Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.538

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

И. И. Шарапудинов

Аннотация. Рассмотрены специальные ряды по классическим полиномам Лагерра, которые в частных случаях совпадают с рассмотренными автором ранее смешанными рядами, ассоциированными с полиномами Лагерра, а также рядами Фурье — Соболева по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву. Исследованы вопросы равномерной сходимости смешанных рядов по общим полиномам Лагерра и рядов Фурье — Соболева по полиномам Лагерра, ортогональным по Соболеву, на конечном отрезке положительной полуоси. Изучены аппроксимативные свойства частичных сумм специального ряда на положительной полуоси. Основное внимание уделено оценке их функции Лебега.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.217

Ключевые слова: полиномы Лагерра, ортогональные по Соболеву; смешанные ряды; специальные ряды по полиномам Лагерра; аппроксимативные свойства.

§ 1. Введение

В последние годы интенсивное развитие получила (см. [1–6] и цитированную там литературу) теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов на границе области ортогональности. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на отрезке $[a, b]$, могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого отрезка. Это обстоятельство имеет важное значение для приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах отрезка $[a, b]$ со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Обычные ортогональные с положительным на $[a, b]$ весом полиномы этим важным свойством не обладают.

С другой стороны, в ряде работ автора [7–12] были введены так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых также обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со значениями исходной функции. В [7–12] подробно исследованы аппроксимативные свойства смешанных рядов для функций из различных функциональных пространств и классов. В частности, показано,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–01–00486–а).

что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномами в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам успешно могут быть использованы в задачах, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. Кроме того, отметим, что когда для целого $r \geq 1$ классические полиномы Якоби $P_n^{\alpha-r,\beta-r}(x)$ и Лагерра $L_n^{\alpha-r}(x)$ образуют ортогональные системы в смысле Соболева, ряды Фурье по этим системам являются частным случаем смешанных рядов по соответствующим полиномам Якоби и Лагерра.

В настоящей статье эти вопросы рассмотрены для классических полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$. В частности, показано, что ряд Фурье по ортогональным полиномам Лагерра — Соболева является частным случаем смешанных рядов по полиномам Лагерра (см. § 3). Это, в свою очередь, позволяет (см. § 5) применить к исследованию аппроксимативных свойств рядов Фурье по полиномам Лагерра — Соболева методы и подходы, разработанные автором ранее [7–12] для решения аналогичной задачи для смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам. В § 4 введен новый специальный ряд по классическим ортогональным полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$ с $\alpha > -1$, который в случае натурального $\alpha = r$ совпадает с соответствующим смешанным рядом по полиномам Лагерра $L_n^0(x)$, а также с рядом Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)e^{-t}\,dt. \tag{1.1}$$

Таким образом, в случае натурального $\alpha = r$ для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ все три понятия — смешанный ряд по полиномам Лагерра, специальный ряд по полиномам Лагерра и ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева (1.1), — совпадают.

В § 2 собраны необходимые сведения о полиномах Лагерра, в § 3 приводится определение смешанных рядов по полиномам Лагерра, в § 4 введены новые специальные ряды по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$, ортогональным в классическом смысле. В § 5 вводятся ряды Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева (1.1), в § 6 выводится неравенство типа Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра и сформулирована теорема, содержащая поточечную оценку соответствующей функции Лебега, в § 7 изложено доказательство этой теоремы.

§ 2. Некоторые сведения о полиномах Лагерра

При исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм новых специальных рядов, введенных в настоящей работе, понадобится ряд свойств полиномов Лагерра $L_n^\alpha(t)$.

