Владикавказский математический журнал
Апрель–Июнь, 2001, Том 3, Выпуск 2

УДК **511.3**

О НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ К ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМ ЧИСЛАМ $\psi(x) \cdot e^x$

Б. Г. Тасоев

Автором предложен метод [4], основанный на том, что непрерывные дроби дают наилучшие рациональные приближения к числу, и на возможности контролировать порядок приближения исследуемого числа подходящими дробями как сверху, так и снизу. Важную роль при этом играет регулярность поведения неполных частных. При использовании данного метода отпадает нужда в явных представлениях числителей и знаменателей подходящих дробей и, как следствие, расширяется класс чисел, для которых удается получить точные оценки.

Пусть α — действительное число. В теории чисел и ее приложениях большое значение имеет изучение поведения разности

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|, \tag{1}$$

где p — целое число, ($p \in \mathbb{Z}$), q — натуральное число, ($q \in \mathbb{N}$). Поскольку множество рациональных чисел всюду плотно во множестве действительных чисел, то при соответствующем выборе чисел p и q эта величина может быть сделана меньше любого наперед заданного числа. Поэтому представляет интерес изучить относительную малость величины (1), т. е. выяснить сколь малой она может быть, если q не превосходит некоторого натурального числа q_0, или, иначе, сколь хорошо действительное число α может быть приближено (аппроксимировано) рациональными дробями в зависимости от величины знаменателя q.

Поведение величины (1) оценивают следующим образом. Пусть $\varphi(q)$ — некоторая положительная функция, убывающая с ростом q. Говорят, что иррациональное число α допускает приближение числами $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ порядка $\varphi(q)$, если существует постоянная $c_1 > 0$, зависящая от α и функции $\varphi(q)$, такая, что неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < c_1\varphi(q)$$

имеет бесконечное число решений в числах $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Порядок приближения $\varphi(q)$ называется наилучшим порядком приближения числа α, если существует постоянная $c_2 > 0$, зависящая от α и $\varphi(q)$, такая, что при любых $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > c_2\varphi(q).$$

В нашем изложении мы будем изучать наилучшие рациональные приближения к трансцендентным функциям числа $\psi(x)e^x$. При этом мы будем рассматривать арифметические цепные дроби этих функций. В частности, числа вида

$$\frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1}, \quad a \in \mathbb{N}$$

были получены Эйлером [8]; числа $e^2, e^{\frac{2}{a}}, e^{\frac{2}{k}}, 2\dagger k$ получены Гурвицем [11] наилучшие приближения

$$\left|\mathrm{th}\ \frac{1}{a} - \frac{p}{q}\right| > c \cdot \frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q},$$

установлено Шиокавы [12], а результаты

$$\left|\mathrm{th}\ \frac{1}{a} - \frac{p}{q}\right| > \frac{\ln\ln q}{6q^2\ln q}, \quad \left|e - \frac{p}{q}\right| > \frac{\ln\ln q}{3q^2\ln q}$$

получены Такеши [13, 14]. Однако, как установлено Девисом [9, 10]

1) для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q} \tag{2}$$

имеет бесконечно много решений в целых положительных числах p и q;

2) существует число $q' = q(\varepsilon)$ такое, что для любого $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q} \tag{3}$$

начиная с некоторого $q \geq q'$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|e^{\frac{2}{b}} - \frac{p}{q}\right| < (c+\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q}, \tag{4}$$

имеет бесконечно много решений в целых положительных p и q.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ такое, что для любого $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\left| e^{\frac{2}{b}} - \frac{p}{q} \right| > (c - \varepsilon) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}, \tag{5}$$

начиная с некоторого $q \geq q'$, где

$$c = \begin{cases} b^{-1}, & 2|b \\ (4b)^{-1}, & 2 \dagger b. \end{cases} \tag{6}$$

Нами установлен [4] подход, основанный на том, что непрерывные дроби дают наилучшие рациональные приближения к числу, а также на возможности контролировать порядок приближения исследуемого числа подходящими дробями как сверху, так и снизу. Важную роль при этом играет регулярность поведения неполных частных. В частности, предложенный метод привел к существенному упрощению доказательства теоремы Дэвиса и подобных результатов. При его использовании отпадает нужда в явных представлениях числителей и знаменателей подходящих дробей и, как следствие, расширяется класс чисел, для которых удается получить точные оценки. Отметим, что нижние оценки с худшими константами для некоторых из рассмотренных чисел были известны и ранее (см. [12, 13, 14]).

Сформулируем теорему доказанную в [4].

Теорема. *Пусть* n, m_i, s_i, $(i = 1, 2, ..., n)$, *натуральные числа;*

$$\{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m_1}\}, \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2m_2}\}, ..., \{a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm_n}\},$$

конечные последовательности целых неотрицательных чисел;

$$\{b_{11}, b_{12}, ..., b_{1s_1}\}, \{b_{21}, b_{22}, ..., b_{2s_2}\}, ..., \{b_{n1}, b_{n2}, ..., b_{ns_n}\},$$
$$\{d_{11}, d_{12}, ..., d_{1m_1}\}, \{d_{21}, d_{22}, ..., d_{2m_2}\}, ..., \{d_{n1}, d_{n2}, ..., d_{nm_n}\},$$

конечные последовательности целых положительных чисел, $a_0 \in \mathbb{Z}$*;*

$$\begin{aligned} \alpha = & [a_0; \overline{b_{11}, ..., b_{1s_1}, a_{11} + \lambda d_{11}, ..., a_{1m_1} + \lambda d_{1m_1}, ...,} \\ & \overline{b_{n1}, ..., b_{ns_m}, a_{n1} + \lambda d_{n1}, ..., a_{nm_n} + \lambda d_{nm_n}}]_{\lambda=1}^{\infty}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\alpha = [a_0; w_1, w_2, w_3, ..., w_k, ...]; \quad \Omega = m_1 + m_2 + ... + m_n; \tag{8}$$

$$c = \min \left\{ \frac{\Omega}{d_{11}}, \frac{\Omega}{d_{12}}, ..., \frac{\Omega}{d_{1m_1}}, ..., \frac{\Omega}{d_{nm_n}} \right\}. \tag{9}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < (c+\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q}, \tag{10}$$

имеет бесчисленное множество решений в числах $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > (c-\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q}, \tag{11}$$

для всех целых p, q где $q \geq q'$.

Далее, пользуясь методом Гурвица [11] можно доказать, что если

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$$

разложение α в регулярную (арифметическую) непрерывную дробь, то число вида

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

где $ad - bc = n > 0$ разлагается в регулярную непрерывную дробь.

Однако, отметим, что получение непрерывной дроби по методу Гурвица быстро растет с ростом n и практически трудно решать задачи такого типа. Ниже мы предлагаем другой подход к решению задач подобного типа. В работе нами установлено наилучшее рациональное приближение к числам в цепных дробях.

1. О разложении в цепные дроби чисел вида $x \cdot \frac{e^x+1}{e^x-1}$, e^x $(x \in \mathbb{R})$

Теорема 1.1. *Имеет место разложение*

$$x \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 2 + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \ldots}}}, \quad x \in \mathbb{R},\ x > 0. \tag{1.1}$$

$\triangleleft$ *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$2xy'' + y' = 2y, \tag{1.2}$$

решением которого является уравнение

$$y = e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}.$$

С другой стороны, из (1.2) следует, что

$$\begin{gathered} 2xy''' + 3y'' = 2y', \\ 2xy'''' + 5y''' = 2y'', \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ 2xy^{(n+2)} + (2n+1)y^{(n+1)} = 2y^{(n)}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots. \end{gathered}$$

Решим уравнение для $\frac{y}{y'}$. Действительно,

$$2 \cdot \frac{y^{(n)}}{y^{(n+1)}} = 2n + 1 + 2x \cdot \frac{1}{\frac{y^{(n+1)}}{y^{(n+2)}}}$$

и, следовательно,

$$\frac{y}{y'} = \frac{1}{2} + \frac{x}{\frac{y'}{y''}} = \frac{1}{2} + \cfrac{x}{\cfrac{3}{2} + \cfrac{x}{\cfrac{5}{2} + \dots}},$$

т. е.

$$\frac{y}{y'} = \sqrt{x} \cdot \frac{e^{4\sqrt{x}} + 1}{e^{4\sqrt{x}} - 1} = \frac{1}{2} + \cfrac{x}{\cfrac{3}{2} + \cfrac{x}{\cfrac{5}{2} + \dots}}.$$

Заменив $\sqrt{x}$ на $\frac{x}{4}$, получим из последнего равенства (1.1). $\triangleright$

Теорема 1.2. *Имеют место разложения*

$$\frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1} = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \dots}}, \quad a \in \mathbb{N}; \tag{1.3}$$

$$\frac{e^{\frac{1}{a}} + 1}{e^{\frac{1}{a}} - 1} = 2a + \cfrac{1}{6a + \cfrac{1}{10a + \dots}}, \quad a \in \mathbb{N}; \tag{1.4}$$

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{e^{\frac{2}{\sqrt{a}}}+1}{e^{\frac{2}{\sqrt{a}}}-1}=2+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{7a+\dots}}},\quad a\in\mathbb{N};\tag{1.5}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{e^{\sqrt{\frac{a}{b}}}+1}{e^{\sqrt{\frac{a}{b}}}-1}=2+\cfrac{a}{6b+\cfrac{a}{10+\cfrac{a}{14b+\dots}}},\quad a,b\in\mathbb{N};\tag{1.6}$$

$$\sqrt{a}\cdot\frac{e^{\sqrt{a}}+1}{e^{\sqrt{a}}-1}=2+\cfrac{a}{6+\cfrac{a}{10+\cfrac{a}{14+\dots}}},\quad a\in\mathbb{N};\tag{1.7}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{e^{\frac{a}{b}}+1}{e^{\frac{a}{b}}-1}=2+\cfrac{a^2}{6b^2+\cfrac{a^2}{10+\cfrac{a^2}{14b^2+\dots}}},\quad \frac{a}{b}\in\mathbb{Q};\tag{1.8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{b}}}+1}{e^{\frac{1}{\sqrt{b}}}-1}=2+\cfrac{1}{6b+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14b+\dots}}},\quad b\in\mathbb{N}.\tag{1.9}$$

