Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 1999, Том 1, Выпуск 2

УДК **517**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ПСЕВДОИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

К. Т. Тибилов

Цель настоящей работы — дать полные формулировки нескольких центральных результатов об интегральной и псевдоинтегральной представимости линейных операторов, действующих в пространствах измеримых функций. Попутно отмечаются близкие вопросы, а также сферы возможных приложений.

1. Среди операторов, действующих в пространствах измеримых функций, важный класс составляют так называемые интегральные и псевдоинтегральные операторы.

Линейный оператор $T : L_2 \to L_2$ называется *интегральным*, если существует измеримая функция $K(s,t)$ (ядро оператора T) такая, что

$$(Te)(s) = \int K(s,t)e(t)\,\mu(dt) \tag{1}$$

для любой функции $e \in L_2$. Интеграл в (1) понимается в смысле Лебега. В 1936 году Дж. фон Нейман [1] поставил задачу о характеризации интегральных операторов в L_2. В 1974 году эта задача была решена А. В. Бухваловым [2–4]. Другие критерии интегральной представимости были получены С. И. Ждановым [5] и Л. Лесснером [6].

Изучение класса псевдоинтегральных операторов, порожденных измеримыми случайными ядрами μ_s, началось в середине 1970-х годов. Такие операторы допускают представление

$$(Te)(s) = \int e(t)\,\mu_s(dt). \tag{2}$$

Впервые их ввел В. Арвесон в связи с изучением операторных алгебр в L_2 в работе [7]. В [8, 9] А. Сурур развил общую теорию таких операторов — выяснилось, что это в точности порядково непрерывные операторы.

Результаты интегральной и псевдоинтегральной представимости носят порядковый характер и их доказательство существенно опирается на исчисление порядково ограниченных операторов. В работах [10–13] А. Г. Кусраев указал, что аналогичные вопросы для операторов, действующих в пространствах измеримых вектор-функций, могут решаться на основе теории мажорируемых операторов. В этих работах приводится целый ряд интересных результатов об интегральном представлении линейных операторов в пространствах измеримых вектор-функций. Ряд результатов в этом направлении получен также В. Г. Наводновым [14], Ю. Н. Кузьминым [15], А. Кевином [16]. В заметке [17] автор ввел понятие слабого псевдоинтегрального оператора и установил аналог теоремы А. Сурура — критерий слабой псевдоинтегральной представимости для операторов, действующих в пространствах измеримых вектор-функций.

2. Перечислим обозначения, которые фиксированы на протяжении всего текста: (Q, Σ, m) — произведение пространств с полными σ-конечными мерами $(A, \mathcal{A}, m_1)$ и $(B, \mathcal{B}, m_2)$; X и Y — банаховы пространства; $S(m)$ — K-пространство классов эквивалентности всех измеримых почти всюду конечных функций на (Q, Σ, m); $S(m_1, X) := S(A, \mathcal{A}, m_1, X)$ — пространство классов эквивалентности всех сильно m_1-измеримых (= измеримых по Бохнеру) вектор-функций; E и F — идеальные пространства, содержащиеся в $S(m_1)$ и $S(m_2)$ соответственно; $\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y; $\mathcal{L}_r(E, F)$ пространство регулярных операторов из E в F; $X' := \mathcal{L}(X, R)$ — пространство, сопряженное к X. Каноническая билинейная форма всех встречающихся ниже двойственностей обозначается символом $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$. Векторные нормы обозначаются через $| \cdot |$. Через $L_1(m_1, X)$ обозначено пространство суммируемых по Бохнеру вектор-функций из A в X.

3. Приведем точные определения и формулировки теорем об интегральной и псевдоинтегральной представимости в пространствах измеримых функций. Оператор $T : E \to F$ называется интегральным, если существует $m = m_1 \otimes m_2$ — измеримая функция двух переменных $K : A \times B \to R$ такая, что для любого класса эквивалентности $\bar{e} \in E$ значение $\bar{f} = T\bar{e}$ определяется функцией

$$f(s) = \int\limits_A K(s,t)e(t)\, m_1(dt) \quad (e \in B).$$

Функция K называется ядром интегрального оператора T. Говорят, что оператор T допускает интегральное представление с ядром K и пишут

$$(Te)(s) = \int\limits_A K(s,t)e(t)\, m_1(dt) \quad (e \in E).$$

Имеет место следующий критерий интегральной представимости линейного оператора.