Пусть α — произвольное действительное число. Тогда для полиномов Лагерра имеют место [13]: формула Родрига

$$L_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!}t^{-\alpha}e^t\{t^{n+\alpha}e^{-t}\}^{(n)}; \tag{2.1}$$

явный вид

$$L_n^\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{(-t)^\nu}{\nu!}; \tag{2.2}$$

соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} L_n^\alpha(t) L_m^\alpha(t)\,dt = \delta_{nm} h_n^\alpha, \quad \alpha > -1, \tag{2.3}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера,

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1), \tag{2.4}$$

в частности, для $L_n(t) = L_n^0(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_m(t)\,dt = \delta_{nm};$$

формула Кристоффеля — Дарбу

$$\mathscr{K}_n^\alpha(t,\tau) = \sum_{k=0}^n \frac{L_\nu^\alpha(t) L_\nu^\alpha(\tau)}{h_\nu^\alpha} = \frac{n+1}{h_n^\alpha} \frac{L_n^\alpha(t) L_{n+1}^\alpha(\tau) - L_n^\alpha(\tau) L_{n+1}^\alpha(t)}{t-\tau}; \tag{2.5}$$

свертка

$$\int_0^t L_n(t-\tau) L_m(\tau)\,d\tau = L_{n+m}(t) - L_{n+m+1}(t). \tag{2.6}$$

Отметим следующие равенства:

$$\frac{d}{dt} L_n^\alpha(t) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(t), \tag{2.7}$$

$$\frac{d^r}{dt^r} L_{k+r}^{\alpha-r}(t) = (-1)^r L_k^\alpha(t), \tag{2.8}$$

$$L_k^{-r}(t) = \frac{(-t)^r}{k^{[r]}} L_{k-r}^r(t), \tag{2.9}$$

где $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$L_n^{\alpha+1}(t) - L_{n-1}^{\alpha+1}(t) = L_n^\alpha(t), \tag{2.10}$$

$$(n+\alpha) L_n^{\alpha-1}(t) = \alpha L_n^\alpha(t) - t L_{n-1}^{\alpha+1}(t), \tag{2.11}$$

а также весовую оценку [14]

$$e^{-\frac{t}{2}} \left| L_n^\alpha(t) \right| \le c(\alpha) B_n^\alpha(t), \quad \alpha > -1, \tag{2.12}$$

здесь и далее c, $c(\alpha)$, $c(\alpha,\dots,\beta)$ — положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров,

$$B_n^\alpha(t) = \begin{cases} \theta^\alpha, & 0 \le t \le \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\, t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \le \frac{\theta}{2}, \\ [\theta(\theta^{\frac{1}{3}} + |t-\theta|)]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \le \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t, \end{cases}$$

где $\theta = \theta_n = \theta_n(\alpha) = 4n + 2\alpha + 2$.

Для нормированных полиномов Лагерра

$$\widehat{L}_n^\alpha(t) = \left\{h_n^\alpha\right\}^{-\frac{1}{2}} L_n^\alpha(t) \tag{2.13}$$

имеет место оценка [14]

$$e^{-\frac{t}{2}}\left|\widehat{L}_{n+1}^\alpha(t) - \widehat{L}_{n-1}^\alpha(t)\right| \le \begin{cases} \theta^{\frac{\alpha}{2}-1}, & 0 \le t \le \frac{1}{\theta}, \\ \theta^{-\frac{3}{4}}\, t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < t \le \frac{\theta}{2}, \\ t^{-\frac{\alpha}{2}}\, \theta^{-\frac{3}{4}}\left[\theta^{\frac{1}{3}} + |t-\theta|\right]^{\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < t \le \frac{3\theta}{2}, \\ e^{-\frac{t}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < t. \end{cases} \tag{2.14}$$

Поскольку $h_n^\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \asymp n^\alpha$, из (2.12) и (2.13) следует, что

$$e^{-\frac{t}{2}}\left|\widehat{L}_n^\alpha(t)\right| \le c(\alpha)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}} B_n^\alpha(t), \quad t \ge 0. \tag{2.15}$$