◁ *Положим в равенстве (1.1)* $x=\frac{2}{a}$ *и разделим обе его части на* $\frac{2}{a}$. *Придем к равенству (1.3).*

Аналогично устанавливаются равенства (1.4)–(1.8). ▷

Теорема 1.3. *Пусть* $t\in\mathbb{R}_+$. *Тогда*

$$e^{\frac{1}{t}}=[1;t-1,1,1,3t-1,1,1,5t-1,1,1,...]\tag{1.10}$$

◁ *Из разложения (1.1) находим, что*

$$\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\dots}}.$$

Обозначим $\frac{1}{x}=t$. *Получим, что*

$$e^{\frac{1}{t}}-1=\frac{2}{2t-1}+\cfrac{1}{6t+\cfrac{1}{10t+\dots}}.$$

Пусть $\gamma_0 = \frac{2}{2t-1+\frac{1}{\gamma_1}} = \frac{2\gamma_1}{(2t-1)\gamma_1+1} \equiv \boxed{(t-1)} + \frac{\gamma_1+1}{2\gamma_1} \equiv 1 + \frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1} \equiv \boxed{1} + \frac{2}{\gamma_1-1}$. $\triangleright$

Примечание. *Вместо записи*

$$\gamma_0 = \frac{2\gamma_0}{(2t-1)\gamma_1+1} = \cfrac{1}{t-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{\gamma_1-1}}}}$$

коротко пишем таким образом, что указывали выше.

Находим, что

$$\gamma_1 = 6t + \frac{1}{\gamma_2} = \frac{6t\gamma_2+1}{\gamma_2}.$$

Поэтому

$$\frac{2}{\gamma_1-1} = \frac{2\gamma_2}{(6t-1)\gamma_2+1} \equiv \boxed{(3t-1)} + \frac{\gamma_2+1}{2\gamma_2} \equiv \boxed{1} + \frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1} \equiv \boxed{1} + \frac{2}{\gamma_2-1}.$$

Предположим, что для γ_{n-1} *выполняются условия. Тогда для*

$$\gamma_n = (4n+2)t + \frac{1}{\gamma_{n+1}} = \frac{(4n+2)t\gamma_{n+1}+1}{\gamma_{n+1}}$$

получаем

$$\frac{2}{\gamma_n-1} = \frac{2\gamma_{n+1}}{((4n+2)t-1)\gamma_{n+1}+1} \equiv$$
$$\boxed{(2n+1)t-1} + \frac{\gamma_{n+1}+1}{2\gamma_{n+1}} \equiv \boxed{1} + \frac{\gamma_{n+1}-1}{\gamma_{n+1}+1} \equiv \boxed{1} + \frac{2}{\gamma_{n+1}-1},$$

и, следовательно, утверждение верно для любого n.

В частности, при $t = a \in \mathbb{N}, a > 1$

$$e^{\frac{1}{2}} = [1; a-1, 1, 1, 3a-1, 1, 1, 5a-1, 1, 1, \ldots] \quad \text{(Гурвиц, [11])}; \tag{1.11}$$

при $a = \frac{1}{t}, a \in \mathbb{N}$

$$e^a = \left[1; \frac{1}{a}-1, 1, 1, \frac{3}{a}-1, 1, 1, \frac{5}{a}-1, 1, 1, \ldots\right]; \tag{1.12}$$

при $t = \frac{m}{a}, m, a \in \mathbb{N}$

$$e^{\frac{a}{m}} = \left[1; \frac{m}{a}-1, 1, 1, \frac{3m}{a}-1, 1, 1, \frac{5m}{a}-1, 1, 1, \ldots\right]. \tag{1.13}$$

Ниже, с помощью нашего метода, мы покажем, что

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \dots] \quad \text{(Эйлер, [8])}, \tag{1.14}$$

$$e^2 = [7; \overline{3n+2, 1, 1, 3n+3, 12n+18}]_{n=0}^{\infty} \quad \text{(Гурвиц, [11])}, \tag{1.15}$$

$$e^{\frac{2}{a}} = \left[1; \overline{\frac{a-1}{2} + 3\lambda a, 6a + 12\lambda a, \frac{5a-1}{2} + 3\lambda a, 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty} \quad \text{(Гурвиц, [11])}. \tag{1.16}$$

Других разложений, в смысле арифметических цепных дробей, числа $e^{\frac{m}{a}}$ *до сих пор ненайдено. В связи с этим С. Ленг пишет, что «Общей проблемой является исследование в интересующем нас аспекте значений должным образом нормированных классических функций. Функция* e^t *является, конечно, наиболее простой. Первой возникающей проблемой, и, возможно, самой простой, является определение непрерывной дроби для* e^a, где a — рациональное число *(или даже произвольное целое). Хотелось бы знать, как особые аналитические свойства одной из классических функций отражаются на арифметических свойствах ее значений». ([3], стр. 97).*

Покажем теперь, что имеет место разложение (1.14). В самом деле, в силу (1.12), при $a = 1$ *находим, что*

$$e = [1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \dots].$$

Положим

$$\gamma_0 = [1; 0, 1, 1, \gamma_1] = \frac{3\gamma_1 + 2}{\gamma_1 + 1}; \quad \gamma_1 = [2; 1, 1, \gamma_2] = \frac{5\gamma_2 + 3}{2\gamma_2 + 1}.$$

Следовательно,

$$\gamma_0 = \frac{3\gamma_1 + 2}{\gamma_1 + 1} = \frac{19\gamma_2 + 11}{7\gamma_2 + 4} = [2; 1, 2, 1, 1, \gamma_2].$$

Предположим, что утверждение верно для γ_{n-1}. *Тогда утверждение верно и для* $\gamma_n = [2n; 1, 1, \gamma_{n+1}]$. *Следовательно, утверждение (1.14) верно.*

В силу (1.3) положим $a = 1$

$$\frac{e^2+1}{e^2-1} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \dots}},$$

откуда находим, что

$$e^2 - 7 = \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \dots}}}.$$

Положим

$$\gamma_0 = \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{\gamma_1}} = \frac{2\gamma_1}{5\gamma_1 + 1} = \left[0; 2, 1, 1, \frac{\gamma_1 - 1}{2}\right]; \quad \gamma_1 = 7 + \frac{1}{\gamma_2} = \frac{7\gamma_2 + 1}{\gamma_2};$$

$$\frac{\gamma_1 - 1}{2} = \frac{6\gamma_2 + 1}{2\gamma_2} = [3; 2\gamma_2]; \quad \gamma_2 = 9 + \frac{1}{\gamma_3} = \frac{9\gamma_3 + 1}{\gamma_3};$$

$$2\gamma_2 = \frac{18\gamma_3 + 2}{\gamma_3} = \left[18; \frac{\gamma_3}{2}\right].$$

Предположим теперь, что γ_{3n+2} *выполняется. Тогда*

$$\gamma_{3n+3} = 6n + 11 + \frac{1}{\gamma_{3n+4}} = \frac{(6n+11)\gamma_{3n+4} + 1}{\gamma_{3n+4}}.$$

Откуда находим

$$\frac{\gamma_{3n+3}}{2} = \frac{(6n+11)\gamma_{3n+4} + 1}{2\gamma_{3n+4}} = \left[3n + 5; 1, 1, \frac{\gamma_{3n+4} - 1}{2}\right].$$

Аналогично получаем

$$\gamma_{3n+4} = 6n + 13 + \frac{1}{\gamma_{3n+5}} = \frac{(6n+13)\gamma_{3n+5} + 1}{\gamma_{3n+5}},$$

и, следовательно,

$$\frac{\gamma_{3n+4} - 1}{2} = \frac{(6n+12)\gamma_{3n+5} + 1}{2\gamma_{3n+5}} = \left[3n + 6; \frac{\gamma_{3n+5}}{2}\right].$$

Таким образом,

$$\gamma_{3n+5} = 6n + 15 + \frac{1}{\gamma_{3n+6}} = \frac{(6n+15)\gamma_{3n+6} + 1}{\gamma_{3n+6}};$$

$$\frac{\gamma_{3n+5}}{2} = \frac{(12n+30)\gamma_{3n+6} + 2}{\gamma_{3n+6}} = \left[12n + 30; \frac{\gamma_{3n+6}}{2}\right].$$

Рассуждая дальше по n *находим, что верно (1.15).*

Наконец, докажем (1.16). В самом деле, из разложения (1.1), положив $x = \frac{2}{a}, 2\dagger a$*, получим, что*

$$\frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1} = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \dots}},$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$e^{\frac{2}{a}} - 1 = \cfrac{2}{a - 1 + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \dots}}}.$$

