Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 517.968.4+517.929

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МОДЕЛЯХ ЖИВЫХ СИСТЕМ

Н. В. Перцев

Аннотация. Рассматривается проблема корректности нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений с запаздыванием, возникающих при разработке математических моделей живых систем. Исследуются вопросы существования, единственности и неотрицательности решений изучаемого семейства уравнений на бесконечной полуоси. Изучается непрерывная зависимость решений от начальных данных на конечных промежутках времени.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.315

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, дифференциальное уравнение с запаздыванием, глобальная разрешимость, неотрицательность решения, математическая модель, корректность, живые системы.

Введение

Для разработки математических моделей живых систем используется широкий математический аппарат, включая интегральные уравнения с запаздывающими переменными. Наличие запаздывающих переменных обусловлено необходимостью учета предыстории развития живых систем. Вывод интегральных уравнений, как правило, основан на балансовых соотношениях между количеством произведенных элементов живых систем и количеством этих элементов, доживших до определенного момента времени. Кроме того, некоторые интегральные уравнения представляют собой результат интегрирования дифференциальных уравнений, в том числе уравнений в частных производных.

Одним из основных аспектов применения интегральных и дифференциальных уравнений в изучении живых систем является корректность этих уравнений. Возможность использования того или иного уравнения в качестве математической модели некоторой живой системы предполагает существование, единственность и непрерывную зависимость решений от начальных данных на конечном промежутке времени. В силу специфики объекта моделирования к этим задачам добавляются вопросы, касающиеся условий продолжимости, неотрицательности и ограниченности решений на полуоси.

Целью настоящей работы является исследование корректности одного семейства интегральных уравнений, используемых для математического моделирования живых систем.

1. Интегральное уравнение

Пусть I, J — промежутки в $R = (-\infty, \infty)$, $R_+ = [0, \infty)$. Обозначим через $C(I, J)$ множество всех непрерывных функций $y : I \to J$. Зафиксируем $y \in C(R, R)$. Пусть $\sigma \in R_+$ — заданное число. Следуя [1, гл. 2, § 2.1; 2, гл. 1, § 2], для каждого фиксированного $t \geq 0$ определим функцию y_t по правилу

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \quad \theta \in [-\sigma, 0].$$

Рассмотрим некоторую живую систему, состоящую из элементов одного типа. Обозначим через $x(t)$ количество элементов системы в момент времени $t \in R$. Примем, что динамика $x(t)$ описывается следующими соотношениями:

$$x(t) = e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s)\,ds}\psi(t) + \int\limits_0^t P(a) e^{-\int\limits_{t-a}^t g(s,x_s)\,ds} f(t-a, x_{t-a})\,da, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega = [-\omega, 0]. \tag{2}$$

В формулах (1), (2) функция $\psi(t)$ отражает количество первоначальных элементов живой системы, т. е. элементов, появившихся до $t = 0$ и существующих в момент времени t. Полагаем, что

$$\psi(t) = \int\limits_0^\infty P_0(a)\varphi(t-a)\,da, \quad t \in I_\omega, \tag{3}$$

$$\psi(t) = \int\limits_t^\infty P_0(a)\varphi(t-a)\,da, \quad t \in [0, \infty). \tag{4}$$

Функция $\varphi(t-a)$ задает скорость появления первоначальных элементов системы в момент $t - a$, функция $P_0(a)$ описывает долю этих элементов, не покинувших систему за промежуток $[t - a, t]$.

Интеграл

$$\int\limits_0^t P(a) e^{-\int\limits_{t-a}^t g(s,x_s)\,ds} f(t-a, x_{t-a})\,da$$

равен числу новых элементов живой системы, т. е. элементов, воспроизведенных системой за время $[0, t]$ и оставшихся в системе к моменту времени t. Отображение $f(t - a, x_{t-a})$ и функция $P(a)$ описывают соответственно скорость появления новых элементов живой системы в момент времени $t - a$ и долю этих элементов, не покинувших систему за промежуток $[t - a, t]$.

Отображение $g(s, x_s)$ означает интенсивность гибели элементов живой системы в зависимости от текущего времени s и численности элементов системы x_s на промежутке времени $[s - \omega, s]$.

Пусть выполнены следующие предположения.

(H1) Функции P_0, P определены и не возрастают на промежутке $[0, \infty)$,

$$0 \leq P_0(a) \leq 1, \quad 0 \leq P(a) \leq 1, \quad P_0(0) = P(0) = 1,$$

$$\widehat{P_0} = \int\limits_0^\infty P_0(a)\,da < \infty, \quad \widehat{P} = \int\limits_0^\infty P(a)\,da < \infty.$$

(H2) Функция φ определена, неотрицательна, непрерывна на промежутке $(-\infty, 0]$ и $\varphi(s) = 0$ для всех $s \in (-\infty, \tau_\varphi]$, где $\tau_\varphi < 0$ — некоторая константа.

