Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2001, Том 3, Выпуск 1

УДК **517.5**

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Ш. С. Хубежты

Задача нахождения приближенного значения интеграла Римана исследована достаточно подробно. Построены квадратурные формулы для разных классов функций. Аналогичная теория для сингулярных интегралов начала развиваться значительно позже. В настоящей заметке дается анализ имеющихся квадратурных формул для сингулярных интегралов и приводятся новые квадратурные формулы.

Задача нахождения приближенного значения интеграла Римана исследована достаточно подробно. Построены квадратурные формулы для разных классов функций (см. [1]). Аналогичная теория для сингулярных интегралов начала развиваться значительно позже [2]. На современном этапе благодаря работам Лифанова И. К., Саникидзе Д. Г., Шешко М. А. и других существуют достаточно развитые численные методы.

В настоящей заметке дается анализ имеющихся квадратурных формул для сингулярных интегралов и приводятся новые квадратурные формулы.

1. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов типа Ньютона — Котеса

Рассматривается сингулярный интеграл в смысле главного значения следующего вида

$$S(f;x) = \int_a^b \frac{f(t)}{t-x}dt, \quad a < x < b, \tag{1}$$

где $f(t)$ — функция класса $H_r(\alpha)$ $(0 < \alpha \le 1)$. Это означает, что f имеет непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, вплоть до порядка $r \ge 1$ и производная $f^{(r)}$ удовлетворяет условию Гёльдера с параметром α. Разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками x_k $(k = 0, 1, \dots, n)$, где $x_k = a + kh,\ h = (b-a)/n$.

Среди квадратурных формул для регулярных интегралов построены широко известные и часто применяемые формулы Ньютона-Котеса. Они имеют вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^n f(x_k), \tag{2}$$

где

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!(n-k)!}\int_0^n t(t-1)\dots(t-k+1)(t-k-1)\dots(t-n)dt.$$

В частности, при $n=1$ имеем формулу трапеций; при $n=2$ — формулу Симпсона; при $n=3$ формулу $3/8$ и т. д.

Аналогичные формулы можно построить для сингулярного интеграла (1) следующим образом.

Построим для функции $f(t)$ интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(f;t) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{w(t)}{(t-x_k)w'(x_k)} f(x_k), \tag{3}$$

где

$$w(t) = \sum_{j=0}^{n}(t-x_j), w'(x_k) = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j).$$

Подставляя вместо $f(t)$ его интерполяционный многочлен в (1), получим

$$\begin{aligned} S_n(f;x) &\equiv \int_a^b \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{w(t)}{(t-x_k)w'(x_k)} f(x_k)}{t-x} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{w'(x_k)} \int_a^b \frac{w(t)dt}{(t-x_k)(t-x)} f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x-x_k)w'(x_k)} \left(\int_a^b \frac{w(t)}{t-x}dt - \int_a^b \frac{w(t)}{t-x_k}dt \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим отдельно полученные два интеграла. Для первого выполним следующее преобразование

$$\int_a^b \frac{w(t)}{t-x}dt = \int_a^b \frac{w(t)-w(x)}{t-x}dt + w(x)\int_a^b \frac{dt}{t-x}.$$

Здесь подинтегральное выражение $\frac{w(t)-w(x)}{t-x}$ представляет собой многочлен n-го порядка, поэтому интеграл можно точно вычислить с помощью выше указанных квадратурных формул Ньютона — Котеса (см. [1]). Тогда

$$\int_a^b \frac{w(t)-w(x)}{t-x}dt = \sum_{k=0}^n A_k \frac{w(x_k)-w(x)}{x_k-x} = \sum_{k=0}^n A_k \frac{w(x)}{x-x_k} \equiv H_n(x), \qquad (5)$$

где $A_k = (b-a)\cdot B_k^n$. Таблица этих коэффициентов дана в [1].