Положим

$$\gamma_0 = \cfrac{2}{a - 1 + \cfrac{1}{\gamma_1}} = \frac{2\gamma_1}{(a-1)\gamma_1 + 1} \equiv \boxed{\frac{a-1}{2}} + \frac{1}{2\gamma_1};$$

$$\gamma_1 = 3a + \frac{1}{\gamma_2} = \frac{3a\gamma_2 + 1}{\gamma_2}.$$

Следовательно,

$$2\gamma_1 = \frac{6a\gamma_2 + 2}{\gamma_2} \equiv \boxed{6a} + \frac{2}{\gamma_2}; \quad \gamma_2 = 5a + \frac{1}{\gamma_3} = \frac{5a\gamma_3 + 1}{\gamma_3};$$

$$\frac{\gamma_2}{2} = \frac{(5a-1)\gamma_3 + (\gamma_3 + 1)}{2\gamma_3} \equiv \boxed{\frac{5a-1}{2}} + \frac{\gamma_3 + 1}{2\gamma_3} \equiv \boxed{1} + \frac{\gamma_3 - 1}{\gamma_3 + 1} \equiv \boxed{1} + \frac{2}{\gamma_3 - 1};$$

$$\gamma_3 = 7a + \frac{1}{\gamma_4} = \frac{7a\gamma_4 + 1}{\gamma_4}; \quad \frac{\gamma_3 - 1}{2} = \frac{(7a-1)\gamma_4 + 1}{2\gamma_4} \equiv \boxed{\frac{7a-1}{2}} + \frac{1}{2\gamma_4}$$

и вернулись к γ_1. *Предположим, что утверждение верно для* γ_{3n}. *Тогда*

$$\gamma_{3n+1} = (3 + 6n)a + \frac{1}{\gamma_{3n+2}} = \frac{(3 + 6n)a\gamma_{3n+2} + 1}{\gamma_{3n+2}},$$

откуда

$$2\gamma_{3n+2} = \frac{(6 + 12n)a\gamma_{3n+2} + 2}{\gamma_{3n+2}} \equiv \boxed{(a + 12an)} + \frac{2}{\gamma_{3n+2}};$$

$$\gamma_{3n+2} = (5 + 6n)a + \frac{1}{\gamma_{3n+3}} = \frac{(5a + 6an)\gamma_{3n+3} + 1}{\gamma_{3n+3}}$$

отсюда следует, что

$$\frac{\gamma_{3n+2}}{2} = \frac{(5a + 6an)\gamma_{3n+3}}{2\gamma_{3n+3}} = \left[\frac{5a-1}{2} + 3an; 1, 1, \frac{\gamma_{3n+3} - 1}{2}\right].$$

Наконец, находим

$$\gamma_{3n+3} = 7a + 6an + \frac{1}{\gamma_{3n+4}} = \frac{(7a + 6an)\gamma_{3n+4} + 1}{\gamma_{3n+4}},$$

$$\frac{\gamma_{3n+3} - 1}{2} = \frac{(7a - 1 + 6an)\gamma_{3n+4} + 1}{2\gamma_{3n+4}} = \left[\frac{7a-1}{2} + 3an, 2\gamma_{3n+4}\right],$$

и, следовательно, утверждение (1.16) верно.

Теорема 1.4. *Пусть* α — *цепная дробь из равенств (1.3)–(1.5), (1.11), (1.14)–(1.16). Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < (c+\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q},$$

имеет бесконечно много решений в числах $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ *такое, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > (c-\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q},$$

для всех целых $p, q, q \geq q'(\varepsilon)$.

При этом

1) при $\alpha = \frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1}$	$c = \frac{1}{2}$,	*2) при* $\alpha = \frac{e^{\frac{1}{a}}+1}{e^{\frac{1}{a}}-1}$	$c = \frac{1}{4}$,
3) при $\alpha = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{e^{\sqrt{\frac{2}{a}}}+1}{e^{\sqrt{\frac{2}{a}}}-1}$	$c = \frac{1}{2a}$,	*4) при* $\alpha = e^{\frac{1}{a}}$	$c = \frac{1}{2}$,
5) при $\alpha = e$	$c = \frac{1}{2}$,	*6) при* $\alpha = e^2$	$c = \frac{1}{4}$,
7) при $\alpha = e^{\frac{2}{a}}$, $2\dagger a$	$c = \frac{1}{4a}$.		

2. О разложении чисел вида ae, $a^{-1}e$, $\frac{a}{b}e$, $\frac{ae+b}{ce+d}$, $e + \frac{a}{b}$.

Числа вида ae, $\frac{1}{e}$ $(a \in \mathbb{N})$ *разлагаются в цепную дробь. Для примера докажем следующую теорему.*

Теорема 2.1. *Имеют место разложения*

$$2e = [5; 2, \overline{3, 2n+2, 3, 1, 2n+2, 1}]_{n=0}^{\infty}, \tag{2.1}$$

$$3e = [8; 6, 2, \overline{5, 2n+2, 5, 1, 2n+2, 5, 1, 2n+2, 1}]_{n=0}^{\infty}, \tag{2.2}$$

$$4e = [10; 1, 6, 1, \overline{7, 2, 7, n+2, 7, 1, n+1, 1}]_{n=0}^{\infty}, \tag{2.3}$$

$$\frac{e}{2} = [1; 2, \overline{2n+1, 3, 1, 2n+1, 1, 3}]_{n=0}^{\infty}, \tag{2.4}$$

$$\frac{e}{3} = [0; 1, 9, \overline{1, 1, 2n+1, 5, 1, 2n+1, 1, 1, 26+18n}]_{n=0}^{\infty}, \tag{2.5}$$

$$\frac{e}{4} = [0; 1, 2, 8, 3, \overline{1, 1, 1, n+1, 7, 1, n+1, 2}]_{n=0}^{\infty}. \tag{2.6}$$

◁ *Для примера приведем доказательство равенства (2.2). В силу (1.14), имеем*

$$3e = \left[6; \frac{1}{3}, 6, \frac{1}{3}, 3, \frac{4}{3}, 3, \frac{1}{3}, 18, \frac{1}{3}, 3, \frac{8}{3}, 3, \frac{1}{3}, 30, \frac{1}{3}, 3, \dots\right],$$

откуда находим

$$\gamma_0 = \left[6; \frac{1}{3}, \gamma_1\right] = \frac{9\gamma_1 + 18}{\gamma_1 + 3} = \left[18; \frac{\gamma_1 + 3}{\gamma_1 - 6}\right],$$

$$\gamma_1 = \left[6; \frac{1}{3}, 3, \gamma_2\right] = \frac{45\gamma_2 + 9}{6\gamma_2 + 1}.$$

Следовательно,

$$\frac{\gamma_1 + 3}{\gamma_1 - 6} = \frac{63\gamma_2 + 12}{9\gamma_2 + 3} = \left[6; \frac{3\gamma_2 + 1}{3\gamma_2 - 1}\right], \quad \gamma_2 = \left[\frac{4}{3}, 3, \frac{1}{3}, \gamma_3\right] = \frac{3\gamma_3 + 5}{3\gamma_3 + 3},$$

$$\frac{3\gamma_2 + 1}{3\gamma_2 - 2} = \frac{15\gamma_3 + 18}{5\gamma_3 + 9} = \left[2; 5, \frac{\gamma_3}{9}\right], \quad \gamma_3 = \left[18; \frac{1}{3}, 3, \gamma_4\right] = \frac{117\gamma_4 + 21}{6\gamma_4 + 1},$$

$$\frac{\gamma_3}{9} = \frac{39\gamma_4 + 7}{18\gamma_4 + 7} = \left[2; 5, 1, \frac{3\gamma_4 - 2}{3}\right], \quad \gamma_4 = \left[\frac{8}{3}; 3, \frac{1}{3}, \gamma_5\right] = \frac{17\gamma_5 + 27}{6\gamma_5 + 9},$$

$$\frac{3\gamma_4 - 2}{3} = \frac{13\gamma_5 + 21}{6\gamma_5 + 9} = \left[2; 5, 1, \frac{\gamma_5 - 6}{9}\right], \quad \gamma_5 = \left[30; \frac{1}{3}, 3, \gamma_6\right] = \frac{189\gamma_6 + 33}{6\gamma_6 + 1},$$

$$\frac{\gamma_5 - 6}{9} = \frac{17\gamma_6 + 3}{6\gamma_6 + 1} = [2; 1, 5, \gamma_6], \quad \gamma_6 = \left[4; 3, \frac{1}{3}, \gamma_7\right] = \left[4; 5, 1, \frac{\gamma_7 - 6}{9}\right],$$

$$\gamma_7 = \left[42; \frac{1}{3}, 3, \gamma_8\right] = \frac{261\gamma_8 + 45}{6\gamma_8 + 1},$$

$$\frac{\gamma_7 - 6}{9} = \frac{75\gamma_8 + 13}{18\gamma_8 + 3} = \left[4; 5, 1, \frac{3\gamma_8 - 2}{3}\right], \quad \gamma_8 = \left[\frac{16}{3}, 3, \frac{1}{3}, \gamma_9\right] = \frac{11\gamma_9 + 17}{2\gamma_9 + 3},$$

$$\frac{3}{\gamma_8 - 2} = \frac{6\gamma_9 + 9}{29\gamma_9 + 45} \equiv \boxed{4} + \frac{5\gamma_9 + 9}{6\gamma_9 + 9} \equiv \boxed{1} + \frac{\gamma_9}{5\gamma_9 + 1} \equiv \boxed{5} + \frac{1}{\gamma_9}.$$

Предположим, что утверждение верно для γ_{6n+2}. *Тогда для* γ_{6n+3} *находим*

$$\gamma_{6n+3} = \left[18 + 36n; \frac{1}{3}, 3, \gamma_{6n+4}\right] = \frac{(117 + 216)\gamma_{6n+4} + (21 + 36n)}{6\gamma_{6n+4} + 1}$$
$$= \left[4n + 2; 5, 1, \frac{3\gamma_{6n+4} - 2}{3}\right],$$

$$\gamma_{6n+4} = \left[\frac{8 + 12n}{3}; 3, \frac{1}{3}, \gamma_{6n+5}\right] = \frac{(17 + 24n)\gamma_{6n+5} + (27 + 36n)}{6\gamma_{6n+5} + 9},$$