§ 3. Смешанные ряды по полиномам Лагерра

Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам впервые введены в работах автора [7–12] как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат для одновременного приближения функций и их производных. Не являются исключением и смешанные ряды по полиномам Лагерра [9]. В настоящем параграфе напомним определение этих рядов, следуя [9]. Пусть $-1 < \alpha < 1$, $L_n^\alpha(x)$ — соответствующие классические ортогональные полиномы Лагерра, $\rho = \rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $1 \le p < \infty$, $\mathscr{L}_{p,\rho}$ — пространство измеримых функций, определенных на полуоси $[0,\infty)$ и таких, что $\|f\|_{\mathscr{L}_{p,\rho}} = \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p \rho(x)\, dx\right)^{1/p} < \infty$. Через $W^r_{\mathscr{L}_{p,\rho}}(0,\infty)$ обозначим подкласс функций $f = f(x)$ из $\mathscr{L}_{p,\rho}$, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$, а $f^{(r)} \in \mathscr{L}_{p,\rho}$. Можно рассмотреть коэффициенты Фурье — Лагерра функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$:

$$f_{r,k}^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha}\int\limits_0^\infty \rho(t) f^{(r)}(t) L_k^\alpha(t)\, dt. \tag{3.1}$$

Соответствующий ряд Фурье — Лагерра функции $f^{(r)}$ имеет вид

$$f^{(r)} \sim \sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha L_k^\alpha(x). \tag{3.2}$$

Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt, \tag{3.3}$$

где $Q_{r-1}(f,x) = \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$ — полином Тейлора, и выполним формальную подстановку в (3.3) вместо $f^{(r)}(t)$ ряда Фурье — Лагерра (3.2). Если эта операция правомерна, то придем к равенству

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + \sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha L_{r,k+r}^\alpha(x), \tag{3.4}$$

где

$$L^\alpha_{r,k+r}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L_k^\alpha(t)\,dt \tag{3.5}$$

— полином степени $k+r$, $k=0,1,\dots$. Воспользовавшись равенствами (2.2) и (2.8), нетрудно показать, что

$$L^\alpha_{r,k+r}(x) = (-1)^r \bigl(L^{\alpha-r}_{k+r}(x) - \Lambda^{\alpha,k}_{r-1}(x)\bigr), \tag{3.6}$$

где $\Lambda^{\alpha,k}_{r-1}(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)(-x)^\nu}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k+r-\nu)!\nu!}$ — полином степени $r-1$. Равенство (3.4) с учетом (3.6) перепишем так:

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + (-1)^r \sum_{k=0}^\infty f^\alpha_{r,k}\bigl[L^{\alpha-r}_{k+r}(x) - \Lambda^{\alpha,k}_{r-1}(x)\bigr]. \tag{3.7}$$

Ряд (3.4) (или, что то же, ряд (3.7)) будем называть [9] *смешанным рядом по полиномам Лагерра* $L_k^\alpha(x)$. Смешанный ряд содержит коэффициенты $f^\alpha_{r,k}$, $k=0,1,\dots$, r-й производной функции $f(x)$ по полиномам Лагерра $L^\alpha_k(x)$, умноженные на полиномы $L^\alpha_{r,k+r}(x)$ вида (3.6). В этом заключается принципиальное отличие смешанного ряда (3.4) по полиномам Лагерра $L^\alpha_k(x)$ от ряда Фурье по этим же полиномам. Если положим $\alpha=0$, то $\Lambda^{\alpha,k}_{r-1}(x)=0$ и равенство (3.7) принимает вид

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu + (-1)^r \sum_{k=0}^\infty f^0_{r,k} L^{-r}_{k+r}(x). \tag{3.8}$$

Если, кроме того, воспользуемся равенством (2.9), то

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu + x^r \sum_{k=0}^\infty f^0_{r,k} \frac{L^r_k(x)}{(k+r)^{[r]}}. \tag{3.9}$$

В дальнейшем будет показано (см. § 5, 4), что (3.8) представляет собой ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n^{-r}(x)$, ортогональным относительно скалярного произведения (1.1), а (3.9) есть не что иное, как специальный ряд по полиномам Лагерра $L^\alpha_k(x)$ с $\alpha=r$, где $r\le 1$ целое.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий на функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость смешанных рядов (3.4).

