)$ — ширина каньона, $H_0(x)$ — глубина воды в водохранилище при невозмущенном состоянии, $H(x,t)$ — возмущение глубины в результате вторжения.

Введем функцию $\phi = \phi(x,t)$, подобную потенциалу скорости, следующим образом

$$V(x,t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad H(x,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Легко заметить, что дифференциальное уравнение (1) относительно функции $\phi(x,t)$ превращается в тождество, а уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - gH_0\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - g\left[\frac{dH_0}{dx} + \frac{H_0}{B}\frac{dB}{dx}\right]\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи запишутся следующим образом:

$$\phi(x,t) = \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x=L} = \bar{V}(t), \tag{5}$$

где $\bar{V}(t)$ — скорость вторжения.

Таким образом, модель представляет начально-краевую задачу (3)–(5) для дифференциальных уравнений теории «мелкой» воды.

2. Численный метод решения начально-краевой задачи поверхностных гравитационных волн

На плоскости (x,t) введем равномерную сетку $\{(ih,jk),\ \ i\ =\ 0,1...,n;$ $k=0,1,...,m\}$, где h,k — шаги сетки по направлениям x и t соответственно. Воспользуемся приемом сдвига сетки на полшага [2]. Именно, пусть $h=\frac{L}{m-1}$, $k=\frac{T}{n-1},\ x_0=-h/2,\ t_0=-k/2$. Здесь T — рассматриваемый период времени (с); $m,\ n$ — количество узлов сетки для переменных x,t соответственно.

Примем за Δ_0 совокупность узлов сетки, то есть множество $\{(x_i,t_j):1\le i\le m-1, 1\le j\le n-1\}$, положим $x_i=(i-\frac{1}{2})h,\ t_j=(j-\frac{1}{2})k$.

Для любого узла $(x_i,y_j)\in\Delta_0$ напишем уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение (3)

$$\begin{aligned}\frac{\phi_{i,j+1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1}}{k^2}&=gH_{0,i}\frac{\phi_{i+1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i-1,j}}{h^2}\\&+gc_i\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2h}=0,\end{aligned}\tag{6}$$

где $\phi_{i,j}=\phi(x_i,t_j)$, $H_{0,i}=H_0(x_i)$, $c_i=\frac{dH_0}{dx}(x_i)+H_0(x_i)\frac{1}{B(x_i)}\frac{dB}{dx}(x_i)$.

Как известно [2], конечно-разностное уравнение (6) аппроксимирует исходное уравнение (3) с порядком $O(h^2,k^2)$.

Запишем уравнения, аппроксимирующие начальные условия (4)–(5). При этом значение функции в расчетной точке будем заменять средним арифметическим. Таким образом, для точки $(x_i,0)=(x_i,t_{1/2})$ имеем

$$\frac{\phi_{i,1}+\phi_{i,0}}{2}=0,\qquad\frac{\phi_{i,1}-\phi_{i,0}}{k}=0.\tag{7}$$

Теперь необходимо записать граничные условия для конечно-разностной схемы в точках $(0,t_j)=(x_{1/2},t_j)$ и $(L,t_j)=(x_{m-1/2},t_j)$, соответственно,

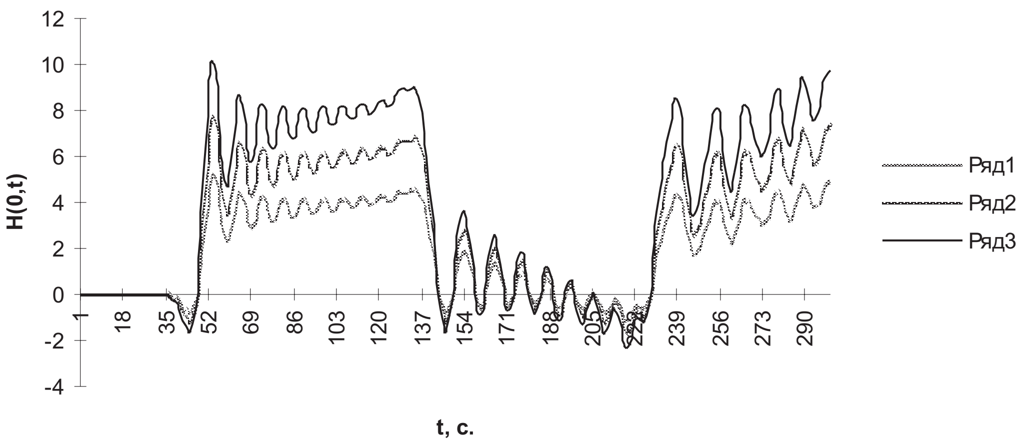
$$\frac{\phi_{1,j}-\phi_{0,j}}{h}=0,\qquad\frac{\phi_{m-1,j}-\phi_{m,j}}{h}=\bar{V}_j,\tag{8}$$

где $\bar{V}_j=\bar{V}(t_j)$.

Приведенная схема (6)–(8) является явной; устойчивость соблюдается при выполнении условия, которое представляет собой ограничение на шаги по пространственной и временной координате:

$$\left|(1-\frac{k}{h}^2gH_{0,i}\right|\le\frac{1}{2}.$$

Для численного исследования поставленной задачи в качестве входных данных использовались параметры Зарамагского водохранилища (РСО-А). Численные результаты решения системы (6)–(8) представлены в виде графика на рис. 1.



Скорость вторжения здесь задана функцией

$$\bar{V}(t) = \begin{cases} V_0 & \text{при } t \le t_0, \\ 0 & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

Ряды 1, 2, 3 соответствуют значениям $V_0 = 2$, $V_0 = 3$ и $V_0 = 4$ соответственно.

Литература

1. *Музаев И. Д., Туаева Ж. Д.* Физико-математическое моделирование гравитационных волн в горных водохранилищах, генерированных обвально-оползневыми явлениями или вторжением потоков селевого либо лавинного характера // Вестник международной академии наук экологии и безопасности жизнедеятельности.—1999.—№ 8.—С. 19–24.
2. *Гавурин М. К.* Лекции по методам вычислений.—М.: Наука, 1977.—247 с.

г. Владикавказ *Статья поступила 28 июня 2001*