откуда следует, что

$$\frac{3\gamma_{6n+4}-2}{3} = \frac{(13+24n)\gamma_{6n+5}+(21+36n)}{6\gamma_{6n+5}+9} = \Big[2+4n; 5, 1, \frac{\gamma_{6n+5}-6}{9}\Big].$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned}
\gamma_{6n+5} =&\Big[30+36n, \frac{1}{3}, 3, \gamma_{6n+6}\Big] = \frac{(189+216n)\gamma_{6n+6}+(33+36n)}{6\gamma_{6n+6}+1},\\
\frac{\gamma_{6n+5}-6}{9} =&\frac{(153+216n)\gamma_{6n+6}+(27+36n)}{54\gamma_{6n+6}+9} = [2+4n, 1, 5, \gamma_{6n+6}],\\
\gamma_{6n+6} =&\Big[4+4n; 3, \frac{1}{3}, \gamma_{6n+7}\Big] = \Big[4+4n; 5, 1, \frac{\gamma_{6n+7}-6}{9}\Big],\\
\gamma_{6n+7} =&\Big[42+36n, \frac{1}{3}, 3, \gamma_{6n+8}\Big] = \frac{(261+216n)\gamma_{6n+8}+(45+31n)}{6\gamma_{6n+8}+1},\\
\frac{\gamma_{6n+7}-6}{9} =&\frac{(225+216n)\gamma_{6n+8}+(39+36n)}{54\gamma_{6n+8}+9} = \Big[4+4n; 5, 1, \frac{\gamma_{6n+8}-2}{3}\Big],\\
\gamma_{6n+8} =&\Big[\frac{16+12n}{3}, 3, \frac{1}{3}, \gamma_{6n+9}\Big] = \frac{(11+8n)\gamma_{6n+9}+(17+12n)}{2\gamma_{6n+9}+3},
\end{aligned}$$

откуда, наконец, находим

$$\frac{3\gamma_{6n+8}-2}{3} = \frac{(25+24n)\gamma_{6n+9}+(45+36n)}{6\gamma_{6n+9}+9} = \Big[4+4n, 1, 5, \frac{\gamma_{6n+9}}{9}\Big].$$

Таким образом, получим разложение

$$\begin{aligned}
&3e = [8; 6, 2, 5, \overline{4n+2, 5, 1, 4n+2, 5, 1, 4n+2, 1, 5, 4n+4, 5, 1, 4n+4,}\\
&\overline{5, 1, 4n+4, 1, 5}]_{n=0}^{\infty} = [8; 6, 2, \overline{5, 2n+2, 5, 1, 2n+2, 5, 1, 2n+2, 1}]_{n=0}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказываются равенства (2.1), (2.3)–(2.5). ▷

Теорема 2.2. *Имеет место разложение*

$$\begin{aligned}
\frac{3e}{2} =&[4; 12, 1, 10, 1, 11, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 11, 1, 1, 1,\\
&\overline{11, 2n+3, 11, 1, 2n+2, 1, 1, 2, 2, 2n+3, 2, 2, 1, 1, 2n+3,}\\
&\overline{1, 1, 2, 2, 2n+4, 11, 1, 2n+3, 1}]_{n=0}^{\infty}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$\triangleleft$ *В силу (2.2), применим сюда разложения*

$$\begin{aligned}\frac{3e}{2} =\Big[&4; 12, 1, 10, 1, 10, \frac{1}{2}, 4, \frac{5}{2}, 2, 1, 2, \frac{5}{2}, 8, \frac{5}{2}, 2, 2, 10, \frac{1}{2}, 8, \frac{1}{2}, 10, 3, 10,\\ &\frac{1}{2}, 12, \frac{5}{2}, 2, 3, 2, \frac{5}{2}, 16, \frac{5}{2}, 2, 4, 10, \frac{1}{2}, 16, \frac{1}{2}, 10, 5, 10, \frac{1}{2}, 20, \frac{5}{2}, 2, 5,\\ &2, \frac{5}{2}, 24, \frac{5}{2}, 2, 6, 10, \frac{1}{2}, 24, \frac{1}{2}, \dots\Big].\end{aligned} \tag{2.8}$$

Рассмотрим теперь разложения

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = [10; 1, \gamma_1],\\
&\gamma_1 = \Big[10; \frac{1}{2}, 4, \frac{5}{2}, \gamma_2\Big] = \frac{364\gamma_2 + 136}{32\gamma_2 + 12} = [11; 2, 1, 2, \gamma_2],\\
&\gamma_2 = [2; 1, 2, \gamma_3]\\
&\gamma_3 = \Big[\frac{5}{2}; 8, \frac{5}{2}, 2, \gamma_4\Big] = \frac{524\gamma_4 + 220}{200\gamma_4 + 84} = [2; 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, \gamma_4],\\
&\gamma_4 = [2; \gamma_5],\\
&\gamma_5 = \Big[10, \frac{1}{2}, 8, \frac{1}{2}, \gamma_6\Big] = \frac{140\gamma_6 + 232}{12\gamma_6 + 20} = [11; 1, 1, 1, \gamma_6 + 1],\\
&\gamma_6 + 1 = [10; 3, \gamma_7] + 1 = [11; 3, \gamma_7],
\end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned}
&\gamma_7 = \Big[10; \frac{1}{2}, 12, \frac{5}{2}, \gamma_8\Big] = \frac{844\gamma_8 + 328}{72\gamma_8 + 28} = [11; 1, 2, 1, 1, 2, \gamma_8],\\
&\gamma_9 = \Big[\frac{5}{2}; 16, \frac{5}{2}, 2, \gamma_{10}\Big] = \frac{1004\gamma_{10} + 420}{392\gamma_{10} + 164} = [2; 1, 1, 3, 1, 1, 2, 2, \gamma_{10}],\\
&\gamma_{10} = [4; \gamma_{11}],\\
&\gamma_{11} = \Big[10; \frac{1}{2}, 16, \frac{1}{2}, \gamma_{12}\Big] = \frac{236\gamma_{12} + 421}{20\gamma_{12} + 36} = [11; 1, 3, 1, \gamma_{12} + 1],\\
&\gamma_{12} + 1 = [10; 5, \gamma_{13}] + 1 = [11; 5, 1, \gamma_{13}].
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\gamma_{13} =&\Big[10; \frac{1}{2}, 20, \frac{5}{2}, \gamma_{14}\Big] = \frac{1324\gamma_{14} + 520}{112\gamma_{14} + 44} = [11; 1, 4, 1, 1, 2, \gamma_{14}],\\
\gamma_{14} =&[2; 5, 2, \gamma_{15}],\\
\gamma_{15} =&\Big[\frac{5}{2}; 24, \frac{5}{2}, 2, \gamma_{16}\Big] = \frac{1484\gamma_{16} + 620}{584\gamma_{16} + 244}.
\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения дают, что

$$\gamma_{15} = [2; 1, 1, 5, 1, 1, 2, 2, \gamma_{16}],$$
$$\gamma_{16} = [6; \gamma_{17}],$$
$$\gamma_{17} = \left[10; \frac{1}{2}, 24, 2, \gamma_{18}\right] = \frac{332\gamma_{18} + 616}{28\gamma_{18} + 52} = [11; 1, 5, 1, \gamma_{18} + 1],$$

$$\gamma_{12} + 1 = [11; 5, 11, 1, 4, 1, 1, 2, 2, 5, 2, 2, 1, 1, 5, 1, 1, 2, 2, 6, 11, 1, 5, 1, \gamma_{18} + 1]. \quad (2.9)$$

Применив теперь к общему разложению $\frac{3e}{2}$, разложение аналогичное (2.8) и (2.9), придем к цепным дробям (2.7).

Замечание. *Аналогичные доказательства проходят для чисел вида $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2.3. *Имеет место разложение*

$$\frac{39e + 10}{15e + 4} = \left[2; 1, 1, 2, 2, \frac{3e}{2}\right] = [2; 1, 1, 2, 2, 4, 12, 1, 10, 1, 11, 2, 1, 2, 2,$$
$$1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 11, 1, 1, 1, \overline{11, 2n + 3, 11, 1, 2n + 2, 1, 1, 2,}$$
$$\overline{2, 2n + 3, 2, 2, 1, 1, 2n + 3, 1, 1, 2, 2, 2n + 4, 11, 1, 2n + 3, 1}]_{n=0}^{\infty} \quad (2.10)$$

Аналогичное разложение имеют и числа вида $\frac{ae+b}{ce+d}$.

◁ *Рассмотрим разложение*

$$\frac{39e + 10}{15e + 4} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}e}}}}$$

откуда следует требуемое разложение (на основе (2.7)). ▷

Ниже мы покажем, что имеют место разложения $e + \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.4. *Имеет место разложение*

$$e + \frac{3}{4} = [3; 2, 7, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 31, 3, 1, 1, 2, 5, 1, 1, 4, 3,$$
$$1, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 2, \overline{31, \lambda + 1, 1, 3, 1, 1,}$$
$$\overline{2, 1, \lambda + 1, 4, 1, 1, 3, \lambda + 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, \lambda + 1, 2, 7, 1, 1, \lambda + 1, 1, 3,}$$
$$\overline{1, 1, 2, 1, \lambda + 1, 1, 2, 1, 1, 3, 1, \lambda + 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, \lambda + 1, 1}]_{\lambda=0}^{\infty}. \quad (2.11)$$

◁ *Как известно,*

$$e+\frac{3}{4}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}+\frac{3}{4}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\gamma_0}}+\frac{3}{4}=\frac{15\gamma_0+11}{4\gamma_0+4}=3+\frac{3\gamma_0-1}{4\gamma_0+4}.$$

Определим $\gamma_0=[2;1,1,\gamma_1]=\frac{5\gamma_1+3}{2\gamma_1+1}$ *и подставим его значение в выражение*

$$A_0=\frac{3\gamma_0-1}{4\gamma_0+4}=\frac{3\frac{5\gamma_1+3}{2\gamma_1+1}-1}{4\frac{5\gamma_1+3}{2\gamma_1+1}+4}=\frac{13\gamma_1+8}{28\gamma_1+16}\equiv 2+\frac{2\gamma_1}{13\gamma_1+8}$$