Теорема (А. В. Бухвалов [2, 4]). *Для линейного оператора $T : E \to F$ равносильны следующие условия:*

(а) T *— интегральный оператор;*

(б) *если $e_n \to 0$ по мере m_1 и $|e_n| \leqslant e \in E$ для всех $n \in N$, то $Te_n \to 0$ m_2-почти всюду.*

Назовем случайной мерой функцию от двух переменных $\mu : B \times \mathcal{A} \to R$ такую, что при фиксированном $s \in B$ $\mu(s; \cdot\,) : \mathcal{A} \to R$ является счетно-аддитивной мерой на $\mathcal{A}$, а при фиксированном $\alpha \in \mathcal{A}$ $\mu(\,\cdot\,; \alpha) : B \to R$ является m_2-измеримой функцией, т. е. элементом пространства $S(m_2)$. В дальнейшем вместо $\mu(s; dt)$ мы будем писать $\mu_s(dt)$.

Если $(A, \mathcal{A}, m_1)$ — стандартное борелевское пространство с мерой, то оператор $T : E \to S(m_2)$ допускает, по определению, псевдоинтегральное представление, если существует случайная мера μ_s такая, что для любого класса эквивалентности $\bar{e} \in E$ значение $\bar{f} = T\bar{e}$ определяется функцией

$$f(s) = \int\limits_A e(t)\, \mu_s(dt) \quad (s \in B).$$

Говорят, что оператор T допускает псевдоинтегральное представление и пишут

$$(Te)(s) = \int\limits_A e(t)\,\mu_s(dt) \quad (e \in E).$$

Имеет место следующий критерий псевдоинтегральной представимости линейного оператора.

Теорема (A. R. Sourour [9]). *Если $(A, \mathcal{A}, m_1)$ — стандартное борелевское пространство с мерой, то для линейного оператора $T : E \to S(m_2)$ равносильны следующие условия:*

(а) T *— псевдоинтегральный оператор;*

(б) T *— порядково непрерывный оператор, т.е. если $|e_n| \leqslant L \in E$ и $e_n \to 0$ m_1-почти всюду, то $Te_n \to 0$ m_2-почти всюду.*

4. Приведем необходимые для дальнейшего сведения из теории решеточно нормированных пространств и мажорируемых операторов.

Пусть V — вещественное векторное пространство, C — некоторое K-пространство. Отображение $|\cdot| : V \to C$ называется решеточной или векторной нормой, если для $|\cdot|$ выполнены все аксиомы нормы:

(1) $|v| \geqslant 0 (v \in V)$, $|v| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;

(2) $|v_1 + v_2| \leqslant |v_1| + |v_2|$ $(v_1, v_2 \in V)$;

(3) $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$ $(v \in V, \lambda \in R)$.

Говорят, что $|\cdot|$ — норма Канторовича, если, кроме того, выполнено следующее условие разложимости:

(4) для любых $v \in V$ и $c_1, c_2 \in C_+$ из $|v| = c_1 + c_2$, $c_1 \wedge c_2 = 0$ следует существование такого представления $v = v_1 + v_2$ $(v_1, v_2 \in V)$, что $|v_i| = c_i$ $(i = 1, 2)$.

Векторное пространство V, снабженное нормой Канторовича $|\cdot|$, называется решеточно нормированным пространством (РНП) и обозначается $(V, |\cdot|, C)$. РНП $(V, |\cdot|, C)$ называется пространством Банаха-Канторовича (ПБК), если оно полно в следующем смысле: для любого направления $(v_\alpha) \subset V$ из $|v_\alpha - v_\beta| \xrightarrow{(0)} 0$ следует существование такого $v \in V$, что $|v_\alpha - v| \xrightarrow{(0)} 0$.

