Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 510.54+510.57

МИНИМАЛЬНЫЕ ОБОБЩЕННО ВЫЧИСЛИМЫЕ НУМЕРАЦИИ И ВЫСОКИЕ СТЕПЕНИ

М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Установлено, что множество минимальных обобщенно вычислимых нумераций любого бесконечного вычислимого относительно высокого оракула семейства эффективно бесконечно. Найдено достаточное условие для вычислимых относительно высоких оракулов нумераций бесконечных семейств, при выполнении которого существуют не сводящиеся к ним минимальные обобщенно вычислимые нумерации.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.318

Ключевые слова: обобщенно вычислимая нумерация, минимальная нумерация, высокое множество, 2-низкое множество, арифметическая нумерация.

Статья посвящена минимальным нумерациям семейств, имеющих равномерные относительно высоких оракулов перечисления. Выбор такого класса оракулов мотивирован интенсивным исследованием вычислимых нумераций семейств арифметических множеств [1–5], введенных в работе С. С. Гончарова и А. Сорби [1]. Нумерация α семейства $\mathscr{A}$ называется Σ^0_n-*вычислимой*, $n \geq 1$, если

$$G_\alpha = \{\langle x, y\rangle : y \in \alpha x\} \in \Sigma^0_n.$$

Более широким подходом к обобщению понятия вычислимых нумераций являются нумерации, вычислимые с оракулом. Следуя [1], будем говорить, что нумерация α X-*вычислима*, если G_α вычислимо перечислимо с оракулом X (X-в. п.). Таким образом, для каждого n класс всех Σ^0_{n+2}-вычислимых нумераций совпадает с классом нумераций, вычислимых относительно высокого оракула $\varnothing^{(n+1)}$.

Необходимые сведения по теории нумераций можно найти в монографии Ю. Л. Ершова [6] и в его статье [7], по теории вычислимости — в монографии Соара [8]. Говорят, что нумерация α *сводится* к нумерации β, если $\alpha = \beta \circ f$ для некоторой вычислимой функции f. Нумерации α и β называются *эквивалентными* ($\alpha \equiv \beta$), если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$. Нумерацию α семейства $\mathscr{A}$ назовем *минимальной*, если для любой нумерации $\beta \leq \alpha$ того же семейства справедлива сводимость $\alpha \leq \beta$. Для оракула X обозначим через W^X_e X-в. п. множество с геделевским номером e. Для множества Y и числа x обозначим через $Y^{\langle x\rangle}$

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (код проекта 1.1515.2017/ПЧ), а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–08252).

множество $\{y : \langle x, y\rangle \in Y\}$. Для каждого множества X и каждого числа e определим X-вычислимую нумерацию α_e^X, полагая $\alpha_e^X x = \left(W_e^X\right)^{\langle x\rangle}$ для всех x. Для X-вычислимого семейства $\mathscr{A}$ определим индексное множество

$$\mathrm{Min}^X(\mathscr{A}) = \left\{e : \alpha_e^X \text{ — минимальная нумерация } \mathscr{A}\right\}.$$

Вопрос о существовании и числе минимальных Σ^0_{n+2}-вычислимых нумераций бесконечных семейств арифметических множеств полностью решен в работе С. А. Бадаева и С. С. Гончарова [2]. Так, в указанной работе установлено, что каждое бесконечное Σ^0_{n+2}-вычислимое семейство имеет бесконечно много попарно не эквивалентных Σ^0_{n+2}-вычислимых минимальных нумераций, и поставлены вопросы об эффективной бесконечности множества минимальных Σ^0_{n+2}-вычислимых нумераций и об описании Σ^0_{n+2}-вычислимых нумераций, нижние конусы которых избегают некоторые минимальные Σ^0_{n+2}-вычислимые нумерации. С целью решения вопроса об эффективной бесконечности множества минимальных вычислимых относительно высокого оракула нумераций бесконечных семейств докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть X — высокое множество. Тогда множество всех неограниченных вычислимых функций равномерно перечислимо относительно X.*