(H3) Существует константа $\xi < 0$ такая, что $f, g : R_+ \times C(I_\omega, [\xi, \infty)) \to R$ представляют собой непрерывные отображения и, кроме того,

$$f, g : R_+ \times C(I_\omega, R_+) \to R_+.$$

В рамках предположений (H1), (H2) функция ψ, заданная формулами (3), (4), определена, неотрицательна и непрерывна на промежутке $[-\omega, \infty)$. Эти свойства вытекают из формы записи $\psi(t)$, которую можно рассматривать как свертку интегрируемой и финитной функций, каждая из которых неотрицательна. Кроме того, ψ не возрастает на промежутке $[0, \infty)$. Действительно, пусть $t_1, t_2 \in [0, \infty)$, $t_1 < t_2$. Используя в (4) замену переменных $a = t + s$, получаем, что

$$\psi(t_1) - \psi(t_2) = \int\limits_0^\infty (P_0(t_1 + s) - P_0(t_2 + s))\varphi(-s)\, ds \geq 0.$$

Пусть T — конечный промежуток $[0, \tau]$ или полуось $[0, \infty)$. *Решением задачи* (1), (2) *на промежутке* T будем называть функцию x, непрерывную на промежутке $I_\omega \cup T$ и удовлетворяющую начальному условию (2) и уравнению (1) для всех $t \in T$.

2. Частные случаи и переход к эквивалентным задачам Коши для дифференциальных уравнений

Представим задачу (1), (2) и эквивалентную ей задачу Коши для дифференциальных уравнений с запаздыванием в двух типичных случаях. Каждый из приведенных ниже случаев предполагает конкретный способ задания функций P_0 и P. Функция φ и отображения f, g считаются известными и удовлетворяющими соответственно предположениям (H2) и (H3). Пусть $x = x(t)$ — решение задачи (1), (2) на любом фиксированном промежутке $[0, \tau]$, выражение $dx(t)/dt$ означает правостороннюю производную.

Случай 1. Пусть $P_0(a) = P(a) = e^{-\mu a}$, $a \geq 0$, $\mu > 0$ — некоторая константа. Тогда

$$\psi(t) = \int\limits_0^\infty e^{-\mu a}\varphi(t - a)\, da,\ t \in I_\omega, \quad \psi(t) = e^{-\mu t}\psi(0),\ t > 0.$$

Задачу (1), (2) можно записать в виде

$$x(t) = e^{-\int\limits_0^t (\mu + g(s, x_s))\, ds} \left(\psi(0) + \int\limits_0^t e^{\int\limits_0^\alpha (\mu + g(s, x_s))\, ds} f(\alpha, x_\alpha)\, d\alpha \right), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega. \tag{6}$$

Дифференцируя (5) и учитывая (6), приходим к задаче Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t) - (\mu + g(t, x_t))x(t),\ t \geq 0, \quad x(t) = \psi(t),\ t \in I_\omega. \tag{7}$$

Математические модели в виде задачи Коши (7) и их многомерные аналоги встречаются при исследовании разнообразных живых систем. Примеры таких моделей представлены, в частности, в [3–7].

Отметим, что для многих моделей правая часть дифференциального уравнения, входящего в (7), вообще говоря, не удовлетворяет глобальному условию Липшица. Как следствие, здесь не может быть применена классическая теорема о существовании решения на полуоси $t \in [0,\infty)$ [2, гл. 2, § 2]. Поэтому для исследования корректности задачи Коши (7) требуется привлечение дополнительных предположений. По аналогии с [8, гл. VII, § 1] одно из таких предположений может быть связано с оценкой отображения f.

Случай 2. Выберем функции P_0, P в следующем виде:

$$P_0(a) = P(a) = 1,\ a \in [0,\sigma), \quad P_0(a) = P(a) = 0,\ a \in [\sigma,\infty),$$

где $\sigma > 0$ — некоторое число. Отсюда следует, что

$$\psi(t) = \int_0^{\sigma} \varphi(t-a)\,da = \int_{t-\sigma}^{t} \varphi(s)\,ds, \quad t \in I_\omega,$$

$$\psi(t) = \int_t^{\sigma} \varphi(t-a)\,da = \int_{t-\sigma}^{0} \varphi(s)\,ds,\ t \in [0,\sigma), \quad \psi(t) = 0,\ t \in [\sigma,\infty).$$

Задача (1), (2) принимает вид

$$x(t) = e^{-\int_0^t g(s,x_s)\,ds}\psi(t) + \int_0^t e^{-\int_{t-a}^t g(s,x_s)\,ds} f(t-a, x_{t-a})\,da, \quad 0 \le t < \sigma, \tag{8}$$

$$x(t) = \int_0^{\sigma} e^{-\int_{t-a}^t g(s,x_s)\,ds} f(t-a, x_{t-a})\,da, \quad t \ge \sigma, \tag{9}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega. \tag{10}$$