Второй интеграл можно вычислить аналогично, на основе следующего преобразования:

$$\int_a^b \frac{w(t)}{t-x_k}dt = \int_a^b \frac{w(t)-w(x_k)}{t-x_k}dt = \sum_{j=0}^n A_j \frac{w(x_j)-w(x_k)}{x_j-x_k} = A_k w'(x_k). \qquad (6)$$

Учитывая (5) и (6) из (4) окончательно получаем

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x-x_k)w'(x_k)} \left(H_n(x) + w(x)\ln\frac{b-x}{x-a} - A_k w'(x_k) \right) f(x_k). \qquad (7)$$

Равенство (7) является приближенной формулой для сингулярных интегралов вида (1).

Подставляя в (7) вместо x средние значения между двумя узлами, т. е. $x = \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, получим все значения интеграла (1). Для вычисления значений в точках x_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ надо взять в (7) соответствующие пределы при $x \to x_k$.

Оценим погрешность квадратурной формулы (7). Как известно

$$f(x) = L_n(f;x) + R_n(f;x),$$

где

$$R_n(f;x) = \frac{w(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Тогда

$$\mid S(f;x) - S_n(f;x) \mid = \left| \int_a^b \frac{R_n(f;t)}{t-x}dt \right|.$$

Оценим последнее выражение:

$$\int_a^b \frac{R_n(f;t)}{t-x}dt = R_n(f;x)\ln\frac{b-x}{x-a} + \int_a^b \frac{R_n(f;t)-R_n(f;x)}{t-x}dt.$$

Из общей теории оценок для сингулярных интегралов в классе функции $H_r(\alpha)$ (см. [2, 4, 5, 6]), получим

$$| S(f;x) - S_n(f;x) | \leq \max_{x\in[a,b]} | R_n(f;x) | \left|\ln\frac{b-x}{x-a}\right| + O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right)$$
$$= O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)\left(\left|\ln\frac{b-x}{x-a}\right| + O(\ln n)\right) \quad (n>1).$$

Рассмотрим два частныч случая $n = 1$ и $n = 2$.

Пусть $n = 1$. Тогда $A_0 = (b-a)/2, \quad A_1 = (b-a)/2$ и

$$S_1(f;x) = \frac{1}{(x-a)w'(a)}\left(H_1(x) + w(x)\ln\frac{b-x}{x-a} - \frac{b-a}{2}w'(a)\right)f(a)$$
$$+\frac{1}{(x-b)w'(b)}\left(H_1(x) + w(x)\ln\frac{b-x}{x-a} - \frac{b-a}{2}w'(b)\right)f(b), \tag{8}$$

где

$$w'(a) = a-b, \quad w'(b) = b-a, \quad w(x) = (x-a)(x-b),$$
$$H_1(x) = A_0\frac{w(x)}{x-a} + A_1\frac{w(x)}{x-b}.$$

Формула (8) называется элементарной формулой типа трапеций для сингулярных интегралов (1). Сложная формула трапеций будет иметь вид

$$S_1^n(f;x) = \frac{1}{(x-a)w_0'(a)}\left(H_{10}(x) + w_0(x)\ln\left|\frac{x_1-x}{x-a}\right| - \frac{h}{2}w_0'(a)\right)f(a)$$
$$+\frac{1}{(x-x_1)w_0'(x_1)}\left(H_{10}(x) + w_0(x)\ln\left|\frac{x_1-x}{x-a}\right| - \frac{h}{2}w_0'(x_1)\right)f(x_1)$$
$$+\frac{1}{(x-x_1)w_1'(x_1)}\left(H_{11}(x) + w_1(x)\ln\left|\frac{x_2-x}{x-x_1}\right| - \frac{h}{2}w_1'(x_1)\right)f(x_1)$$
$$+\frac{1}{(x-x_2)w_1'(x_2)}\left(H_{11}(x) + w_1(x)\ln\left|\frac{x_2-x}{x-x_1}\right| - \frac{h}{2}w_1'(x_2)\right)f(x_2) \tag{9}$$
$$+\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$+\frac{1}{(x-x_{n-1})w_{n-1}'(x_{n-1})}\times$$
$$\times\left(H_{1,n-1}(x) + w_{n-1}(x)\ln\left|\frac{b-x}{x-x_{n-1}}\right| - \frac{h}{2}w_{n-1}'(x_{n-1})\right)f(x_{n-1})$$