Доказательство. Используя критерий Мартина (см. [8, гл. XI, § 1]), фиксируем вычислимую относительно X функцию r, доминирующую все вычислимые функции. Не ограничивая общности, можно считать, что r не убывает. Положим

$$h_{\langle e,t\rangle}(x) = \begin{cases} \varphi_e(x), & \text{если } \forall y \le x\,[\varphi_{e,r(x+t)}(y)\downarrow] \\ & \text{и } \forall y \exists z \le r(y)\,[t \le y \le x \Rightarrow \varphi_{e,r(y)}(z)\downarrow > y], \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По определению совокупность функций h_i равномерно вычислима относительно X. А именно, существует такая вычислимая функция f, что $h_i = \varphi^X_{f(i)}$ для всех i. Сначала покажем, что каждая из функций $h_{\langle e,t\rangle}$ вычислима. С этой целью определим такую X'-вычислимую функцию p, что $\varphi_{p(i)} = h_i$ для всех i. Для заданных e, t с помощью оракула X' проверим существование x, на котором нарушается первое условие в определении $h_{\langle e,t\rangle}$. Если такого x не существует, то $h_{\langle e,t\rangle} = \varphi_e$. Отметим, что в этом случае $h_{\langle e,t\rangle}$ не ограничена. Таким образом можем определить $p(\langle e,t\rangle) = e$. В противном случае фиксируем наименьшее такое x и положим $p(\langle e,t\rangle)$ равным индексу вычислимой функции

$$\psi(y) = \begin{cases} \varphi_e(y), & \text{если } y < x, \\ y & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть φ_e — произвольная тотальная неограниченная функция. Рассмотрим вычислимые функции

$$\theta_e(y) = \min\{s : \exists x \le s\,[\varphi_{e,s}(x)\downarrow > y]\}, \quad \rho_e(y) = \min\{s : \forall z \le y\,[\varphi_{e,s}(y)\downarrow]\}.$$

Выберем такое t, что $r(x) > \max\{\theta_e(x), \rho_e(x)\}$ для всех $x \ge t$. Тогда $\varphi_e = h_{\langle e,t\rangle}$. $\square$

Проблема эффективной бесконечности положительно решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть X — высокое множество. Тогда для любого бесконечного X-вычислимого семейства $\mathscr{A}$ справедлива сводимость $\overline{X^{(3)}} \leq_1 \mathrm{Min}^X(\mathscr{A})$.*

Доказательство. Фиксируем X-вычислимую последовательность $\{h_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ всех неограниченных вычислимых функций. Не ограничивая общности, будем считать, что $h_0(0) > 0$. Определим по индукции последовательность вычислимых множеств $Z_n = \{z_0^n < z_1^n < \dots\}$. Для $n = 0$ положим $z_0^0 = 0$ и

$$z_{i+1}^0 = \min\{z > z_i^0 : \exists y\,[h_0(z_i^0) < y < h_0(z)]\}.$$

Также определим $k(0,i) = i$ для всех i. Пусть Z_n и $k(n,i)$ определены для всех i, причем при фиксированном n функция $i \mapsto k(n,i)$ строго возрастает. Положим

$$z_0^{n+1} = \min\{z : \exists j\,[h_0(z^0_{k(n,j+1)}) < h_{n+1}(z)]\},$$

$$k(n+1,0) = \min\{k(n,j) : h_{n+1}(z_0^{n+1}) \leq h_0(z^0_{k(n,j)}),\ j \in \mathbb{N}\},$$

$$z_{i+1}^{n+1} = \min\{z : \exists j\,[h_0(z^0_{k(n+1,i)}) < h_0(z^0_{k(n,j)}) < h_{n+1}(z)]\},$$

$$k(n+1,i+1) = \min\{k(n,j) : h_{n+1}(z_{i+1}^{n+1}) \leq h_0(z^0_{k(n,j)}),\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Для каждого i определим

$$B_0^0 = [0, h_0(z_0^0)],\quad B_{i+1}^0 = (h_0(z^0_{k(0,i)}), h_0(z^0_{k(0,i+1)})],$$

$$B_0^{n+1} = [0, h_0(z^0_{k(n+1,0)})],\quad B_{i+1}^{n+1} = (h_0(z^0_{k(n+1,i)}), h_0(z^0_{k(n+1,i+1)})],$$

$$C_0^0 = [0, h_0(z_0^0)),\quad C_{i+1}^0 = (h_0(z_i^0), h_0(z_{i+1}^0)),\quad C_i^{n+1} = B_i^{n+1} \setminus B_j^n,$$

где j — единственное число, удовлетворяющее условию

$$k(n,j) = k(n+1,i).$$

Отметим некоторые свойства введенных последовательностей множеств B_i^n и C_i^n.

1. Для каждого n имеем $\bigcup\limits_i B_i^n = \mathbb{N}$ и $B_i^n \cap B_j^n = \varnothing$ при $i \neq j$.