Дифференцируя (8), (9) и учитывая (10), приходим к задаче Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x_t) - g(t,x_t)x(t) - e^{-\int_0^t g(s,x_s)\,ds}\varphi(t-\sigma), \quad 0 \le t < \sigma, \tag{11}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x_t) - g(t,x_t)x(t) - e^{-\int_{t-\sigma}^t g(s,x_s)\,ds} f(t-\sigma, x_{t-\sigma}), \quad t \ge \sigma, \tag{12}$$

$$x(t) = \int_{t-\sigma}^{t} \varphi(s)\,ds, \quad t \in I_\omega. \tag{13}$$

Математические модели в виде уравнения (12) и некоторые их аналоги в виде дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием представлены в работах, посвященных изучению динамики популяций и эпидемических процессов [9–12], исследованию процесса производства тромбоцитов и эритроцитов [13, 14], и в ряде других публикаций.

Отметим, что уравнение (11) и начальные данные в форме (13) играют существенную роль в корректности задачи Коши (11)–(13). Действительно, если математическую модель строить на основе уравнения (12) без учета (11) и специальных начальных данных (13), то возникает задача Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x_t) - g(t,x_t)x(t) - e^{-\int_{t-\sigma}^t g(s,x_s)\,ds} f(t-\sigma, x_{t-\sigma}), \quad t \ge \sigma, \tag{14}$$

$$x(t) = x^{(0)}(t), \quad t \in [-\omega, \sigma], \tag{15}$$

где $x^{(0)}$ — произвольная неотрицательная и непрерывная на $[-\omega, \sigma]$ функция. Покажем, что система (14), (15) допускает решение, принимающее отрицательные значения. Примем, что $f(t, x_t) = rx(t-\omega)$, $r > 0$ — некоторая константа, функция $x^{(0)}$ строго убывает, $x^{(0)}(-\omega) > 0$, $x^{(0)}(\sigma) = 0$. Пусть $x(t)$ — решение задачи Коши (14), (15) на промежутке $[\sigma, \tau)$, $\tau > \sigma$. Это означает, что $x(t)$ определена и непрерывна на промежутке $[-\omega, \tau)$ и удовлетворяет начальному условию (15) и уравнению (14) для всех $t \in [\sigma, \tau)$. Подставив $t = \sigma$ в (14), получим

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt}\bigg|_{t=\sigma} &= rx(\sigma-\omega) - g(\sigma, x_\sigma)x(\sigma) - e^{-\int\limits_0^\sigma g(s,x_s)\,ds} rx(-\omega) \\ &= r\big(x^{(0)}(\sigma-\omega) - g\big(\sigma, x^{(0)}_\sigma\big)x^{(0)}(\sigma) - e^{-\int\limits_0^\sigma g(s,x^{(0)}_s)\,ds} x^{(0)}(-\omega)\big).\end{aligned}$$

По условию $x^{(0)}(-\omega) > x^{(0)}(\sigma - \omega)$. Тогда можно указать $g(t, x_t)$ или задать $x^{(0)}(-\omega)$ такие, что

$$\frac{dx(t)}{dt}\bigg|_{t=\sigma} = r(x^{(0)}(\sigma-\omega) - e^{-\int\limits_0^\sigma g(s,x^{(0)}_s)\,ds} x^{(0)}(-\omega)) < 0.$$

В частности, достаточно взять $g(t, x_t) = \mu = \mathrm{const} \geq 0$, где μ — некоторая подходящая константа. Так как $x(\sigma) = x^{(0)}(\sigma) = 0$, найдется $s > \sigma$ такое, что $x(t) < 0$ для всех $t \in (\sigma, s)$.

В итоге получаем, что модель вида (14), (15) при произвольном задании начальной функции некорректна и следует использовать полную запись уравнений модели в форме (11)–(13) или (8)–(10).

3. Дополнительные предположения и вспомогательные результаты

Положим $I = [a, b]$, где a, b — некоторые числа, $a < b$. Для любого $\gamma \geq 0$ множество $C(I, R)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|z\|_\gamma = \max_{\theta \in I}\big(e^{-\gamma\theta}|z(\theta)|\big), \quad z \in C(I, R).$$

При $\gamma = 0$ для краткости записи полагаем, что $\|z\|_0 = \|z\|$. Обозначим через $B_d = \{z \in C(I_\omega, R) : \|z\| \leq d\}$ шар в пространстве $C(I_\omega, R)$.

В дополнение к (H1)–(H3) введем еще два предположения.