Теорема 1. *Пусть* $-1<\alpha<1$, $r\ge 1$, $A>0$ *и* $f\in W^r_{\mathscr{L}_{2,\rho}}$. *Тогда смешанный ряд* (3.4) *сходится равномерно относительно* $x\in[0,A]$.

Доказательство. Если $f\in W^r_{\mathscr{L}_{2,\rho}}$, то $f^{(r)}\in\mathscr{L}_{2,\rho}$ и, следовательно, в метрике пространства $\mathscr{L}_{2,\rho}$ имеет место равенство

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^\infty f^\alpha_{r,k} L^\alpha_k(x). \tag{3.10}$$

Пусть $\mathscr{Y}_{r,n+r}(f,x) = Q_{r-1}(f,x) + \sum\limits_{k=0}^n f^\alpha_{r,k} L^\alpha_{r,k+r}(x)$ — частичная сумма ряда (3.4), а $S^\alpha_{r,n}(f) = S^\alpha_{r,n}(f,x) = \sum\limits_{k=0}^n f^\alpha_{r,k} L^\alpha_k(x)$ — частичная сумма порядка n ряда (3.10).

С учетом формулы Тейлора (3.3) и равенства (3.5) имеем

$$|f(x) - \mathscr{Y}_{r,n+r}(f,x)| = \frac{1}{(r-1)!}\left|\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt - \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} S^\alpha_{r,n}(f,t)\,dt\right|$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\bigl|f^{(r)}(t) - S^\alpha_{r,n}(f,t)\bigr|\,dt \le \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\int\limits_0^x \bigl|f^{(r)}(t) - S^\alpha_{r,n}(f,t)\bigr|\,dt$$

$$\le \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\left(\int\limits_0^x t^{-\alpha}e^t\,dt\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^x t^\alpha e^{-t}\bigl(f^{(r)}(t) - S^\alpha_{r,n}(f,t)\bigr)^2\,dt\right)^{\frac12}$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!}\left(\frac{e^x x^{2r-\alpha-1}}{1-\alpha}\right)^{\frac12}\bigl\|f^{(r)} - S^\alpha_{r,n}\bigr\|_{\mathscr{L}_{2,\rho}}. \quad (3.11)$$

Поскольку в силу (3.10) $\bigl\|f^{(r)} - S^\alpha_{r,n}\bigr\|_{\mathscr{L}_{2,\rho}} \to 0$ при $n\to\infty$, из (3.11) находим

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\mathscr{Y}_{r,n+r}(f,x) = Q_{r-1}(f,x) + \sum_{k=0}^\infty f^\alpha_{r,k}L^\alpha_{r,k+r}(x), \quad (3.12)$$

причем ряд (3.12) сходится равномерно относительно $x\in[0,A]$ для любого $A > 0$. Теорема 1 доказана.

§ 4. Специальные ряды по полиномам Лагерра

Пусть $1 \le r$ целое, $f(t)$ — $r-1$ раз дифференцируемая в точке $t = 0$ функция,

$$P_{r-1}(f) = P_{r-1}(f)(t) = \sum_{i=0}^{r-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}t^i, \quad (4.1)$$

$$f_r(t) = \frac{1}{t^r}[f(t) - P_{r-1}(f)(t)]. \quad (4.2)$$

Предположим, что для функции $f_r(t)$, определенной равенством (4.2), существуют коэффициенты Фурье — Лагерра

$$\hat f^\alpha_{r,k} = \frac{1}{h^\alpha_k}\int\limits_0^\infty f_r(\tau)t^\alpha e^{-t}L^\alpha_k(t)\,dt = \frac{1}{h^\alpha_k}\int\limits_0^\infty [f(t) - P_{r-1}(f)(t)]t^{\alpha-r}e^{-t}L^\alpha_k(t)\,dt, \quad (4.3)$$