2. Для всех n и i множество B_i^{n+1} является объединением конечного числа B_j^n.

3. Для всех n и i будет $C_i^n \neq \varnothing$, $C_i^n \subset B_i^n$ и $h_n(z_i^n) \in B_i^n \setminus C_i^n$.

В доказательстве леммы 1 установлено, что геделевский номер каждой из функций h_n, а следовательно, и множества Z_n вычисляется равномерно по n с помощью оракула X'. Значит, можно фиксировать такую функцию $q \leq_T X'$, что для всех n и всех i функция $y \mapsto \varphi^{(2)}_{q(n)}(i,y)$ является характеристической функцией множества C_i^n. Пусть $q = \lim\limits_s q_s$, где $\{q_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — X-вычислимая последовательность функций. Обозначим через $D(m,e)$ $\varnothing''$-вычислимый предикат

$$D(m,e) \Leftrightarrow \forall k \exists y > k \exists i\,[\varphi_m^{(2)}(i,y) = 1 \,\&\, \varphi_e(y)\downarrow > k]$$

и через d — его характеристическую функцию. Так как $\varnothing'' \leq_T X'$, существует X-вычислимая последовательность функций $\{d_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ такая, что $d = \lim\limits_s d_s$.

Наша цель — доказать, что для $\Sigma_3^0(X)$-полного множества

$$\mathrm{Cof}^X = \{e : \overline{W_e^X} \text{ конечно}\}$$

справедлива сводимость $\overline{\mathrm{Cof}^X} \leq_1 \mathrm{Min}^X(\mathscr{A})$. Для этого определим такую вычислимую функцию f, что $\alpha^X_{f(x)}$ для всех x нумерует $\mathscr{A}$ и $x \notin \mathrm{Cof}^X \Leftrightarrow \alpha^X_{f(x)}$

минимальна. Для каждого n и каждого x определим X-вычислимую нумерацию γ_x^n, сводящуюся к $\alpha_{f(x)}^X$, полагая $\gamma_x^n i = \alpha_{f(x)}^X h_n(z_i^n)$. Пусть ν — X-вычислимая нумерация $\mathscr{A}$ и E_0, E_1 — два различных множества, принадлежащих $\mathscr{A}$. Произвольно фиксируем x и равномерно по x определим нумерацию $\alpha_{f(x)}^X$, предпринимая попытки удовлетворить для всех n и e требованиям

$$R_{n,e} : \forall y \geq n \left[y \in W_x^X \right] \Rightarrow \alpha_{f(x)}^X \neq \gamma_x^n \varphi_e \text{ и } \gamma_x^n \text{ нумерует } \mathscr{A}$$

и удовлетворяя для всех m требованиям

$$N_m : \exists y \left[\alpha_{f(x)}^X y = \nu m \right].$$

При этом если $x \in \mathrm{Cof}^X$ и n — наименьшее число, удовлетворяющее условию $[n, \infty) \subseteq W_x^X$, то γ_x^n — нумерация $\mathscr{A}$ и $R_{n,e}$ выполнено для всех e. Если $x \notin \mathrm{Cof}^X$, то для каждого n выполним условие

$$\exists j \forall i > j \forall a, b \in B_i^n \left[\alpha_{f(x)}^X a = \alpha_{f(x)}^X b \right], \tag{1}$$

из которого следует сводимость $\alpha_{f(x)}^X \leq \alpha_{f(x)}^X \circ h_n$.

Построение $\alpha_{f(x)}^X$ и вспомогательной функции $c(n, s)$.

Шаг 0. Полагаем $\alpha_{f(x),0}^X = \varnothing$, $c(n, 0) = 0$ и отмечаем $R_{n,e}$, N_n как *требующие внимания* для всех n и e. На последующих шагах требования, отмеченные *выполненными*, считаем не требующими внимания.

Шаг $2s + 1$. Предположим, что существует $n \leq s$, удовлетворяющее условию

$$\exists m \left[[n, m] \subseteq W_{x,s}^X \,\&\, m - n > c(n, s) \right].$$

Фиксируем наименьшее такое n (если такого n не существует, то переходим к следующему шагу, не изменяя никаких величин, участвующих в построении). Положим $c(n, s+1) = c(n, s) + 1$. Выберем такое наименьшее i, что для некоторого $b \in C_i^n$ значение $\alpha_{f(x),s}^X b$ не определено. Положим $\alpha_{f(x),s+1}^X a = \nu c(n, s)$ для всех $a \leq \max B_i^n$, не принадлежащих области определения $\alpha_{f(x),s}^X$.