$$+\frac{1}{(x-b)w'_{n-1}(b)}\left(H_{1,n-1}(x)+w_{n-1}(x)\ln\left|\frac{b-x}{x-x_{n-1}}\right|-\frac{h}{2}w'_{n-1}(b)\right)f(b),$$

$$w_k(x)=(x-x_k)\cdot(x-x_{k+1}),\quad w'_k(x_k)=x_k-x_{k+1},\quad w'_k(x_{k+1})=x_{k+1}-x_k,$$

$$H_{1k}(x)=\frac{A_0}{x-x_k}+\frac{A_1}{x-x_{k+1}},\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Формулу (9) можно переписать так

$$S_1^n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}A_k(x)f(x_k),$$

где

$$A_k(x)=\frac{1}{(x-x_k)w'_{k-1}(x_k)}\left(H_{1,k-1}(x)+w_{k-1}(x)\ln\mid\frac{x_k-x}{x-x_{k-1}}\mid-\frac{h}{2}w'_{k-1}(x_k)\right)$$
$$+\frac{1}{(x-x_k)w'_k(x_k)}\left(H_{1,k}(x)+w_k(x)\ln\mid\frac{x_{k+1}-x}{x-x_k}\mid-\frac{h}{2}w'_k(x_k)\right)$$
$$(k=1,\dots,n-1),$$

$$A_0(x)=\frac{1}{(x-a)w'_0(a)}\left(H_{10}(x)+w_0(x)\ln\mid\frac{x_1-x}{x-a}\mid-\frac{h}{2}w'_0(a)\right),$$

$$A_n(x)=\frac{1}{(x-b)w'_{n-1}(b)}\left(H_{1,n-1}(x)+w_{n-1}(x)\ln\left|\frac{b-x}{x-x_{n-1}}\right|-\frac{h}{2}w'_{n-1}(b)\right).$$

Для погрешности справедлива оценка

$$\mid R_1(f;x)\mid=O\left(\frac{\ln n}{n^{2+\alpha}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right)\left|\ln\frac{b-x}{x-a}\right|.$$

Очевидно, в этом случае подразумевается что $r\geq 2$.

Аналогично можно выписать и квадратурную формулу типа Симпсона для сингулярных интегралов. В этом случае $n=2$. Элементарная формула Симпсона имеет вид

$$\int_a^b\frac{f(t)}{t-x}dt\approx S_2(f;x)$$

$$=\frac{1}{(x-a)(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}\left(\frac{b-a}{6}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)(x-b)+\frac{4(b-a)}{6}(x-a)(x-b)\right.$$

$$+\frac{b-a}{6}(x-a)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+(x-a)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)(x-b)\ln\frac{b-x}{x-a}$$

$$-\frac{b-a}{6}\Big(a-\frac{a+b}{2}\Big)(a-b)\Big)\,f(a)+\frac{1}{(x-\frac{a+b}{2})(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}$$

$$\times\Big(\frac{b-a}{6}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)(x-b)+\frac{4(b-a)}{6}(x-a)(x-b)+\frac{b-a}{6}(x-a)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)$$

$$+(x-a)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)(x-b)\ln\frac{b-x}{x-a}-\frac{4(b-a)}{6}\Big(\frac{a+b}{2}-a\Big)\Big(\frac{a+b}{2}-b\Big)\Big)$$

$$\times f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{(x-b)\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)}\Big(\frac{b-a}{6}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)(x-b)$$

$$+\frac{4(b-a)}{6}(x-a)(x-b)+\frac{b-a}{6}(x-a)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)$$

$$\times-\frac{b-a}{6}\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)\Big)\,f(b).$$