где $h^\alpha_n = \Gamma(n+\alpha+1)/n!$. Тогда можем рассмотреть ряд Фурье — Лагерра функции $f_r(t)$:

$$f_r(t) \sim \sum_{k=0}^\infty \hat f^\alpha_{r,k}L^\alpha_k(t). \quad (4.4)$$

Если ряд (4.4) сходится к $f_r(t)$, то с учетом (4.2) можем записать

$$f(t) = P_{r-1}(f)(t) + t^r\sum_{k=0}^\infty \hat f^\alpha_{r,k}L^\alpha_k(t). \quad (4.5)$$

Это и есть *специальный ряд по полиномам Лагерра.* Нетрудно показать, что если $\alpha = r$, то ряд (4.5) совпадает с рядом (3.9). В самом деле, в силу (2.1), (3.1) и (2.9) имеем

$$f_{r,k}^0 = \int_0^\infty f^{(r)}(\tau)e^{-\tau}L_k(\tau)\,d\tau = \frac{1}{k!}\int_0^\infty (f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))^{(r)}(e^{-\tau}\tau^k)^{(k)}\,d\tau$$
$$= \frac{(-1)^r}{k!}\int_0^\infty (f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))(e^{-\tau}\tau^k)^{(k+r)}\,d\tau$$
$$= \frac{(-1)^r}{k!}\int_0^\infty (f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau))\tau^{-r}e^{-\tau}L_{k+r}^{-r}(\tau)(k+r)!\,d\tau$$
$$= \frac{(k+r)!}{k!}(-1)^r\int_0^\infty \frac{f(\tau)-P_{r-1}(f)(\tau)}{\tau^r}e^{-\tau}\frac{(-\tau)^r}{(k+r)^{[r]}}L_k^r(\tau)\,d\tau$$
$$= \int_0^\infty f_r(\tau)\tau^r e^{-\tau}L_k^r(\tau)d\tau = h_k^r\hat f_{r,k}^r. \quad (4.6)$$

Ввиду (4.6) ряд (3.9) приобретает вид

$$f(t) = P_{r-1}(f)(t) + t^r\sum_{k=0}^\infty \frac{h_k^r\hat f_{r,k}^r L_k^r(t)}{(k+1)_r} = P_{r-1}(f)(t) + t^r\sum_{k=0}^\infty \hat f_{r,k}^r L_k^r(t),$$

так как $h_k^r = (k+1)_r$. Таким образом, в случае $\alpha = r$ ряды (3.9) и (4.5) совпадают.

§ 5. Ряды Фурье по полиномам Лагерра $L_k^{-r}(t)$, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева

Для $\rho = \rho(t) = e^{-t}$ положим $W^r[0,\infty) = W^r_{\mathscr{L}_{2,\rho}}$, другими словами, $W^r[0,\infty)$ представляет собой пространство функций $f = f(t)$, заданных и непрерывно дифференцируемых на полуоси $[0,\infty)$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b]\subset[0,\infty)$ и

$$\int_0^\infty |f^{(r)}(t)|^2e^{-t}\,dt < \infty. \quad (5.1)$$

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$, в которой

$$\varphi_k(t) = \frac{t^k}{k!}, \quad 0\le k\le r-1, \quad (5.2)$$

$$\varphi_k(t) = L_k^{-r}(t), \quad r\le k. \quad (5.3)$$

Теорема 2. *Функции* $\varphi_k(t)$, $k = 0,2,\dots$, *определенные равенствами* (5.2), (5.3), *образуют полную в* $W^r[0,\infty)$ *ортонормированную систему относительно скалярного произведения* (1.1).