Определим в общем виде

$$\gamma_n=2n+2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\gamma_{n+1}}}}=\frac{(4n+5)\gamma_{n+1}+(2n+3)}{2\gamma_{n+1}+1}. \tag{2.12}$$

Получим, что

$$A_1=\frac{2\gamma_1}{13\gamma_1+8}=\frac{2\cdot\frac{9\gamma_2+5}{2\gamma_2+1}}{13\cdot\frac{9\gamma_2+5}{2\gamma_2+1}+8}=\frac{18\gamma_2+10}{133\gamma_2+23}\equiv\boxed{7}+\frac{7\gamma_2+3}{18\gamma_2+10}$$
$$\equiv\boxed{2}+\frac{4\gamma_2+4}{7\gamma_2+3}\equiv\boxed{1}+\frac{3\gamma_2-1}{4\gamma_2+4},$$

$$A_2=\frac{3\gamma_2-1}{4\gamma_2+4}=\frac{37\gamma_3+20}{60\gamma_3+32}\equiv\boxed{1}+\frac{32\gamma_3+12}{37\gamma_3+20}\equiv\boxed{1}+\frac{14\gamma_3+8}{23\gamma_3+12}$$
$$\equiv\boxed{1}+\frac{9\gamma_3+4}{14\gamma_3+8}\equiv\boxed{1}+\frac{5\gamma_3+4}{9\gamma_3+4}\equiv\boxed{1}+\frac{4\gamma_3}{5\gamma_3+4},$$

$$A_3=\frac{4\gamma_3}{5\gamma_3+4}=\frac{68\gamma_4+36}{93\gamma_4+49}\equiv\boxed{1}+\frac{25\gamma_4+13}{68\gamma_4+36}\equiv\boxed{2}+\frac{18\gamma_4+10}{25\gamma_4+13}$$
$$\equiv\boxed{1}+\frac{7\gamma_4+3}{18\gamma_4+10}\equiv\boxed{2}+\frac{4\gamma_4+4}{7\gamma_4+3}\equiv\boxed{1}+\frac{3\gamma_4-1}{4\gamma_4+4},$$

$$A_4 = \frac{3\gamma_4 - 1}{4\gamma_4 + 4} = \frac{61 + \gamma_5 + 32}{92\gamma_5 + 48} \equiv \boxed{1} + \frac{31\gamma_5 + 16}{61\gamma_5 + 32} \equiv \boxed{1} + \frac{30\gamma_5 + 16}{31\gamma_5 + 16} \equiv \boxed{1} + \frac{\gamma_5}{30\gamma_5 + 16},$$

$$A_5 = \frac{\gamma_5}{30\gamma_5 + 16} = \frac{25\gamma_6 + 13}{782\gamma_6 + 406} \equiv \boxed{31} + \frac{7\gamma_6 + 3}{25\gamma_6 + 13} \equiv \boxed{3} + \frac{4\gamma_6 + 4}{7\gamma_6 + 3} \equiv \boxed{1} + \frac{3\gamma_6 - 1}{4\gamma_6 + 4},$$

$$\begin{aligned} A_6 = \frac{3\gamma_6 - 1}{4\gamma_6 + 4} &= \frac{85\gamma_7 + 44}{124\gamma_7 + 64} \equiv \boxed{1} + \frac{39\gamma_7 + 20}{85\gamma_7 + 44} \equiv \boxed{2} + \frac{7\gamma_7 + 4}{39\gamma_7 + 20} \\ &\equiv \boxed{5} + \frac{4\gamma_7}{7\gamma_7 + 4} \equiv \boxed{1} + \frac{3\gamma_7 + 4}{4\gamma_7}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_7 = \frac{3\gamma_7 + 4}{4\gamma_7} &= \frac{107\gamma_8 + 55}{132\gamma_8 + 68} \equiv \boxed{1} + \frac{25\gamma_8 + 13}{107\gamma_8 + 55} \equiv \boxed{4} + \frac{7\gamma_8 + 3}{25\gamma_8 + 13} \\ &\equiv \boxed{3} + \frac{4\gamma_8 + 4}{7\gamma_8 + 3} \equiv \boxed{1} + \frac{3\gamma_8 - 1}{4\gamma_8 + 4}, \end{aligned}$$

$$A_8 = \frac{3\gamma_8 - 1}{4\gamma_8 + 4} = \frac{109\gamma_9 + 56}{156\gamma_9 + 80} \equiv \boxed{1} + \frac{47\gamma_9 + 24}{109\gamma_9 + 56} \equiv \boxed{2} + \frac{15\gamma_9 + 8}{47\gamma_9 + 24} \equiv \boxed{3} + \frac{2\gamma_9}{15\gamma_9 + 8},$$

$$\begin{aligned} A_9 = \frac{2\gamma_9}{15\gamma_9 + 8} &= \frac{82\gamma_{10} + 42}{631\gamma_{10} + 323} \equiv \boxed{7} + \frac{57\gamma_{10} + 29}{82\gamma_{10} + 42} \equiv \boxed{1} + \frac{25\gamma_{10} + 13}{57\gamma_{10} + 29} \\ &\equiv \boxed{2} + \frac{7\gamma_{10} + 3}{25\gamma_{10} + 13} \equiv \boxed{3} + \frac{4\gamma_{10} + 4}{7\gamma_{10} + 3} \equiv \boxed{1} + \frac{3\gamma_{10} - 1}{4\gamma_{10} + 4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{10} = \frac{3\gamma_{10} - 1}{4\gamma_{10} + 4} &= \frac{133\gamma_{11} + 68}{188\gamma_{11} + 96} \equiv \boxed{1} + \frac{55\gamma_{11} + 28}{133\gamma_{11} + 68} \equiv \boxed{2} + \frac{23\gamma_{11} + 12}{55\gamma_{11} + 28} \\ &\equiv \boxed{2} + \frac{9\gamma_{11} + 4}{23\gamma_{11} + 12} \equiv \boxed{2} + \frac{5\gamma_{11} + 4}{9\gamma_{11} + 4} \equiv \boxed{1} + \frac{4\gamma_{11}}{5\gamma_{11} + 4} \equiv \boxed{1} + \frac{\gamma_{11} + 4}{4\gamma_{11}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11} = \frac{\gamma_{11} + 4}{4\gamma_{11}} &= \frac{57\gamma_{12} + 29}{196\gamma_{12} + 100} \equiv \boxed{3} + \frac{25\gamma_{12} + 13}{57\gamma_{12} + 29} \\ &\equiv \boxed{2} + \frac{7\gamma_{12} + 3}{25\gamma_{12} + 13} \equiv \boxed{3} + \frac{4\gamma_{12} + 4}{7\gamma_{12} + 3} \equiv \boxed{1} + \frac{3\gamma_{12} - 1}{4\gamma_{12} + 4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} = \frac{3\gamma_{12} - 1}{4\gamma_{12} + 4} &= \frac{157\gamma_{13} + 80}{220\gamma_{13} + 112} \equiv \boxed{1} + \frac{63\gamma_{13} + 32}{157\gamma_{13} + 80} \equiv \boxed{2} + \frac{31\gamma_{13} + 16}{63\gamma_{13} + 32} \\ &\equiv \boxed{2} + \frac{\gamma_{13}}{31\gamma_{13} + 16}. \end{aligned}$$

Определим теперь выражения вида $A_{13+8t}, \dots, A_{20+8t}$ $(t = 0, 1, 2, \dots)$. С этой целью определим сначала, в силу (2.12),

$$\gamma_{13+8t} = \frac{(57+32t)\gamma_{14+8t} + (29+16t)}{2\gamma_{14+8t}+1}, \quad \gamma_{14+8t} = \frac{(61+32t)\gamma_{15+8t} + (31+16t)}{2\gamma_{15+8t}+1},$$

$$\gamma_{15+8t} = \frac{(65+32t)\gamma_{16+8t} + (33+16t)}{2\gamma_{16+8t}+1}, \quad \gamma_{16+8t} = \frac{(69+32t)\gamma_{17+8t} + (35+16t)}{2\gamma_{17+8t}+1},$$

$$\gamma_{17+8t} = \frac{(73+32t)\gamma_{18+8t} + (37+16t)}{2\gamma_{18+8t}+1}, \quad \gamma_{18+8t} = \frac{(77+32t)\gamma_{19+8t} + (39+16t)}{2\gamma_{19+8t}+1},$$

$$\gamma_{19+8t} = \frac{(81+32t)\gamma_{20+8t} + (41+16t)}{2\gamma_{20+8t}+1}, \quad \gamma_{20+8t} = \frac{(85+32t)\gamma_{21+8t} + (43+16t)}{2\gamma_{21+8t}+1}.$$