Рассмотрим произвольные РНП $(V, |\cdot|, C)$ и $(W, |\cdot|, D)$. Линейный оператор $T : V \to W$ называют мажорируемым, если существует такой положительный оператор $U \in \mathcal{L}_r(C, D)$, что $|Tv| \leqslant U(|v|)$ для всех $v \in V$. Норма $|T|$ оператора T — это наименьший элемент в K-пространстве $\mathcal{L}_r(C, D)$ среди всех указанных U. При этом выполняется нормативное неравенство $|Tv| \leqslant |T|(|v|)$ $(v \in V)$. Множество всех мажорируемых операторов из V в W обозначается символом $M(V, W)$. Известно, что $M(V, W)$ — пространство Банаха-Канторовича, нормированное посредством K-пространства $\mathcal{L}_r(C, D)$ (см. [10, 13]). Отметим, что мажорируемые операторы впервые были введены Л. В. Канторовичем [18] под именем операторов с абстрактной нормой. Общая теория таких пространств с различными связями и приложениями развивается сейчас А. Г. Кусраевым и его учениками (см., например, [10–13, 17, 21]).

5. Введем в рассмотрение два класса измеримых вектор-функций. С каждым элементом $v \in S(m_1, X)$ свяжем измеримую функцию $|v| \in S(m_1)$ по формуле $|v| : t \to \|v(t)\|_X$ $(t \in A)$. Положим по определению $E(X) := \{v \in S(m_1, X) : \ |v| \in E\}$.

Оператор $|\cdot|: E(X) \to E$ обладает всеми свойствами решеточной нормы, поэтому $(E(X), |\cdot|, E)$ — РНП. Зафиксируем нормирующее подпространство $Z \subset Y'$. Это означает, что для любого $y \in Y$ норму можно вычислять по формуле

$$\|Y\| = \sup\{\langle y, y'\rangle : \|y'\| \leqslant 1, y' \in Z\}.$$

Обозначим через $M_B(Y, Z)$ множество всех вектор-функций $w : B \to Y$, удовлетворяющих условиям:

(а) для всех $z \in Z$ m_2-измеримая функция $s \to \langle w(s), z\rangle$ $(s \in B)$;

(б) существует измеримая функция $\varphi \in S(m_2)$ такая, что для всех $z \in Z, \|z\| \leqslant 1$ выполняется неравенство $\langle w(s), z\rangle \leqslant \varphi(s)$ для m_2-почти всех $s \in B$.

Введем в $M_B(Y, Z)$ отношение эквивалентности, полагая $w_1 \sim w_2$ $(w_1, w_2 \in M_B(Y, Z))$ в том и только в том случае, если для всех $z \in Z$ выполняется $\langle w_1(s), z\rangle = \langle w_2(s), z\rangle$ для m_2-почти всех $s \in B$. Для $w \in M_B(Y, Z)$ (а также для соответствующего класса эквивалентности, обозначаемого той же буквой) положим

$$\|w\| := \sup\{\langle w, z\rangle : z \in Z, \|z\| \leqslant 1\},$$

где $\langle w, z\rangle$ — класс эквивалентности измеримой функции $s \to \langle w(s), z\rangle$ $(s \in B)$. Обозначим $F_s(Y, Z) := \{w \in M_B(Y, Z)|_\beta : |w| \in F\}$. (Тогда $(F_s(Y, Z), |\cdot|, F)$ — ПБК). Очевидно, также $F(Y) \subset F_s(Y, Z)$.

6. В соответствии с концепциями сильной и слабой интегрируемости (и измеримости) вектор-функций для операторов в пространствах измеримых вектор-функций возникает два различных подхода к изучению интегральной представимости линейных операторов.

Приведем один интересный результат в этом направлении для операторов со значениями в банаховых пространствах. Назовем оператор $T : E(X) \to Y$ сильно интегральным, если существует оператор-функция $K : A \to \mathcal{L}(X, Y)$ такая, что $Ku \in L_1(m_1, X)$ для любого $u \in E(X)$ и

$$Tu = \int\limits_A K(t)U(t)\, m_1(dt) \quad (U \in E(X)).$$

Интеграл понимается в смысле Бохнера.

Теорема (В. Г. Наводнов [14]). *Пусть банахово пространство Y обладает свойством Радона-Никодима. Для того, чтобы линейный оператор $T : E(X) \to Y$ был сильно интегральным, необходимо и достаточно, чтобы он был мажорируемым и порядково непрерывным.*

Для дальнейшего введем определения слабого интегрального и сильного интегрального операторов (см. [10]). Оператор-функция $K : Q \to \mathcal{L}(X, Z')$ называется *слабо измеримой*, если для любых $x \in X, z \in Z'$ m-измерима функция

$$(t, s) \to \langle K(t, s)x, z\rangle \quad ((t, s) \in Q).$$

Оператор $T : E(X) \to F_s(Y, Z)$ допускает (по определению) слабое интегральное представление (или что T — слабый интегральный оператор) с ядром $K : Q \to$

$\mathcal{L}(X, Z')$, если K — это слабо измеримая оператор-функция такая, что для любого класса эквивалентности $\bar{v} \in E(X)$ и всех $z \in Z$ имеет место равенство

$$\langle Tv, z\rangle(s) = \int\limits_A \langle K(t,s)v(t), z\rangle \, m_1(dt)$$

для m_2-почти всех $s \in B$.