Доказательство. Из равенств (2.8), (2.9) следует, что если $r\le k$ и $0\le\nu\le r-1$, то $\left(L_k^{-r}(t)\right)_{t=0}^{(\nu)} = 0$. Кроме того, $\left(L_k^{-r}(t)\right)^{(r)} = (-1)^rL_{k-r}^0(t)$. Поэтому в силу (1.1) для $\varphi_k(t) = L_k^{-r}(t)$ и $\varphi_l(t) = L_l^{-r}(t)$ с $k, l \geq r$ имеем

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \int\limits_0^\infty L_{k-r}^0(x) L_{l-r}^0(x) e^{-x}\, dx = \delta_{kl}. \tag{5.4}$$

Это означает, что функции $\varphi_k(t)$, $k = r, r+1, \dots$, образуют в $W^r[0,\infty)$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1.1). Справедливость равенства $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \delta_{kl}$ в случаях, когда $k, l \leq r-1$ и $k \leq r-1$, $l \geq r$, очевидна. Итак, система $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$ ортонормирована в $W^r[0,\infty)$ относительно скалярного произведения (1.1). Остается убедиться в ее полноте в $W^r[0,\infty)$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f = f(x) \in W^r[0,\infty)$ и для всех $k = 0, 1, \dots$ справедливы равенства $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leq r-1$, то $\langle f, \varphi_k \rangle = f^{(k)}(0)$, поэтому с учетом того, что $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора (3.3) приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt. \tag{5.5}$$

С другой стороны, для всех $k \geq r$ имеем

$$0 = \langle f, \varphi_k \rangle = \int\limits_0^\infty e^{-x} f^{(r)}(x) \frac{d^r}{dx^r} L_k^{-r}(x)\, dx = (-1)^r \int\limits_0^\infty L_{k-r}^0(x) f^{(r)}(x) e^{-x}\, dx.$$

Отсюда и из того, что полиномы Лагерра $L_m^0(x)$, $m = 0, 1, \dots$, образуют в $\mathscr{L}_{2,\rho}$ полную ортонормированную систему, имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[0,\infty)$. Поэтому в силу (5.5) $f(x) \equiv 0$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Соотношение ортогональности (5.4) ранее было установлено в [1].

Замечание 2. Почти дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, можно показать, что полиномы $L_{r,k+r}^\alpha(x)$, $k = 0, 1, \dots$, определенные равенством (3.5), образуют ортогональную систему относительно следующего скалярного произведения типа Соболева:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) g^{(\nu)}(0) + \int\limits_0^\infty f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) e^{-t} t^\alpha\, dt.$$

Пусть $f(x) \in W^r[0,\infty)$. Тогда можем рассмотреть коэффициенты Фурье этой функции:

$$\hat{f}_k = \langle f, \varphi_k \rangle = f^{(k)}(0), \quad 0 \leq k \leq r-1, \tag{5.6}$$

$$\hat{f}_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \int\limits_0^\infty e^{-x} f^{(r)}(x) \frac{d^r}{dx^r} L_k^{-r}(x)\, dx, \quad k \geq r, \tag{5.7}$$

и ее ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty \hat{f}_k \varphi_k(t) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty \hat{f}_k L_k^{-r}(t). \tag{5.8}$$

С другой стороны, из (5.7) и (3.1) с учетом того, что $\left(L_k^{-r}(t)\right)^{(r)} = (-1)^r L_{k-r}^0(t)$, имеем

$$\hat{f}_k = \int_0^\infty e^{-x} f^{(r)}(x) L_{k-r}^0(x)\,dx = (-1)^r f_{r,k-r}^0. \tag{5.9}$$

Из (5.8) и (5.9) получаем

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 L_{k+r}^{-r}(t). \tag{5.10}$$