Сложная формула Симпсона будет иметь вид

$$\int_a^b\frac{f(t)}{t-x}dt\approx S_2^n(f;x)$$

$$=\frac{1}{(x-a)w_0'(a)}\left(H_{20}(x)+w_0(x)\ln\left|\frac{x_2-x}{x-a}\right|-\frac{2h}{6}w_0'(a)\right)f(a)$$

$$+\frac{1}{(x-x_1)w_0'(x_1)}\left(H_{20}(x)+w_0(x)\ln\left|\frac{x_2-x}{x-a}\right|-\frac{8h}{6}w_0'(x_1)\right)f(x_1)$$

$$+\frac{1}{(x-x_2)w_0'(x_2)}\left(H_{20}(x)+w_0(x)\ln\left|\frac{x_2-x}{x-a}\right|-\frac{2h}{6}w_0'(x_2)\right)f(x_2)$$

$$+\frac{1}{(x-x_2)w_2'(x_2)}\left(H_{22}(x)+w_2(x)\ln\left|\frac{x_4-x}{x-x_2}\right|-\frac{2h}{6}w_2'(x_2)\right)f(x_2)$$

$$+\frac{1}{(x-x_3)w_2'(x_3)}\left(H_{22}(x)+w_2(x)\ln\left|\frac{x_4-x}{x-x_2}\right|-\frac{8h}{6}w_2'(x_3)\right)f(x_3)$$

$$+\frac{1}{(x-x_4)w_2'(x_4)}\left(H_{22}(x)+w_2(x)\ln\left|\frac{x_4-x}{x-x_2}\right|-\frac{2h}{6}w_2'(x_4)\right)f(x_4)$$

$$+\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$+\frac{1}{(x-x_{n-2})w'_{n-2}(x_{n-2})}$$
$$\times\left(H_{2,n-2}(x)+w_{n-2}(x)\ln\left|\frac{b-x}{x-x_{n-2}}\right|-\frac{2h}{6}w'_{n-2}(x_{n-2})\right)f(x_{n-2})$$

$$+\frac{1}{(x-x_{n-1})w'_{n-2}(x_1)}\times$$
$$\times\left(H_{2,n-2}(x)+w_{n-2}(x)\ln\mid\frac{b-x}{x-x_{n-2}}\mid-\frac{8h}{6}w'_{n-2}(x_{n-1})\right)f(x_{n-1})$$

$$+\frac{1}{(x-b)w'_{n-2}(b)}\left(H_{2,n-2}(x)+w_{n-2}(x)\ln\left|\frac{b-x}{x-x_{n-2}}\right|-\frac{2h}{6}w'_{n-2}(b)\right)f(b),$$

где

$$w_0(x)=(x-a)(x-x_1)(x-x_2),\quad w_2(x)=(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4),\dots,$$

$$w_{n-2}(x)=(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-b),$$

$$H_{2k}=A_0\frac{w_k(x)}{x-x_k}+A_1\frac{w_k(x)}{x-x_{k+1}}+A_2\frac{w_k(x)}{x-x_{k+2}},\quad (k=0,2,4,\dots,n-2),$$

$$A_0=\frac{2h}{6},\quad A_1=\frac{8h}{6},\quad A_2=\frac{2h}{6},\quad n-\text{четное}.$$

Если $r\geq 4$, то для погрешности верно неравенство

$$\mid R_{2n}(f;x)\mid\leq O\left(\frac{1}{n^{4+\alpha}}\right)\left|\ln\frac{b-x}{x-a}\right|+O\left(\frac{\ln n}{n^{4+\alpha}}\right).$$

2. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов типа Гаусса

Не нарушая общности можно рассматривать следующие сингулярные интегралы

$$S(f,x)=\int_{-1}^{1}p(t)\frac{f(t)}{t-x}dt,\quad -1<x<1,$$

где $p(t)\geq 0$ весовая функция, $f(t)\in H_r(\alpha)$ $(0<\lambda\leq 1)$. Интересен случай, когда

$$p(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\quad(\alpha,\beta>-1).$$

С помощью аналогичных рассуждений получается формула

$$S_n(f;x) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{(x-x_k)w'(x_k)} \left(H_n(x) + w(x)\gamma(x) - A_k w'(x_k)\right),$$

где x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — корни многочлена $w(x)$, ортогонального по весу $p(x)$ многочленам меньшей степени на отрезке [-1,1], A_k — коэффициенты интерполяционных квадратурных формул

$$A_k = \frac{1}{w'(x_k)} \int_{-1}^{1} p(x) \frac{w(x)dx}{x-x_k}, \quad w(x) = \sum_{k=1}^{n} (x-x_k),$$

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{w(x)}{x-x_k}, \quad \gamma(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\rho(t)}{t-x} dt.$$

Таблица коэффициентов A_k и узлов x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ для разных весовых функции $p(x)$ имеется в [7].

Отметим, что алгебраическая точность таких квадратурных формул равна $n-1$. Точность будет наивысшей $(2n-1)$, если в качестве x возьмем нули следующего уравнения

$$\int_{-1}^{1} \rho(t) \frac{w(t)}{t-x} dt = 0. \tag{10}$$

В этом случае такие формулы имеют очень простую форму для разных весовых функции $\rho(t)$. Вот их вид

$$\int_{-1}^{1} \rho(t) \frac{f(t)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{(x-x_k)w'(x_k)} (-A_k w'(x_k)) = \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{f(x_k)}{x_k - x}, \tag{11}$$

где x корень уравнения (10).

Формула (11) по форме совпадает с квадратурной формулой типа Гаусса для функции $f(t)/(t-x)$. Она имеет простой вид и наивысшую алгебраическую степень точности $2n-1$.

В технических приложениях особое значение имеют частные случаи, например, α и β принимают значения из множества $\{0, \pm\frac{1}{2}\}$. Рассмотрим эти случаи:

1. $\alpha = 0$, $\beta = 0$. В этом случае $\rho(t) = 1$. В роли x_k возьмем корни многочлена Лежандра (см. [7]).

2. $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. В этом случае $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Тогда $A_k = \frac{\pi}{n}$, а $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ — корни многочлена Чебышева I-го рода.

3. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$. В этом случае $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$. Тогда $x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}$, $A_k = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, x_k — корни многочлена Чебышева II-го рода.

4. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. В этом случае $\rho(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. Тогда $A_k = \frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}$, $x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

5. $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$. В этом случае $\rho(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$. Тогда $A_k = \frac{4\pi}{2n+1}\cos^2\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi$, $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi$.

Заметим в заключение, что указанные выше формулы имеются у некоторых авторов (см., например, [2, 3, 5]), но там они приводятся в частных случаях.

Литература

1. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—410 с.
2. *Лифанов И. К.* Методы сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО «Янус», 1995.—520 с.
3. *Саникидзе Д. Г.* О порядке приближения некоторых сингулярных операторов квадратурными суммами // Известия АН Армянской ССР.—1970.—Т. 5, № 4.—С. 371–384.
4. *Белоцерковский С. М. Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.—М.: Наука, 1985.—252 с.
5. *Корнейчук А. А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. // в кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурных формул.—М.: Наука, 1964.—С. 64–74.
6. *Шешко М. А.* О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла // Изв. вузов, Математика.—1976, № 12,—С. 108–118.
7. *Крылов В. И. Шульгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию.—М.: Наука, 1966.—370 с.

г. Владикавказ *Статья поступила 23 февраля 2001 г.*