Выберем такое наименьшее $e \leq s$, что $d_s(q_s(n), e) = 1$ и $R_{n,e}$ требует внимания. Если такого e не существует, то оставим все величины неизмененными и перейдем к следующему шагу. Согласно такому выбору найдется $v > s$, удовлетворяющее одному из трех условий:

1) $d_v(q_s(n), e) = 0$;

2) $q_s(n) \neq q_v(n)$;

3) существуют i и y такие, что $y \in C_i^n$, $\varphi_{e,v}(y)$ определено, а $\alpha_{f(x),s}^X y$ и $\gamma_{x,s}^n \varphi_e(y)$ не определены.

Фиксируем наименьшее $v > s$, для которого выполнено одно из условий 1–3. При выполнении одного из первых двух условий оставим все величины неизмененными и перейдем к следующему шагу. В противном случае фиксируем наименьшее i, а для него, в свою очередь, наименьшее y, удовлетворяющие условию 3. Обозначим $j = \varphi_{e,v}(y)$. Пусть u — наибольшее из чисел $\max C_i^n$ и $\max B_j^n$. Для всех $a \leq u$, не принадлежащих области определения $\alpha_{f(x),s}^X$, положим

$$\alpha_{f(x),s+1}^X a = \begin{cases} E_0, & \text{если } a \in C_i^n, \\ E_1, & \text{если } a \notin C_i^n, \end{cases}$$

и отметим $R_{n,e}$ *выполненным*.

Шаг $2s+2$. Выберем наименьшее m, для которого N_m требует внимания, и наименьшее i такое, что $\alpha^X_{f(x),s}b$ не определено для некоторого $b \in B^m_i$. Положим $\alpha^X_{f(x),s+1}a = \nu m$ для всех $a \in B^n_i$, не принадлежащих области определения $\alpha^X_{f(x),s}$, и отметим N_m *выполненным.*

Пусть $\alpha_{f(x)} = \bigcup\limits_s \alpha^X_{f(x),s}$. Этим завершается построение.

Непосредственно из построения следует, что для каждого x требование N_m удовлетворено. Следовательно, $\alpha^X_{f(x)} = \mathscr{A}$ для всех x. Покажем, что $x \in \mathrm{Cof}^X$ тогда и только тогда, когда $f(x) \notin \mathrm{Min}^X(\mathscr{A})$. Пусть $x \in \mathrm{Cof}^X$. Выберем такое наименьшее n, что $[n,\infty) \subseteq W^X_x$. Стало быть, существует бесконечно много таких s, что $\alpha^X_{f(x),s+1}a = \nu c(n,s)$ для всех a, принадлежащих некоторому B^n_i и не принадлежащих области определения $\alpha^X_{f(x),s}$. При этом $\alpha^X_{f(x),s}b$ не определено для некоторого $b \in C^n_i$. Следовательно,

$$\alpha_{f(x)}\Big(\bigcup_i C^n_i\Big) = \gamma^n_x(\mathbb{N}) = \mathscr{A}.$$

Таким образом, если существует k такое, что $\varphi_e(x) < k$ для всех $x \in \bigcup\limits_i C^n_i$, то $R_{n,e}$ удовлетворено. Если такого k не существует и φ_e всюду определена, то $D(q(n),e) = 1$. Поскольку $\lim\limits_s d_s(q_s(n),e) = 1$, существует такое s, что для некоторых i и $y \in C^n_i$ имеем $\alpha^X_{f(x),s}y = E_0$, а

$$\gamma^n_x\varphi_e(y) = \alpha^X_{f(x),s}h_n\big(z^n_{\varphi_e(y)}\big) = E_1.$$

Тем самым $R_{n,e}$ удовлетворено. В силу произвольности выбора n и e будет $f(x) \notin \mathrm{Min}^X(\mathscr{A})$. Пусть $x \notin \mathrm{Cof}^X$. Фиксируем произвольно n и покажем, что $\alpha^X_{f(x)} \le \alpha^X_{f(x)} \circ h_n$. С этой целью выберем такое наименьшее s, что $c(k,s) = c(k,u)$ для всех $k \le n$ и всех $u \ge s$. Кроме того, выберем такое $t \ge s$, что N_m для всех $m \le n$ не требует внимания на шаге t. Согласно построению на шагах $v > t$ если $\alpha^X_{f(x),v+1}b$ определено для некоторого b, а $\alpha^X_{f(x),v}b$ не определено, то найдутся такие $m > n$ и i, что либо $b \in B^m_i \setminus C^m_i$ и $\alpha^X_{f(x)}a = \alpha^X_{f(x)}b$ для всех $a \in B^m_i \setminus C^m_i$, либо $b \in C^m_i$ и для всех $a \in C^m_i$ справедливо то же равенство. Ввиду свойств 1, 2 последовательностей B^m_k и C^m_k каждое из множеств C^m_i и B^m_i является конечным объединением некоторых B^n_j. Следовательно, для выбранного n справедливо условие (1). Отсюда $f(x) \in \mathrm{Min}^X(\mathscr{A})$. Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