Теперь находим

$$\begin{aligned}
A_{13+8t} &= \frac{\gamma_{13+8t}}{31\gamma_{13+8t}+1} = \frac{(57+32t)\gamma_{14+8t} + (29+16t)}{(1799+992t)\gamma_{14+8t} + (915+496t)} \\
&\equiv \boxed{31} + \frac{328\gamma_{14+8t}+16}{(57+32t)\gamma_{14+8t} + (29+16t)} \equiv \boxed{(t+1)} + \frac{25\gamma_{14+8t}+13}{32\gamma_{14+8t}+16} \\
&\equiv \boxed{1} + \frac{7\gamma_{14+8t}+3}{25\gamma_{14+8t}+13} \equiv \boxed{3} + \frac{4\gamma_{14+8t}+4}{7\gamma_{14+8t}+3} \equiv \boxed{1} + \frac{3\gamma_{14+8t}-1}{4\gamma_{14+8t}+4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{14+8t} &= \frac{3\gamma_{14+8t}-1}{4\gamma_{14+8t}+4} = \frac{(181+96t)\gamma_{15+8t} + (92+48t)}{(252+128t)\gamma_{15+8t} + (128+64t)} \\
&\equiv \boxed{1} + \frac{(71+32t)\gamma_{15+8t} + (36+16t)}{(181+96t)\gamma_{15+8t} + (92+48t)} \equiv \boxed{2} + \frac{(39+32t)\gamma + (20+16t)}{(71+32t)\gamma + (36+16t)} \\
&\equiv \boxed{1} + \frac{32\gamma+16}{(39+32t)+(20+16t)} \equiv \boxed{(t+1)} + \frac{7\gamma+4}{32\gamma+16} \equiv \boxed{4} + \frac{4\gamma}{7\gamma+4} \\
&\equiv \boxed{1} + \frac{3\gamma_{15+8t}+4}{4\gamma_{15+8t}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{15+8t} &= \frac{3\gamma_{15+8t}+4}{4\gamma_{13+8t}} = \frac{(203+96t)\gamma_{16+8t} + (103+48t)}{(260+128t)\gamma_{16+8t} + (132+64t)} \\
&\equiv \boxed{1} + \frac{(57+32t)\gamma + (29+16t)}{(203+96t)\gamma + (103+48t)} \equiv \boxed{3} + \frac{32\gamma+16}{(57+32t)\gamma + (29+16t)} \\
&\equiv \boxed{(t+1)} + \frac{25\gamma+13}{32\gamma+16} \equiv \boxed{1} + \frac{7\gamma+3}{25\gamma+13} \equiv \boxed{3} + \frac{4\gamma+4}{7\gamma+3} \equiv \boxed{1} + \frac{3\gamma_{16+8t}-1}{4\gamma_{16+8t}+4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{16+8t} &= \frac{3\gamma_{16+8t}-1}{4\gamma_{16+8t}+4} = \frac{(205+96t)\gamma_{17+8t}+(104+48t)}{(284+128t)\gamma_{17+8t}+(144+64t)} \\ &\equiv \boxed{1} + \frac{(74+32t)\gamma+(40+16t)}{(205+96t)\gamma+(104+48t)} \equiv \boxed{2} + \frac{(47+32t)\gamma+(24+16t)}{(79+32t)\gamma+(40+16t)} \\ &\equiv \boxed{1} + \frac{32\gamma+16}{(47+32t)\gamma+(24+16t)} \equiv \boxed{(t+1)} + \frac{15\gamma+8}{32\gamma+16} \equiv \boxed{2} + \frac{2\gamma_{17+8t}}{15\gamma_{17+8t}+8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{17+8t} &= \frac{2\gamma_{17+8t}}{15\gamma_{17+8t}+8} = \frac{(146+64t)\gamma_{18+8t}+(74+32t)}{(1111+480t)\gamma_{18+8t}+(563+240t)} \\ &\equiv \boxed{7} + \frac{(89+32t)\gamma+(45+16t)}{(146+64t)\gamma+(74+32t)} \equiv \boxed{1} + \frac{(57+32t)\gamma+(29+16t)}{(89+32t)\gamma+(45+16t)} \\ &\equiv \boxed{1} + \frac{32\gamma+16}{(57+32t)\gamma+(29+16t)} \equiv \boxed{(t+1)} + \frac{25\gamma+13}{32\gamma+16} \equiv \boxed{1} + \frac{7\gamma+3}{25\gamma+13} \\ &\equiv \boxed{3} + \frac{4\gamma+4}{7\gamma+3} \equiv \boxed{1} + \frac{3\gamma_{18+8t}-1}{4\gamma_{18+8t}+4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{18+8t} &= \frac{3\gamma_{18+8t}-1}{4\gamma_{18+8t}+4} = \frac{(229+96t)\gamma_{19+8t}+(116+48t)}{(316+128t)\gamma_{19+8t}+(160+64t)} \\ &\equiv \boxed{1} + \frac{(87+32t)\gamma+(44+16t)}{(229+96t)\gamma+(116+48t)} \equiv \boxed{2} + \frac{(55+32t)\gamma+(28+16t)}{(87+32t)\gamma+(44+16t)} \\ &\equiv \boxed{1} + \frac{32\gamma+16}{(55+32t)\gamma+(28+16t)} \equiv \boxed{(t+1)} + \frac{23\gamma+12}{32\gamma+16} \equiv \boxed{1} + \frac{9\gamma+4}{23\gamma+12} \\ &\equiv \boxed{2} + \frac{5\gamma+4}{9\gamma+4} \equiv \boxed{1} + \frac{4\gamma_{19+8t}}{5\gamma_{19+8t}+4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{19+8t} &= \frac{4\gamma_{19+8t}}{5\gamma_{19+8t}+4} = \frac{(324+128t)\gamma_{20+8t}+(164+64t)}{(413+160t)\gamma_{20+8t}+(209+80t)} \\ &= \Big[0;1,3,1,t+1,1,3,1,\frac{4\gamma_{20+8t}+4}{3\gamma_{20+8t}-1}\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{20+8t} &= \frac{3\gamma_{20+8t}-1}{4\gamma_{20+8t}+4} = \frac{(253+96t)\gamma_{21+8t}+(128+48t)}{(348+128t)\gamma_{21+8t}+(176+64t)} \\ &= \Big[0;1,2,1,t+1,1,\frac{31\gamma_{21+8t}+16}{\gamma_{21+8t}}\Big].\end{aligned}$$

Отсюда, по индукции, следует утверждение теоремы (2.4). ▷

Примечание. *Очевидно, что числа вила* $\frac{a}{b}e+\frac{c}{d}$, $a,c\in\mathbb{Z}$, $b,d\in\mathbb{N}$, *можно представить в виде непрерывной арифметической дроби.*

Теорема 2.5. *Пусть α — цепная дробь из равенств (2.1)–(2.7) (2.10), (2.11). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < (c+\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q},$$

имеет бесконечно много решений в числах $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ такое, что $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > (c-\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q}$$

для всех целых p и q верно $q \geq q'(\varepsilon)$.

При этом

1) при $\alpha = 2e$ $c = 1$, 2) при $\alpha = 3e$ $c = \frac{3}{2}$, 3) при $\alpha = 4e$ $c = 2$,
4) при $\alpha = \frac{e}{2}4$ $c = 1$, 5) при $\alpha = \frac{e}{3}$ $c = \frac{1}{6}$, 6) при $\alpha = \frac{e}{4}$ $c = 2$,
7) при $\alpha = \frac{3e}{2}$ $c = 3$, 8) при $\alpha = \frac{39e+10}{15e+4}$ $c = 3$, 9) при $\alpha = e + \frac{3}{4}$ $c = 8$.

3. О разложении чисел вида ae^2, $a^{-1}e^2$, $ab^{-1}e^2$, $(ae^2+b)(ce^2+d)^{-1}$, $e^2 + \frac{a}{b}$

Имеют место разложения $ae^2, a^{-1}e^2, ab^{-1}e^2, a, b \in \mathbb{N}$. Как и в параграфе 2 приведем доказательство для случая $2e^2$, $\frac{1}{3}e^2$, $\frac{2}{3}e^2$.

Теорема 3.1. *Имеют место разложения*

$$2e^2 = [14; 1, \overline{3, 1, 1+3n, 36+48n, 2+3n, 1, 3, 3+3n, 60+48n, 4+3n}]_{n=0}^{\infty} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}e^2 =&[2; 2, 6, 3, 1, \overline{5+8n, 2, 1, 1+2n, 5, 1, 1+2n, 2, 1, 9+8n,}\\ &\overline{2, 1, 2n+2, 5, 1, 2+2n, 2, 1}]_{n=0}^{\infty}\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}e^2 =&[4; 1, 12, 1, 1, 11, 1, 3, 1, 2, 3, 2, 38, 2, 11, 2, 2, \overline{27+16n, 1, 2, 1+n,}\\ &\overline{1, 1, 2, 2, 1+n, 1, 2, 35+16n, 1, 2, 2+n, 11, 1, 1+n, 1, 2}]_{n=0}^{\infty}\end{aligned} \tag{3.3}$$

$\lhd$ *Из разложения (1.15) находим, что*

$$2e^2 = [14; 1, \underbrace{2, \tfrac{1}{2}}_{\gamma_1}, \underbrace{6, 9}_{\gamma_2}, \underbrace{10, \tfrac{1}{2}}_{\gamma_3}, \underbrace{2, 3}_{\gamma_4}, \underbrace{60, 4}_{\gamma_5}, \underbrace{2, \tfrac{1}{2}}_{\gamma_{1+5}}, \underbrace{18, 21}_{\gamma_{2+5}}, \underbrace{22, \tfrac{1}{2}}_{\gamma_{3+5}}, \underbrace{2, 6}_{\gamma_{4+5}}, \underbrace{108, 7}_{\gamma_{5+5}}, ...].$$

Определим

$$\gamma_{5n+1}, \gamma_{5n+2}, \gamma_{5n+3}, \gamma_{5n+4}, \gamma_{5n+5}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\gamma_{5n+1} = \left[2; \frac{1}{2}, \gamma_{5n+2}\right] = \left[3; 1 + \frac{4}{\gamma_{5n+2} - 2}\right];$$

$$\gamma_{5n+2} = [6 + 12n, 9 + 18n, \gamma_{5n+3}] = \frac{(55 + 180n + 144n^2)\gamma_{5n+3} + (6 + 12n)}{(9 + 18n)\gamma_{5n+3} + 1},$$

$$\frac{\gamma_{5n+2} - 2}{4} = \frac{(37 + 256n + 144n^2)\gamma_{5n+3} + (4 + 12n)}{(36 + 48n)\gamma_{5n+3} + 4} = \left[3n + 1; 36 + 48n, \frac{\gamma_{5n+3}}{4}\right],$$

$$\gamma_{5n+3} = \left[10 + 12n; \frac{1}{2}, \gamma_{5n+4}\right] = \frac{(12 + 12n)\gamma_{5n+4} + (20 + 24n)}{\gamma_{5n+4} + 2},$$

$$\frac{\gamma_{5n+3}}{4} = \frac{(12 + 12n)\gamma_{5n+4} + (20 + 24n)}{4\gamma_{5n+4} + 8} = [3n + 2; 1, \gamma_{5n+4} + 1],$$

$$\gamma_{5n+4} = [2; 3 + 3n, \gamma_{5n+5}], \quad \gamma_{5n+4} + 1 = [3; 3 + 3n, \gamma_{5n+5}],$$

$$\gamma_{5n+5} = [60 + 48n; 4 + 3n, \gamma_{5n+6}].$$

Отсюда, по индукции, следует требуемое разложение (3.1).