(H4) Отображения f и g локально липшицевы, а именно для любого шара B_d существуют константы $L_f > 0$ и $L_g > 0$ такие, что при всех $z_1, z_2 \in B_d \cap C(I_\omega, [\xi, \infty))$ и $t \in [0, \infty)$ выполнены неравенства

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L_f\|z_1 - z_2\|, \quad |g(t, z_1) - g(t, z_2)| \leq L_g\|z_1 - z_2\|.$$

(H5) Для всех $(t, z) \in R_+ \times C(I_\omega, R_+)$ справедлива оценка

$$f(t, z) \leq p + m\|z\|,$$

где $p > 0$, $m > 0$ — некоторые константы.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения* (H1)–(H4). *Тогда если задача* (1), (2) *имеет решение на некотором промежутке* $[0,\tau]$, *то оно единственно.*

Доказательство. Предположим, что x, y — два решения задачи (1), (2) на промежутке $[0,\tau]$. В силу определения решения x, y — непрерывные на промежутке $[-\omega,\tau]$ функции,

$$x(t) = y(t) = \psi(t) \geq 0, \quad t \in I_\omega,$$

$$x(t) = e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s)\,ds}\psi(t) + \int\limits_0^t P(t-\alpha)e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s)\,ds} f(\alpha, x_\alpha)\,d\alpha,$$

$$y(t) = e^{-\int\limits_0^t g(s,y_s)\,ds}\psi(t) + \int\limits_0^t P(t-\alpha)e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,y_s)\,ds} f(\alpha, y_\alpha)\,d\alpha, \quad t \in [0,\tau],$$

и для всех $t \in [-\omega,\tau]$ верно $x(t) \geq \xi$, $y(t) \geq \xi$, где константа $\xi < 0$ указана в предположении (H3). Используя непрерывность x, y, получаем, что существует константа $c > 0$ такая, что

$$\xi \leq x(t), y(t) \leq c, \quad t \in [-\omega,\tau]. \tag{16}$$

Опираясь на (16), введем константы Липшица L_f, L_g отображений f и g, а также константы M_f, M_g, отражающие числовые значения этих отображений:

$$M_f = \max_{0\leq t\leq\tau} |f(t,y_t)| \geq 0, \quad M_g = \max_{0\leq\alpha\leq t\leq\tau} e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s)\,ds} > 0.$$

Кроме того, введем константу $H_g > 0$, входящую в неравенство

$$|e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s)\,ds} - e^{-\int\limits_0^t g(s,y_s)\,ds}| \leq H_g \int\limits_0^t |g(s,x_s) - g(s,y_s)|\,ds, \quad t \in [0,\tau],$$

которое является следствием формулы Лагранжа (конечных приращений) для функции $\exp(-w)$, $w \in [a,b]$, где $[a,b]$ — некоторый промежуток.

Оценим $|x(t) - y(t)|$, $t \in [-\omega,\tau]$. Ясно, что $|x(t) - y(t)| = 0$, $t \in [-\omega,0]$. Рассмотрим случай $t \in [0,\tau]$. Имеем

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) = G(t) + Q(t) = (e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s)\,ds} - e^{-\int\limits_0^t g(s,y_s)\,ds})\psi(t) \\ + \int\limits_0^t P(t-\alpha)(e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s)\,ds} f(\alpha,x_\alpha) - e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,y_s)\,ds} f(\alpha,y_\alpha))\,d\alpha. \end{aligned}$$

Для $|G(t)|$ получаем

$$|G(t)| \leq H_g \int\limits_0^t |g(s,x_s) - g(s,y_s)|\,ds\psi(t) \leq H_g L_g \psi(0) \int\limits_0^t \|x_s - y_s\|\,ds, \quad t \in [0,\tau].$$

Запишем $Q(t)$ в следующем виде:

$$Q(t) = \int\limits_0^t P(t-\alpha) e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s)\,ds} (f(\alpha, x_\alpha) - f(\alpha, y_\alpha))\, d\alpha$$

$$+ \int\limits_0^t P(t-\alpha)(e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s)\,ds} - e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,y_s)\,ds}) f(\alpha, y_\alpha)\, d\alpha, \quad t \in [0,\tau].$$

Отсюда получаем оценку

$$|Q(t)| \le \int\limits_0^t P(t-\alpha) \left(M_g L_f \|x_\alpha - y_\alpha\| + H_g M_f L_g \int\limits_\alpha^t \|x_s - y_s\|\, ds \right) d\alpha$$

$$\le (M_g L_f + H_g M_f L_g \widehat{P}) \int\limits_0^t \|x_s - y_s\|\, ds, \quad t \in [0,\tau].$$

Таким образом,

$$|x(t) - y(t)| = 0,\ t \in [-\omega, 0], \quad |x(t) - y(t)| \le M \int\limits_0^t \|x_s - y_s\|\, ds,\ t \in [0,\tau],$$