Отметим, что подобный подход к построению минимальных вычислимых относительно высоких оракулов нумераций использован в [9].

Следствие. *Пусть X — высокое множество и $\mathscr{A}$ — бесконечное X-вычислимое семейство. Тогда существует такая вычислимая функция g, что для каждой последовательности $\{\beta_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ минимальных нумераций $\mathscr{A}$ и каждого числа n если $\{\langle e,m,x\rangle : x \in \beta_e m\} = W^X_n$, то $g(n) \in \mathrm{Min}^X(\mathscr{A})$ и $\alpha^X_{g(n)}$ не эквивалентна ни одной из нумераций β_e, $e \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\{\beta_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ — последовательность минимальных нумераций семейства $\mathscr{A}$ и $\{\langle e,m,x\rangle : x \in \beta_e m\} = W^X_n$. Фиксируем вычислимую функцию h такую, что

$$W^{X''}_{h(n)} = \big\{i : \exists e\,\big[\alpha^X_i \equiv \beta_e\big]\big\}.$$

Также выберем такую вычислимую функцию f, что для всех z

$$W_z^{X''} = \varnothing \Leftrightarrow f(z) \in \mathrm{Min}^X(\mathscr{A}).$$

Пусть l — вычислимая функция, определенная следующим образом:

$$W_{l(x,y)}^{X''} = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } f(y) \in W_{h(x)}^{X''}, \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По теореме рекурсии с параметрами можно фиксировать такую вычислимую функцию k, что $W_{l(x,k(x))}^{X''} = W_{k(x)}^{X''}$ для всех x. Пусть $g = f \circ k$. Если $g(n) \in W_{h(n)}^{X''}$, то $W_{k(n)}^{X''} \neq \varnothing$ и $\alpha_{g(n)}^X$ не минимальна. Следовательно, одна из нумераций β_e не минимальна. Если $g(n) \notin W_{h(n)}^{X''}$, то $\alpha_{g(n)}^X$ минимальна и не эквивалентна ни одной из нумераций β_e. $\square$

Если в следствии положить $X = \varnothing^{(n+1)}$, то получим положительное решение вопроса об эффективной бесконечности множества минимальных Σ_{n+2}^0-вычислимых нумераций бесконечных Σ_{n+2}^0-вычислимых семейств.

Приведем достаточное условие, при выполнении которого можно избежать нижний конус заданной вычислимой относительно высокого оракула нумерации с помощью минимальной нумерации.

Теорема 2. *Пусть X — высокое множество, $Y \leq_T X$, $Y'' \leq_T X'$ и $\mathscr{A}$ — бесконечное семейство, обладающее Y-вычислимой нумерацией α. Тогда существует минимальная X-вычислимая нумерация γ семейства $\mathscr{A}$, не сводящаяся к α.*

Доказательство. Пусть $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — X-вычислимая нумерация всех неограниченных вычислимых функций. Определим множества Z_n и B_i^n, как в доказательстве теоремы 1. Пусть $E_0, E_1 \in \mathscr{A}$ и $E_0 \not\subseteq E_1$. Фиксируем элемент $r \in E_0 \setminus E_1$. Определим Y''-вычислимый предикат F, полагая

$$F(e) \Leftrightarrow \forall k \exists y > k\, [r \in \alpha\varphi_e(y)].$$

Обозначим через f его характеристическую функцию. Пусть $f = \lim_s f_s$, где $\{f_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — X-вычислимая последовательность функций.

Построим минимальную X-вычислимую нумерацию γ, удовлетворяя для всех e требованиям $R_e : \gamma \neq \alpha\varphi_e, \quad N_e : \exists x\, [\gamma x = \alpha e]$. Фиксируем равномерно Y-вычислимую по x и s последовательность конечных множеств $\alpha_s x$ такую, что $\alpha x = \bigcup_s \alpha_s x$ для всех x.