Сопоставляя (5.10) с (3.8), заключаем, что ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$ относительно скалярного произведения (1.1) совпадает со смешанным рядом по полиномам Лагерра $L_k^0(t)$. Это позволяет использовать при исследовании аппроксимативных свойств ряда Фурье (5.8) методы и подходы, разработанные ранее в работах автора [7–12] для решения аналогичной задачи для смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в том числе и по полиномам Лагерра. Например, в качестве следствия теоремы 1 может быть сформулирована

Теорема 3. *Пусть $r \ge 1$, $A > 0$ и $f \in W^r[0,\infty)$. Тогда ряд Фурье* (5.8) *сходится равномерно относительно $x \in [0, A]$ и для произвольного $x \in [0,\infty)$ имеет место равенство*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \varphi_k(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \hat{f}_k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_k L_k^{-r}(t). \tag{5.11}$$

§ 6. Неравенство Лебега для частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра

Через $\mathscr{L}_n^\alpha(f) = \mathscr{L}_n^\alpha(f)(t)$ обозначим частичную сумму специального ряда (4.5) вида

$$\mathscr{L}_n^\alpha(f)(t) = P_{r-1}(f) + t^r \sum_{k=0}^{n-r} \hat{f}_{r,k}^\alpha L_k^\alpha(t).$$

Заметим, что если $f(t) = q_n(t)$ представляет собой алгебраический полином степени n, то $\mathscr{L}_n^\alpha(q_n)(t) \equiv q_n(t)$ при $\alpha > -1$. Другими словами, оператор $\mathscr{L}_n^\alpha(f)$ является проектором на подпространство H^n, состоящим из алгебраических полиномов степени n. Это свойство частичных сумм $\mathscr{L}_n^\alpha(f)(t)$ играет важную роль при решении задачи об оценке отклонения $\mathscr{L}_n^\alpha(f)(t)$ от исходной функции $f = f(t)$. Данная задача является одной из основных в настоящей работе.

Пусть $f(t)$ — непрерывная функция, заданная на полуоси $[0,\infty)$ и такая, что в точке $t = 0$ существуют производные $f^{(\nu)}(0)$, $\nu = 0, 1, \dots, r-1$. Кроме того, будем считать, что для всех $k = 0, 1, \dots$ существуют коэффициенты $\hat{f}_{r,k}^\alpha$, определяемые равенством (4.3). Тогда можем определить специальный ряд (4.5) и его частичную сумму $\mathscr{L}_n^\alpha(f)(t)$. В настоящем параграфе рассмотрены вопросы, которые касаются сходимости $\mathscr{L}_n^\alpha(f)(t)$ к $f(x)$ при $n \to \infty$. В первую очередь рассмотрим задачу об оценке величины

$$R_{n,r}^\alpha(f)(t) = \left|f(t) - \mathscr{L}_n^\alpha(f)(t)\right| t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}}. \tag{6.1}$$

Весовой множитель $t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}$, фигурирующий в правой части равенства (6.1), связан с тем обстоятельством, что разность $\left|f(t)-\mathscr{L}_n^\alpha(f)(t)\right|$ стремится к нулю вместе с t со скоростью, не меньшей чем $t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}$. Обозначим через $q_n(t)$ алгебраический полином степени n, для которого

$$f^{(\nu)}(0)=q_n^{(\nu)}(0),\quad \nu=0,1,\dots,r-1. \tag{6.2}$$

Тогда

$$f(t)-\mathscr{L}_n^\alpha(f)(t)=f(t)-q_n(t)+q_n(t)-\mathscr{L}_n^\alpha(f)(t)=f(t)-q_n(t)+\mathscr{L}_n^\alpha(q_n-f)(t), \tag{6.3}$$

поэтому в силу (6.1) и (6.3)

$$|R_{n,r}(f)(t)|\le|f(t)-q_n(t)|t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}+\left|\mathscr{L}_n^\alpha(q_n-f)(t)\right|t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}. \tag{6.4}$$