Оператор-функция $K : Q \to \mathcal{L}(X, Y)$ называется *просто измеримой*, если для любого $x \in X$ измерима по Бохнеру вектор-функция

$$(t,s) \to K(t,s)x \quad ((t,s) \in Q).$$

Оператор $T : E(X) \to F(Y)$ допускает (по определению) сильное интегральное представление, если существует просто измеримая оператор-функция $K : Q \to \mathcal{L}(X, Y)$ (ядро оператора T) такая, что для любого класса эквивалентности $\bar{v} \in E(X)$ имеет место равенство

$$(Tv)(s) = \int\limits_A K(t,s)v(t) \, m_1(dt)$$

для m_2-почти всех $s \in B$.

Приведем критерии сильной и слабой интегральной представимости операторов.

Теорема (А. Г. Кусраев [10]). *Для мажорируемого оператора $T : E(X) \to F_s(Y, Z)$ равносильны следующие условия:*

(а) *T допускает слабое интегральное представление;*

(б) *$|T|$ допускает интегральное представление;*

(в) *если (v_n) — ограниченная последовательность в $E(X)$ и $|v| \to 0$ по мере m_1, то $Tv_n| \to 0$ m_2-почти всюду.*

Теорема (А. Г. Кусраев [10]). *Пусть банахово пространство Y обладает свойством Радона-Никодима. Мажорируемый оператор $T : E(X) \to F(Y)$ допускает сильное интегральное представление в том и только в том случае, если выполнено любое из условий (б)–(в) предшествующей теоремы.*

7. Приведем определения слабого псевдоинтегрального и сильного псевдоинтегрального операторов в пространствах измеримых вектор-функций. В этом пункте $(A, \mathcal{A}, m_1)$ — стандартное борелевское пространство с мерой. Оператор $T : E(X) \to F_s(Y, Z)$ называется *слабым псевдоинтегральным*, если существует случайная мера μ_s и слабо измеримая оператор-функция $K : Q \to \mathcal{L}(X, Z')$ (ядро оператора T) такие, что для всех $v \in E(X), z \in Z$ имеет место представление

$$\langle Tv, z\rangle(s) = \int\limits_A \langle K(t,s)v(t), z\rangle \, \mu_s(dt)$$

для m_2-почти всех $s \in B$.

Оператор $T : E(X) \to F(Y)$ называется *сильным псевдоинтегральным*, если существуют случайная мера μ_s и просто измеримая оператор-функция $K : Q \to \mathcal{L}(X, Z')$ (ядро оператора T) такие, что для любого $v \in E(X)$ справедливо представление

$$(Tv)(s) = \int\limits_A K(t,s)v(t) \, \mu_s(dt)$$

m_2-почти всех $s \in B$.

Интеграл понимается в смысле Бохнера.

Сформулируем критерии слабой псевдоинтегральной и сильной псевдоинтегральной представимости для мажорируемых операторов в пространствах измеримых вектор-функций.

Теорема (Тибилов К. Т. [17]). *Для мажорируемого оператора $T : E(X) \to F_s(Y, Z)$ равносильны следующие условия:* (а) *оператор T порядково непрерывен;* (б) *оператор T допускает слабое псевдоинтегральное представление;* (в) *оператор $|T| : E \to F$ допускает псевдоинтегральное представление.*

Теорема (Тибилов К. Т. [22]). *Если банахово пространство Y обладает свойством Радона-Никодима, то для мажорируемого оператора $T : E(X) \to F(Y)$ равносильны следующие условия:* (а) *оператор T порядково непрерывен;* (б) *оператор T допускает сильное псевдоинтегральное представление;* (в) *оператор $|T| : E \to F$ допускает псевдоинтегральное представление;* (г) *оператор T допускает слабое псевдоинтегральное представление.*