где $M = H_g L_g \psi(0) + M_g L_f + H_g M_f L_g \widehat{P} > 0$. Отметим, что константа M зависит от τ, ξ, d, но не зависит от t. Пусть $t \in [0,\tau]$, $\theta \in [-\omega, 0]$. Тогда

$$|x(t+\theta) - y(t+\theta)| = 0, \quad t+\theta \le 0,$$

$$|x(t+\theta) - y(t+\theta)| \le M \int\limits_0^{t+\theta} \|x_s - y_s\|\, ds \le M \int\limits_0^t \|x_s - y_s\|\, ds, \quad t+\theta \ge 0,$$

$$\|x_t - y_t\| = \max_{\theta \in [-\omega,0]} |x(t+\theta) - y(t+\theta)| \le M \int\limits_0^t \|x_s - y_s\|\, ds.$$

Применяя лемму Гроноулла — Беллмана к функции $u(t) = \|x_t - y_t\|$, $t \in [0,\tau]$, получаем, что $u \equiv 0$. В итоге имеем $x(t) = y(t)$ для всех $t \in [-\omega, \tau]$. Лемма доказана.

Зафиксируем $\tau > 0$. Обозначим через $C_{\psi,\tau} \subset C([-\omega,\tau], R)$ множество, состоящее из всех функций $x \in C([-\omega,\tau], R)$ таких, что $x(t) = \psi(t)$, $t \in I_\omega$.

Пусть $\upsilon(t) = c\exp(\eta t)$, $t \in R$, где $c > 0$, $\eta > 0$ — некоторые константы. Введем конусный отрезок

$$K_{\upsilon,\tau} = \{x \in C_{\psi,\tau} : 0 \le x(t) \le \upsilon(t),\ t \in [-\omega,\tau]\}.$$

Отметим, что $K_{\upsilon,\tau}$ замкнут в $C([-\omega,\tau], R)$ и, следовательно, является полным метрическим пространством в метриках, порожденных нормами $\|\cdot\|_\gamma$.

Определим оператор F, который каждой функции $x \in K_{\upsilon,\tau}$ сопоставляет неотрицательную функцию $F(x) \in C_{\psi,\tau}$ по формулам

$$F(x)(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega,$$

$$F(x)(t) = e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s)\,ds}\psi(t) + \int\limits_0^t P(a)e^{-\int\limits_{t-a}^t g(s,x_s)\,ds} f(t-a, x_{t-a})\,da$$

$$= e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s)\,ds}\psi(t) + \int\limits_0^t P(t-\alpha)e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s)\,ds} f(\alpha, x_\alpha)\,d\alpha, \quad t \in [0,\tau].$$

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения* (H1)–(H3), (H5) *и параметры функции* υ*, входящей в определение* $K_{\upsilon,\tau}$*, таковы:*

$$\eta = m, \quad c = \max\{\psi(0) + p\widehat{P}; \max_{s \in I_\omega}(e^{-\eta s}\psi(s))\}.$$

Тогда $F(K_{\upsilon,\tau}) \subseteq K_{\upsilon,\tau}$.

Доказательство. Пусть $x \in K_{\upsilon,\tau}$. Непрерывность $y(t) = F(x)(t)$ следует из определения оператора F. Далее, $\eta > 0$, $c > 0$,

$$0 \le F(x)(t) = \psi(t) \le \upsilon(t), \quad t \in I_\omega,$$

$$0 \le F(x)(t) \le \psi(t) + \int\limits_0^t P(t-\alpha) f(\alpha, x_\alpha)\,d\alpha$$

$$\le \psi(0) + \int\limits_0^t P(t-\alpha)(p + m\|x_\alpha\|)\,d\alpha$$

$$\le \psi(0) + p\widehat{P} + m\int\limits_0^t \max_{\theta\in[-\omega,0]} x(\alpha+\theta)\,d\alpha \le \psi(0) + p\widehat{P} + m\int\limits_0^t ce^{\eta\alpha}\,d\alpha$$

$$= \psi(0) + p\widehat{P} + \frac{cm}{\eta}\big(e^{\eta t} - 1\big) \le c + c\big(e^{\eta t} - 1\big) = ce^{\eta t} = \upsilon(t), \quad t \in [0,\tau].$$

Следовательно, $F : K_{\upsilon,\tau} \to K_{\upsilon,\tau}$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения* (H1)–(H5). *Тогда при некотором* $\gamma > 0$ *оператор* F *сжимающий на пространстве* $K_{\upsilon,\tau}$ *с метрикой, порожденной* $\|\cdot\|_\gamma$.