Докажем теперь (3.2). На основе разложения (1.15) напишем, что

$$\frac{1}{3}e^2 = \Big[\frac{7}{3}; 6, \frac{1}{3}, 3, 1, \overline{54 + 72n, \frac{5 + 6n}{2}, 3, \frac{1}{3}, 18 + 18n, 10 + 8n,}$$
$$\overline{24 + 18n, \frac{1}{3}, 3, 3 + 2n}\Big]_{n=0}^{\infty}.$$

Положим

$$\gamma_0 = \frac{7}{3} + \frac{1}{\gamma_1} = \frac{7\gamma_1 + 3}{3\gamma_1} = 2 + \frac{\gamma_1 + 3}{3\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \left[6; \frac{1}{3}, 3, 1, \gamma_2\right] = \frac{54\gamma_2 + 4}{7\gamma_2 + 6},$$

$$\left(\frac{\gamma_1 + 3}{3\gamma_1}\right)^{-1} = \left(\frac{75\gamma_2 + 63}{162\gamma_2 + 135}\right)^{-1} = \left[2; 6, 3, 1, \frac{\gamma_2 - 6}{9}\right],$$

$$\gamma_2 = \left[54; \frac{5}{3}, \gamma_3\right] = \frac{273\gamma_3 + 162}{5\gamma_3 + 3}, \quad \frac{\gamma_2 - 6}{9} = [5; 2, 1, 1, \gamma_3],$$

$$\gamma_3 = \left[3; \frac{1}{3}, 18, 10, \gamma_4\right] = \frac{1176\gamma_4 + 117}{211\gamma_4 + 21} = \left[5; 1, 1, 2, 1, 9, 2, 1, \frac{\gamma_2 - 6}{9}\right].$$

Применим метод индукции. Положим, что

$$\gamma_{3n+2} = \left[54 + 72n; \frac{5+6n}{3}, \gamma_{3n+3}\right], \quad \gamma_{3n+3} = \left[3; \frac{1}{3}, 18+18n, 10+8n, \gamma_{3n+4}\right],$$

$$\gamma_{3n+4} = \left[24 + 18n; \frac{1}{3}, 3, 3+2n, \gamma_{3n+5}\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Далее, находим

$$\gamma_0 = 2 + \frac{\gamma_1 + 3}{3\gamma_1} = 2 + \frac{75\gamma_2 + 63}{162\gamma_2 + 135} = \left[2; 2, 6, 3, 1 + \frac{9}{\gamma_2 - 6}\right],$$

$$\frac{\gamma_2 - 6}{9} = [5; 2, 1, 1, \gamma_3], \quad \gamma_3 = \left[5; 1, 1, 2, 9, 2, 1, \frac{\gamma_4 - 6}{9}\right].$$

Вычислим $\frac{\gamma_{3n+2}-6}{9}$. *С этой целью найдем*

$$\gamma_{3n+2} = \frac{(273 + 684n + 432n^2)\gamma_{3n+3} + (162 + 216n)}{(5+6n)\gamma_{3n+3} + 3},$$

$$\frac{\gamma_{3n+2} - 6}{9} = \frac{(243 + 648n + 432n^2)\gamma_{3n+3} + (144 + 216n)}{(45 + 54n)\gamma_{3n+3} + 27}$$
$$= [8n + 5; 2, 1, 1 + 2n, \gamma_{3n+3}],$$

$$\gamma_{3n+3} = \frac{(1176 + 2016 + 864n^2)\gamma_{3n+4} + (117 + 108n)}{(211 + 348n + 144n^2)\gamma_{3n+4} + (21 + 18n)}$$
$$= \left[5; 1, 2+2n, 2, 1, 9+8n, 2, 1, \frac{\gamma_{3n+4} - 6}{9}\right],$$

$$\gamma_{3n+4} = \frac{(486 + 648n + 216n^2)\gamma_{3n+5} + (153 + 108n)}{(19 + 12n)\gamma_{3n+5} + 6},$$

$$\frac{\gamma_{3n+4} - 6}{9} = \frac{(372 + 576n + 216n^2)\gamma_{3n+5} + (117 + 108n)}{(171 + 108n)\gamma_{3n+5} + 54}$$
$$= \left[2 + 2n; 5, 1, 2+2n, 2, 1, \frac{\gamma_{3n+5} - 6}{9}\right].$$

Отсюда следует равенство (3.2).

Наконец, докажем равенство (3.3). С этой целью к разложению (3.2) применим разложение

$$\frac{2}{3}e^2 = \Big[4; 1, 12, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 4, \frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}, 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{2}, 18, 1, 2, 1, 10, \frac{1}{2}, 4, 1, 2,$$
$$\overline{\frac{13+8n}{2}, 4, \frac{1}{2}, 6+4n, \frac{5}{2}, 2, \frac{3+2n}{2}, 4, \frac{1}{2}, 34+16n, 1, 2, 2+n, 10, \frac{1}{2}, 8+4n, 1, 2}\Big]_{n=0}^{\infty}.$$

Положим

$$\gamma_0 = \Big[\frac{3}{2}; 2, \gamma_1\Big] = \frac{8\gamma_1+3}{4\gamma_1+2} = [1; 1, 4\gamma_1+1], \quad \gamma_1 = \Big[\frac{5}{2}; 4, \frac{1}{2}, 2, \gamma_2\Big] = \frac{27\gamma_2+8}{10\gamma_2+3},$$

$$4\gamma_1+1 = \frac{118\gamma_2+35}{10\gamma_2+3} = \Big[11; 1, 3, 1, \frac{2\gamma_2-1}{2}\Big], \quad \gamma_2 = \Big[\frac{5}{2}; 2, \frac{1}{2}, \gamma_3\Big] = \frac{11\gamma_3+12}{4\gamma_3+4},$$

$$\frac{2\gamma_2-1}{2} = \frac{9\gamma_3+10}{4\gamma_3+4} = \Big[2; 3, \frac{\gamma_3+2}{\gamma_3-2}\Big], \quad \gamma_3 = \Big[4; \frac{1}{2}, 18, 1, 2, 1, \gamma_4\Big] = \frac{466\gamma_4+230}{78\gamma_4+39},$$

$$\frac{\gamma_3+2}{\gamma_3-2} = \frac{624\gamma_4+308}{308\gamma_4+152} = [2; 38, 2, \gamma_4],$$

$$\gamma_4 = \Big[10; \frac{1}{2}, 4, 1, 2, \gamma_5\Big] = \frac{228\gamma_5+80}{20\gamma_5+7} = [11; 2, 2, 4\gamma_5+1],$$

$$\gamma_5 = \Big[\frac{13}{2}; 4, \frac{1}{2}, 6, \gamma_6\Big] = \frac{147\gamma_6+20}{22\gamma_6+3},$$

$$4\gamma_5+1 = \frac{610\gamma_6+83}{22\gamma_6+3} = \Big[27; 1, 2, 1, 1, 1, \frac{2\gamma_6-1}{2}\Big],$$

$$\gamma_6 = \Big[\frac{5}{2}; 2, \frac{3}{2}, \gamma_7\Big] = \frac{23\gamma_7+12}{8\gamma_7+4}, \quad \frac{2\gamma_6-1}{2} = \Big[2; 2, 1, 1, \frac{\gamma_7+2}{\gamma_7-2}\Big],$$

$$\gamma_7 = [4; \frac{1}{2}, 34, 1, 2, 2, \gamma_8] = \frac{250\gamma_8+107}{507\gamma_8+217} = [2; 35, 1, 2, 2, \gamma_8],$$

$$\gamma_8 = \Big[10; \frac{1}{2}, 8, 1, 2, \gamma_9\Big] = \frac{372\gamma_9+128}{32\gamma_9+12} = [11; 1, 1, 1, 2, 4\gamma_9+1].$$

Аналогично, находим

$$\gamma_{5+4n} = \Big[\frac{13+8n}{2}, 4, \frac{1}{2}, 6+4n, \gamma_{6+4n}\Big] = \frac{(147+168n+48n^2)\gamma_{6+4n}+(20n+12)}{(22+12)\gamma_{6+4n}+3},$$

$$\gamma_{6+4n} = \Big[\frac{5}{2}; 2, \frac{3+2n}{2}, \gamma_{7+4n}\Big] = \frac{(46+24n)\gamma_{7+4n}+24}{(16+8n)\gamma_{7+4n}+8},$$

$$\begin{aligned}\gamma_{7+4n} &= \left[4; \frac{1}{2}, 34+6n, 1, 2, 2+n, \gamma_{8+4n}\right] \\ &= \frac{(1514+1320n+288n^2)\gamma_{8+4n}+(648+288n)}{(257+222n+48n^2)\gamma_{8+4n}+(110+48n)},\end{aligned}$$

$$\gamma_{8+4n} = \left[10; \frac{1}{2}, 8+4n, 1, 2, \gamma_{9+4n}\right] = \frac{(372+144n)\gamma_{9+4n}+(128+48n)}{(32+12n)\gamma_{9+4n}+(11+4n)}.$$