8. Заключительные замечания. Наряду с задачей о представимости линейного оператора в интегральной форме с произвольным измеримым ядром значительный интерес представляет задача о представимости линейных операторов в интегральной форме с ядрами, удовлетворяющими различным условиям. Первые важные результаты по этой задаче были получены в 1930-х годах И. М. Гельфандом, Л. В. Канторовичем, Н. Данфордом (см. [19, 20, 23–25]. Результаты этих авторов получили дальнейшее развитие в работах Д. А. Владимирова, В. Б. Короткова, А. В. Бухвалова, А. Р. Шепа и др. (см. [4, 23–25, 29]). С другими незатронутыми аспектами современной теории интегральных операторов можно познакомиться по монографиям [23–26, 29]. В 1980-х годах Л. Вайсом и Н. Колтоном активно изучались характеризации различных полос в пространстве порядково непрерывных операторов в терминах случайных ядер μ_s псевдоинтегральных операторов, а также приложения к геометрии банаховых и квазибанаховых пространств, изучению уравнения переноса и т. д. (см., например [27, 28]).

Литература

1. *von Neumann J.* Charakteresierung des Spektrums eines Integraloperators // Actualites Sci. et Ind. 1935. № 229.
2. *Бухвалов А. В.* Об интегральном представлении линейных операторов // Зап. науч. семинар. ЛОМИ. 1974. Т. 17. С. 5–14.
3. *Бухвалов А. В.* Критерий интегральной представимости линейных операторов // Функц. анал. и его прил. 1975. Т. 9. № 1. С. 51.
4. *Бухвалов А. В.* Приложения теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L_p // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. № 6. С. 37–83.
5. *Жданов С. И.* О некоторых вопросах общей теории линейных систем // Оптимизация. 1973. № 12. С. 52–76.
6. *Lessner L.* A lattice theoretic charakterisation of an integral operator // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 53, № 2. P. 391–395.
7. *Arveson W.* Operator algebras and invariant subspaces // Ann. of Math. 1974. V. 100, № 2. P. 433–532.

8. *Sourour A. R.* Pseudointegral operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 253. P. 339–363.
9. *Sourour A.R.* Characterization and order properties of pseudo-integral operators // Pacific J. Math. 1982. V. 99, № 1. P. 145–158.
10. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Новосибирск: Наука, 1987 /Труды Института математики СО АН СССР. Т. 9. С. 84–158.
11. *Кусраев А. Г.* Об интегральном представлении мажорированных операторов в пространствах измеримых вектор-функций // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 4. С. 788–791.
12. *Кусраев А. Г.* Об аналитическом представлении мажорированных операторов // Докл АН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С. 1055–1058.
13. *Кусраев А. Г., Стрижевский В. З.* Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы //Новосибирск: Наука, 1987 / Тр. Ин-та мат-ки СО АН СССР. Т. 7. С. 132–158.
14. *Наводнов В. Г.* Об интегральном представлении операторов, действующих из банахова пространства измеримых вектор-функций в банахово пространство // Изв. вузов. Математика. 1983. № 3. С. 82–84.
15. *Кузьмин Ю. Н.* Совершенные пространства измеримых векторнозначных функций и интегральные операторы: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук.: Казань, 1984.
16. *Kevin T. A.* Representation of compact and weakly compact operators on the space of Bochner integrable functions // Pacif. J. Math. 1981. V. 92, № 2. P. 257–267.
17. *Тибилов К. Т.* О псевдоинтегральных операторах в пространствах измеримых вектор-функций // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31. № 5. С. 149–156.
18. *Канторович Л. В.* О функциональных уравнениях // Уч. зап. ЛГУ. 1937. Т. 3 (17). С. 17–33.
19. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
20. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
21. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985.
22. *Тибилов К. Т.* Аналитическое представление мажорируемых операторов: Автореф. дисс. ... канд. физ. мат. наук: Новосибирск, 1990.
23. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
24. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
25. *Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров В. Б.* Векторные решетки и интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1992.
26. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L_2. М.: Наука, 1985.
27. *Weis L.* On the representation of order continuous operators bu random measures // Trans. Amer. Math.Soc. 1984. V. 285. № 2. P. 535–563.
28. *Kalton N. J.* The endomorthisms of L_p // Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 27. P. 353–381.
29. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.