Доказательство. Для любой пары $x^{(1)}, x^{(2)} \in K_{\upsilon,\tau}$ имеем

$$0 \le x^{(1)}(t), x^{(2)}(t) \le \upsilon(\tau), \quad t \in [-\omega, \tau], \tag{17}$$

где функция $\upsilon(t)$ указана в лемме 2. Опираясь на (17), введем константы Липшица L_f, L_g отображений f и g, а также константу

$$M_f = p + m\upsilon(\tau) \ge \max_{0\le t\le\tau} f\big(t, x_t^{(2)}\big) \ge 0,$$

отражающую числовое значение f. Оценим $\|F(x^{(1)}) - F(x^{(2)})\|_\gamma$ при фиксированном $\gamma > 0$. Для каждого $t \in I_\omega$ верно

$$e^{-\gamma t}|F(x^{(1)})(t) - F(x^{(2)})(t)| = 0.$$

Для $t \in [0,\tau]$ запишем

$$e^{-\gamma t}(F(x^{(1)})(t) - F(x^{(2)})(t)) = e^{-\gamma t}G(t) + e^{-\gamma t}Q(t)$$

$$= e^{-\gamma t}\big(e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s^{(1)})\,ds} - e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s^{(2)})\,ds}\big)\psi(t)$$

$$+ e^{-\gamma t}\int\limits_0^t P(t-\alpha)\big(e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s^{(1)})\,ds} f\big(\alpha,x_\alpha^{(1)}\big) - e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s^{(2)})\,ds} f\big(\alpha,x_\alpha^{(2)}\big)\big)\,d\alpha.$$

Пользуясь неотрицательностью $g\big(s,x_s^{(i)}\big)$, $i=1,2$, и оценивая $|G(t)|$, приходим к соотношениям

$$e^{-\gamma t}|G(t)| = e^{-\gamma t}\Big|e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s^{(1)})\,ds} - e^{-\int\limits_0^t g(s,x_s^{(2)})\,ds}\Big|\psi(t)$$

$$\le e^{-\gamma t}\int\limits_0^t \big|g\big(s,x_s^{(1)}\big) - g\big(s,x_s^{(2)}\big)\big|\,ds\psi(t) \le e^{-\gamma t}\int\limits_0^t L_g\big\|x_s^{(1)} - x_s^{(2)}\big\|\,ds\psi(t)$$

$$\le L_g\psi(0)e^{-\gamma t}\int\limits_0^t e^{\gamma s}e^{-\gamma s}\max_{\theta\in[-\omega,0]}(|x^{(1)}(s+\theta) - x^{(2)}(s+\theta)|)\,ds$$

$$\le L_g\psi(0)e^{-\gamma t}\int\limits_0^t e^{\gamma s}\max_{\theta\in[-\omega,0]}(e^{-\gamma(s+\theta)}|x^{(1)}(s+\theta) - x^{(2)}(s+\theta)|)\,ds$$

$$\le L_g\psi(0)e^{-\gamma t}\int\limits_0^t e^{\gamma s}\max_{s\in[0,t]}\max_{\theta\in[-\omega,0]}(e^{-\gamma(s+\theta)}|x^{(1)}(s+\theta) - x^{(2)}(s+\theta)|)\,ds$$

$$\le L_g\psi(0)e^{-\gamma t}\int\limits_0^t e^{\gamma s}\max_{s+\theta\in[-\omega,\tau]}(e^{-\gamma(s+\theta)}|x^{(1)}(s+\theta) - x^{(2)}(s+\theta)|)\,ds$$

$$= \frac{L_g\psi(0)}{\gamma}\|x^{(1)} - x^{(2)}\|_\gamma(1-e^{-\gamma t}), \quad t\in[0,\tau].$$

Для $t\in[0,\tau]$ верны соотношения

$$|Q(t)| = \left|\int\limits_0^t P(t-\alpha)\big(e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s^{(1)})\,ds} f\big(\alpha,x_\alpha^{(1)}\big) - e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s^{(2)})\,ds} f\big(\alpha,x_\alpha^{(2)}\big)\big)\,d\alpha\right|$$

$$\le \int\limits_0^t P(t-\alpha)\Big|e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s^{(1)})\,ds} f\big(\alpha,x_\alpha^{(1)}\big) - e^{-\int\limits_\alpha^t g(s,x_s^{(2)})\,ds} f\big(\alpha,x_\alpha^{(2)}\big)\Big|\,d\alpha$$

$$\le \int\limits_0^t P(t-\alpha)\left(L_f\big\|x_\alpha^{(1)} - x_\alpha^{(2)}\big\| + M_f\int\limits_\alpha^t L_g\big\|x_s^{(1)} - x_s^{(2)}\big\|\,ds\right)\,d\alpha$$

$$\le L_f\int\limits_0^t e^{\gamma\alpha}e^{-\gamma\alpha}\big\|x_\alpha^{(1)} - x_\alpha^{(2)}\big\|\,d\alpha$$