Путем разложения в цепные дроби находим

$$\begin{aligned}4\gamma_{5+4n}+1 &= \frac{(610+684n+192n^2)\gamma_{6+4n}+(83+48n)}{(22+12n)\gamma_{6+4n}+3} \\ &= \left[16n+27; 1, 2, n+1, 1, 1, \frac{2\gamma_{6+4n}-1}{2}\right],\end{aligned}$$

$$\frac{2\gamma_{6+4n}-1}{2} = \frac{(38+20n)\gamma_{7+4n}+20}{(16+8n)\gamma_{7+4n}+8} = \left[2; 2, n+1, 1, \frac{\gamma_{7+8n}+2}{\gamma_{7+8n}-2}\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_{7+4n}+2}{\gamma_{7+4n}-2} &= \frac{(2028+1764n+384n^2)\gamma_{8+4n}+(868+384n)}{(1000+876n+192n^2)\gamma_{8+4n}+(428+192n)} \\ &= [2; 16n+35, 1, 2, 2+n, \gamma_{8+4n}],\end{aligned}$$

$$\gamma_{8+4n} = [11; 1, n+1, 1, 2, 4\gamma_{9+4n}+1].$$

Отсюда, по индукции, следует требуемое разложение (3.3). $\rhd$

Теорема 3.2. *Имеет место разложение*

$$\begin{aligned}\frac{24e^2+15}{10e^2+6} =& [1; 1, 2, 2, 4, 1, 12, 1, 1, 11, 1, 3, 1, 2, 3, 2, 38, 2, 11, 2, 2, \\ & \overline{16n+27, 1, 2, n+1, 1, 1, 2, 2, n+1, 1, 2, 16n+35,} \\ & \overline{1, 2, 2+n, 11, 1, n+1, 1, 2}]_{n=0}^{\infty}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

$\lhd$ *Разложение*

$$\frac{24e^2+15}{10e^2+6} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{2}{3}e^2}}}$$

дает требуемое разложение (на основе (3.3)). $\rhd$

Теорема 3.3. *Имеет место разложение*

$$\begin{aligned} e^2+\frac{1}{2} =&[7;1,8,73,\overline{1+3n,2,1,1,1,1+3n,120+192n,2+3n,7,}\\ &\overline{1,1+3n,1,1,41+48n,1,1,2+3n,2,1,1,1,2+3n,}\\ &\overline{1,1,53+48n,1,1,3+3n,7,1,3+3n,264+92n}]_{n=0}^{\infty}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

◁ *Из разложения*

$$\begin{aligned} e^2 &= [7;\overline{3n+2,1,1,3n+3,12n+18}]_{n=0}^{\infty}\\ &=[7;2,1,1,3,18,5,1,1,6,30,8,1,1,9,42,11,1,1,12,54,14,1,1,15,16,\ldots] \end{aligned}$$

последовательно находим

$$\gamma_0=[7;2,1,1,3,18,\gamma_1]=\frac{2431\gamma_1+133}{329\gamma_1+18},\quad \gamma_0+\frac{1}{2}=\frac{5191\gamma_1+284}{658\gamma_1+36}=\Big[7;1,8,73,\frac{\gamma_1}{4}\Big],$$

$$\gamma_1=[5;1,1,6,30,\gamma_2]=\frac{2171\gamma_2+72}{392\gamma_2+13},\quad \frac{\gamma_1}{4}=\frac{2171\gamma_2+72}{1568\gamma_2+52}=\Big[1;2,1,1,1,1,120,\frac{\gamma_2}{4}\Big],$$

$$\gamma_2=[8,1,1,9,42,\gamma_3]=\frac{682\gamma_3+162}{800\gamma_3+19},$$

$$\frac{\gamma_2}{4}=\frac{682\gamma_3+162}{3200\gamma_3+76}=\Big[2;7,1,1,1,1,41,1,1,\frac{\gamma_3-2}{4}\Big],$$

$$\gamma_3=[11;1,1,12,54,\gamma_4]=\frac{15575\gamma_4+288}{1352\gamma_4+25},$$

$$\frac{\gamma_3-2}{4}=\frac{12871\gamma_4+238}{5408\gamma_4+100}=\Big[2;2,1,1,1,2,1,1,53,1,1,\frac{\gamma_4-2}{4}\Big],$$

$$\gamma_4=[14;1,1,15,66,\gamma_5]=\frac{29729\gamma_5+450}{2048\gamma_5+31},$$

$$\frac{\gamma_4-2}{4}=\frac{25623\gamma_5+388}{8192\gamma_5+124}=\Big[3;7,1,3,264,\frac{\gamma_5}{4}\Big].$$

Применим метод полной математической индукции. Введем предварительно оценки по $n=0,1,2,\ldots$

$$\begin{aligned} \gamma_{4n+1}&=[5+12n;1,1,6+12n,30+48n,\gamma_{4n+2}],\\ \gamma_{4n+2}&=[8+12n;1,1,9+12n,42+48n,\gamma_{4n+3}],\\ \gamma_{4n+3}&=[11+12n;1,1,12+12n,54+48n,\gamma_{4n+4}],\\ \gamma_{4n+4}&=[14+12n;1,1,15+12n,66+48n,\gamma_{4n+5}]. \end{aligned}$$

Далее находим

$$\frac{1}{4}\gamma_{4n+1} = \frac{(2171+12120n+22464n^2+1382n^3)\gamma_{4n+2}+(72+288n+281n^2)}{(1568+5376n+4608n^2)\gamma_{4n+2}+(52+96n)}$$
$$= \left[1+3n; 2, 1, 1, 1, 1+3n, 120+192n, \frac{\gamma_{4n+2}}{2}\right],$$

$$\frac{1}{4}\gamma_{4n+2} = \frac{(682+25944n+32832n^2+13824n^3)\gamma_{4n+3}+(162+432n+288n^2)}{(3200+7680n+4608n^2)\gamma_{4n+3}+(76+96n)}$$
$$= \left[2+3n; 7, 1, 1+3n, 1, 1, 41+48n, 1, 1, \frac{\gamma_{4n+3}-2}{4}\right],$$

$$\frac{\gamma_{4n+3}-2}{4} = \frac{(12871+39960n+40896n^2+13824n^3)\gamma_{4n+4}+(238+528n+288n^2)}{(5408+9984n+4608n^2)\gamma_{4n+4}+(100+96n)}$$
$$= \left[2+3n; 2, 1, 1, 1, 2+3n, 1, 1, 53+48n, 1, 1, \frac{\gamma_{4n+4}-2}{4}\right].$$

Отсюда находим

$$\frac{\gamma_{4n+4}-2}{4} = \frac{(25633+63000n+51264n^2+13824n^3)\gamma_{4n+5}+(388+672n+288n^2)}{(8192+12288n+4608n^2)\gamma_{4n+5}+(124+96n)}$$
$$= \left[3+3n; 7, 1, 3+3n, 264+190n, \frac{\gamma_{4n+5}}{4}\right].$$

γ_{4n+5} *получаем из* γ_{4n+1}, *заменив* n *на* $n+1$.

Таким образом, из разложений $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ *находим разложения в цепную дробь (3.5).* $\triangleright$

Теорема 3.5. *Пусть* α *— цепная дробь из равенств (3.1)–(3.5). Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < (c+\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах $p, q \in \mathbb{N}$.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ *такое, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > (c-\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q}$$

для всех целых p, q *таких, что* $q \geq q'(\varepsilon)$.

При этом

1) при $\alpha = 2e^2$ $\quad c = \frac{1}{8}$,
2) при $\alpha = \frac{1}{3}e^2$ $\quad c = \frac{3}{4}$,
3) при $\alpha = \frac{2}{3}e^2$ $\quad c = \frac{3}{8}$,
4) при $\alpha = \frac{24e^2+15}{10e^2+6}$ $\quad c = \frac{3}{8}$,
5) при $\alpha = e^2 + \frac{1}{2}$ $\quad c = \frac{1}{16}$.

Литература

1. *Бухштаб А. А. Теория чисел.—М.: Просвещение, 1966.*
2. *Галочкин А. И. и др. Введение в теорию чисел.—М.: МГУ, 1984.*
3. *Ленг С. Введение в теорию диофантовых приближений.—М.: Мир, 1970.*
4. *Тасоев Б. Г. О рациональных приближениях к некоторым бесконечным цепным дробям: Афтореф.—М., 1977.*
5. *Хинчин А. Я. Цепные дроби.—М.: Наука, 1978.*
6. *Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа.—М.: ГИТТЛ, 1956.*
7. *Шидловский А. Б. Диофантовы приближения и трансцендентные числа.—М.: МГУ, 1982.*
8. *Эйлер Л. Введение в анализ.—М.: Физматгиз, 1961.*
9. *Davis C. S. Rational approximation to e // Austral Math. Soc. (Ser. A).—1978.—V. 25.—P. 497–502.*
10. *Devis C. S. A note on rational approximation // Bull Austral. Math. Soc.—1979.—V. 20.—P. 407–410.*
11. *Perron O. Die Zehre von der Kettenbuchen, Dand I.—Stuttgart: Tenbner, 1954.*
12. *Schiokawa J. Number Theory and Combinatories Jaran.—Singapore: Wored Scientific Pub. Co, 1985.—P. 353–367.*
13. *Takeshi O. A note on the rational approximationa to e // Tokyo J. Math.—1992.—V. 15, No. 1.—P. 129–133.*
14. *Takeshi O. A note on the rational approximations to tank // Pruc. Jan. Acad A.—1993.—No. 6.—P. 161–163.*