Построение γ.

Шаг 0. Пусть $\gamma_0 = \varnothing$. Отметим все требования R_e *требующими внимания.*

Шаг $s + 1 = 3t + 1$. Выберем такое наименьшее $e \leq s$, что $f_s(e) = 1$ и R_e требует внимания. Сразу перейдем к следующему шагу, если такого e не существует. Выберем $v > s$, удовлетворяющее одному из следующих условий:

1) $f_v(e) = 0$;

2) $\exists y\, [r \in \alpha_v\varphi_{e,v}(y) \,\&\, \gamma_s y$ не определено$]$.

Если выполняется условие 1, то перейдем к следующему шагу. Если условие 1 не выполняется и выполняется условие 2, то выберем соответствующее y. Пусть $y \in B_i^e$. Определим $\gamma_{s+1} b = E_1$ для всех $b \leq \max B_i^e$, на которых $\gamma_s b$ не определено, и отметим R_e *выполненным.*

Шаг $s+1=3t+2$. Выберем наименьшее y, на котором $\gamma_s y$ не определено. Пусть $y \in B_i^s$. Положим $\gamma_{s+1}b = E_1$ для всех $b \in B_i^s$, на которых $\gamma_s b$ не определено.

Шаг $s+1=3t+3$. Выберем наименьшее y, на котором $\gamma_s y$ не определено. Пусть $y \in B_i^s$. Положим $\gamma_{s+1}b = \alpha t$ для всех $b \in B_i^s$, на которых $\gamma_s b$ не определено.

Непосредственно из построения следует, что каждое требование N_e удовлетворено и существует бесконечно много y, для которых $\gamma y = E_1$. Фиксируем произвольно e и покажем, что каждое требование R_e удовлетворено. Если существует лишь конечное число y, для которых $r \in \alpha\varphi_e(y)$, то, очевидно, R_e удовлетворено. В противном случае выберем такой шаг $s=3t+1$, что $f_v(e)=1$ для всех $v \geq s$ и каждое R_i, $i<e$, либо отмечено выполненным на некотором раннем шаге, либо не требует внимания ни на каком из более поздних шагов. Тогда для некоторого y, удовлетворяющего условию 2 шага $3t+1$, справедливо неравенство $\gamma_s y \neq \alpha\varphi_e(y)$. Наконец, покажем, что γ минимальна. Для этого фиксируем произвольное n и установим, что $\gamma \leq \gamma \circ h_n$. Выберем такой шаг $s>n$, что каждое R_i, $i \leq n$, либо отмечено выполненным на некотором раннем шаге, либо не требует внимания ни на каком из более поздних шагов. Согласно такому выбору если $\gamma_{v+1}y$ определено, а $\gamma_v y$ не определено для некоторых i, $y \in B_i^n$ и $v>s$, то $\gamma y = \gamma z$ для всех $z \in B_i^n$. Следовательно, $\gamma y = \gamma h_n(z_i)$. Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

Следствие. *Пусть $\mathscr{A}$ — бесконечное Σ^0_{n+2}-вычислимое семейство, Y — 2-низкое над $\varnothing^{(n)}$ множество и $Y \leq_T \varnothing^{(n+1)}$. Тогда для любой Y-вычислимой нумерации α семейства $\mathscr{A}$ существует минимальная Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация того же семейства, не сводящаяся к α.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Сорби А.* Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.
2. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 507–522.
3. *Бадаев С. А., Подзоров С. Ю.* Минимальные накрытия в полурешетках Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 769–778.
4. *Бадаев С. А., Гончаров С. С., Сорби А.* Об элементарных теориях полурешеток Роджерса // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 3. С. 261–268.
5. *Бадаев С. А., Гончаров С. С., Сорби А.* Типы изоморфизмов полурешеток Роджерса семейств из различных уровней арифметической иерархии // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 6. С. 637–654.
6. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
7. *Ershov Yu. L.* Theory of numberings // Handbook of computability theory (E. R. Griffor, ed.). Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 473–503. (Stud. Logic Found. Math.; V. 140).
8. *Soare R. I.* Recursively enumerable sets and degrees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1987.
9. *Файзрахманов М. Х.* Универсальные обобщенно вычислимые нумерации и гипериммунность // Алгебра и логика (в печати).

Статья поступила 3 марта 2016 г., окончательный вариант — 13 декабря 2016 г.

Файзрахманов Марат Хайдарович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
marat.faizrahmanov@gmail.com