$$+\ M_fL_g\int\limits_0^t P(t-\alpha)\left(\int\limits_\alpha^t e^{\gamma s}e^{-\gamma s}\big\|x_s^{(1)} - x_s^{(2)}\big\|\,ds\right)\,d\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t}|Q(t)| &\le \frac{L_f}{\gamma}\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\gamma(1-e^{-\gamma t}) \\ &\quad + \ e^{-\gamma t}M_f L_g\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\gamma \int\limits_0^t P(t-\alpha)\left(\int\limits_\alpha^t e^{\gamma s}\,ds\right)d\alpha \\ &\le \frac{L_f}{\gamma}\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\gamma(1-e^{-\gamma t}) + \frac{M_f L_g \widehat{P}}{\gamma}\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\gamma, \quad t\in[0,\tau]. \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки, получаем, что для всех $t\in[0,\tau]$ верно

$$e^{-\gamma t}|F(x^{(1)})(t)-F(x^{(2)})(t)| \le \frac{1}{\gamma}(L_g\psi(0)+L_f+M_f L_g\widehat{P})\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\gamma.$$

Очевидно, что существует $\gamma>0$ такое, что

$$0<q=\frac{L_g\psi(0)+L_f+M_f L_g\widehat{P}}{\gamma}<1,$$

и имеет место оценка

$$\|F(x^{(1)})-F(x^{(2)})\|_\gamma \le q\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_\gamma. \tag{18}$$

Неравенство (18) завершает доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть выполнены предположения* (H1)–(H5). *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве $C_{\psi,\tau}$, причем решение этой задачи лежит в $K_{\upsilon,\tau}$.*

Доказательство. Из лемм 2 и 3 вытекает, что оператор F переводит полное метрическое пространство $K_{\upsilon,\tau}$ в себя и является сжимающим на нем. Следовательно, оператор F имеет в $K_{\upsilon,\tau}$ единственную неподвижную точку, являющуюся решением задачи (1), (2). В силу леммы 1 других решений в пространстве $C_{\psi,\tau}$ у задачи (1), (2) нет. Лемма доказана.

4. Основные результаты

Применим полученные выше результаты для изучения корректности задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* (H1)–(H5). *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима в множестве непрерывных на полуоси функций, причем ее решение x при всех $t\in[0,\infty)$ удовлетворяет неравенствам $0\le x(t)\le c\exp(\eta t)$.*

Доказательство. Обращаясь к лемме 4, замечаем, что $\tau>0$ может быть выбрано произвольно большим. Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение следует из леммы 2, в которой показано, что постоянные $c>0$ и $\eta>0$, входящие в определение конусного отрезка $K_{\upsilon,\tau}$, не зависят от $\tau>0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* (H1)–(H5). *Тогда решение задачи* (1), (2) *на каждом промежутке $[0,\tau]$ непрерывно зависит от функции φ.*

Доказательство. Зафиксируем $\tau>0$. Пусть $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ — две функции, каждая из которых задана формулами (3), (4), в которые вместо φ подставлены

$\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, удовлетворяющие предположению (H1). Этим функциям отвечают операторы $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$, совпадающие с оператором F при $\psi = \psi^{(1)}$ и $\psi = \psi^{(2)}$, и решения $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ задачи (1), (2) на промежутке $[0, \tau]$ при $F = F^{(1)}$ и $F = F^{(2)}$ соответственно. Пусть $\psi^{(1)}$ фиксирована, а $\psi^{(2)}$ может варьировать за счет изменения $\varphi^{(2)}$. Заметим, что при построении конусного отрезка $K_{\upsilon,\tau}$ константу c, входящую в функцию $\upsilon(t)$ (см. лемму 2), можно выбрать как $c = \max\{c_1, c_2\}$, где

$$c_k = \max\{\psi^{(k)}(0) + p\widehat{P}; \max_{s \in I_\omega}(e^{-\eta s}\psi^{(k)}(s))\}, \quad k = 1, 2.$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|\psi^{(2)} - \psi^{(1)}\| < \delta$ следует неравенство $\|x^{(2)} - x^{(1)}\| < \varepsilon$. Пусть $\gamma > 0$ — некоторая константа. Для всех $t \in [-\omega, 0]$ выполнена оценка

$$e^{-\gamma t}|x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)| = e^{-\gamma t}|\psi^{(2)}(t) - \psi^{(1)}(t)| \le e^{\gamma\omega}\delta.$$

Для $t \in [0, \tau]$ имеем следующие оценки, полученные аналогично оценкам из леммы 3:

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t}|x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)| &= e^{-\gamma t}|F^{(2)}(x^{(2)})(t) - F^{(1)}(x^{(1)})(t)| \\ &\le e^{-\gamma t}|\psi^{(2)}(t) - \psi^{(1)}(t)| + \frac{L_g\psi^{(1)}(0)}{\gamma}\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\gamma \\ &\quad + \frac{L_f}{\gamma}\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\gamma + \frac{M_f L_g \widehat{P}}{\gamma}\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\gamma. \end{aligned}$$

Выбирая γ так, что

$$0 < q = \frac{L_g\psi^{(1)}(0) + L_f + M_f L_g \widehat{P}}{\gamma} < 1,$$

и собирая оценки на двух промежутках, приходим к неравенству

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\gamma \le e^{\gamma\omega}\delta + \delta + q\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\gamma.$$

Как следствие получаем, что

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| < \frac{e^{\gamma(\omega+\tau)} + e^{\gamma\tau}}{1 - q}\delta.$$

Выбирая

$$\delta = \varepsilon(1 - q)/(e^{\gamma(\omega+\tau)} + e^{\gamma\tau}), \tag{19}$$

приходим к требуемому неравенству

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| < \varepsilon. \tag{20}$$

Обращаясь к формулам (3), (4), оценим малость отклонения $\|\psi^{(2)} - \psi^{(1)}\|$ в терминах отклонения $\varphi^{(2)}$ от $\varphi^{(1)}$. По аналогии с разд. 1 нетрудно заметить, что функция

$$\int_t^\infty P_0(a)|\varphi^{(2)}(t - a) - \varphi^{(1)}(t - a)|\, da, \quad t \in [0, \infty),$$

не возрастает на $[0, \infty)$. Тогда

$$\max_{t \in [0,\infty)} \int\limits_t^\infty P_0(a)|\varphi^{(2)}(t-a) - \varphi^{(1)}(t-a)|\, da$$

$$= \int\limits_0^\infty P_0(a)|\varphi^{(2)}(-a) - \varphi^{(1)}(-a)|\, da. \quad (21)$$

Пусть

$$\max_{t \in I_\omega} \int\limits_0^\infty P_0(a)|\varphi^{(2)}(t-a) - \varphi^{(1)}(t-a)|\, da < \delta. \quad (22)$$

Полагая, что δ задано формулой (19), из (22) (и, как следствие, из (21)) получаем оценку (20). Последнее означает, что решение задачи (1), (2) на промежутке $[0, \tau]$ непрерывным образом зависит от изменения функции φ, понимаемого в смысле неравенства (22). Теорема доказана.

Таким образом, задача (1), (2), подчиненная предположениям (H1)–(H5), оказывается однозначно разрешимой на полуоси, а ее решение является непрерывной неотрицательной функцией подэкспоненциального роста, непрерывно зависящей от начальных условий. Все эти свойства обосновывают возможность использования задачи (1), (2) в качестве адекватной математической модели при изучении живых систем

Автор благодарит рецензента за конструктивные замечания и предложения, которые были учтены при подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
2. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
3. *Бабский В. Г., Мышкис А. Д.* Математические модели в биологии, связанные с учетом последействия // Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983. С. 383–390.
4. *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991.
5. *Bocharov G., Hadeler K.* Structured population models, conservation laws and delay equations // J. Differ. Equ. 2000. N 168. P. 212–237.
6. *Beretta E., Hara T., Ma W., Takeuchi Y.* Global asymptotic stability of an SIR epidemic model with distributed time delay // Nonlinear Anal. 2001. V. 47. P. 4107–4115.
7. *Ризниченко Г. Ю.* Математические модели в биофизике и экологии. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М.: Наука, 1970.
9. *Cooke K., York J.* Some equations modelling growth processes and gonorhea epidemics // Math. Biosci. 1973. V. 16. P. 75–101.
10. *Busenberg S., Cooke K.* The effect of integral conditions in certain equations modelling epidemics and population growth // J. Math. Biol. 1980. N 10. P. 13–32.
11. *Aiello W. G., Freedman H. I., Wu J.* Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay // SIAM J. Appl. Math. 1992. V. 52, N 3. P. 855–869.
12. *Fan G., Thieme H. R., Zhu H.* Delay differential systems for tick population dynamics // J. Math. Biol. 2015. N 71. P. 1071–1048.

13. *Bélair J.* Lifespans in population models: Using time delays // Proc. Conf. differential equations models in biology, epidemiology and ecology (S. Busenberg, M. Martelli, eds.). New York: Springer-Verl., 1991. P. 16–27. (Lect. Notes Biomath.; V. 92).

14. *Перцев Н. В.* Двусторонние оценки решений интегродифференциального уравнения, описывающего процесс кроветворения // Изв. вузов. Математика. 2001. № 6. С. 58–62.

Статья поступила 15 июня 2016 г.

Перцев Николай Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал,
ул. Певцова, 13, Омск 644043
homlab@ya.ru