С другой стороны, ввиду (6.2) $P_{r-1}(q_n-f)\equiv 0$, поэтому

$$\mathscr{L}_n^\alpha(q_n-f)(t)=t^r\sum_{k=0}^{n-r}\widehat{(q_n-f)}_{r,k}L_k^\alpha(t)$$
$$=t^r\sum_{k=0}^{n-r}\frac{1}{h_k^\alpha}\int_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))\tau^{\alpha-r}e^{-\tau}L_k^\alpha(\tau)L_k^\alpha(t)\,d\tau,$$

откуда

$$e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\mathscr{L}_n^\alpha(q_n-f)(t)=e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int_0^\infty(q_n(\tau)-f(\tau))e^{-\tau}\tau^{\alpha-r}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{L_k^\alpha(t)L_k^\alpha(\tau)}{h_k^\alpha}\,d\tau. \tag{6.5}$$

Положим

$$E_n^r(f)=\inf_{q_n}\sup_{t>0}|q_n(t)-f(t)|e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}, \tag{6.6}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_n(t)$ степени n, для которых $f^{(\nu)}(0)=q_n^{(\nu)}(0)$, $\nu=0,\dots,r-1$. Тогда из (6.5) находим

$$e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|\mathscr{L}_n^\alpha(q_n-f)(t)\right|\le E_n^r(f)\lambda_{r,n}^\alpha(t), \tag{6.7}$$

где

$$\lambda_{r,n}^\alpha(t)=t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\left|\mathscr{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)\right|d\tau, \tag{6.8}$$

q_n среди рассматриваемых полиномов степени n выбран так, что

$$E_n^r(f)=\sup_{t>0}|q_n(t)-f(t)|e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}},$$

а ядро $\mathscr{K}_{n-r}^\alpha(t,\tau)$ определяется равенством (2.5). Из (6.4), (6.6)–(6.8) выводим следующее неравенство типа Лебега:

$$\left|R_{n,r}^\alpha(f)(t)\right|\le E_n^r(f)\big(1+\lambda_{r,n}^\alpha(t)\big). \tag{6.9}$$

В связи с неравенством (6.9) возникает задача об оценке функции Лебега $\lambda_{r,n}^\alpha(t)$, определяемой равенством (6.8). С этой целью введем следующие обозначения: $G_1=\left[0,\frac{3}{\theta_n}\right]$, $G_2=\left[\frac{3}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}\right]$, $G_3=\left[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}\right]$, $G_4=\left[\frac{3\theta_n}{2},\infty\right]$. Будем оценивать $\lambda_{r,n}^\alpha(t)$ для $t\in G_s$, $s=1,2,3,4$.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le r$ *целое,* $r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}$ *и* $\theta_n=4n+2\alpha+2$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

1) *если* $t\in G_1$, *то*

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t)\le c(\alpha,r)[\ln(n+1)+n^{\alpha-r}]; \tag{6.10}$$

2) *если* $t\in G_2$, *то*

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t)\le c(\alpha,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right]; \tag{6.11}$$

3) *если* $t\in G_3$, *то*

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t)\le c(\alpha,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{t}{\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right]; \tag{6.12}$$

4) *если* $t\in G_4$, *то*

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t)\le c(\alpha,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{4}}. \tag{6.13}$$

§ 7. Доказательство теоремы 4

Далее понадобятся некоторые преобразования для ядер $\mathscr{K}_n^{\alpha}(t,\tau)$, определенных в (2.5). Пользуясь равенством (2.13), можем записать

$$\mathscr{K}_n^{\alpha}(t,\tau)=\frac{\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{\tau-t}\big[\widehat{L}_{n+1}^{\alpha}(t)\widehat{L}_n^{\alpha}(\tau)-\widehat{L}_n^{\alpha}(t)\widehat{L}_{n+1}^{\alpha}(\tau)\big], \tag{7.1}$$

откуда, полагая $\alpha_n=\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$, имеем

$$\frac{1}{\alpha_n}\mathscr{K}_n^{\alpha}(t,\tau)=\frac{1}{\tau-t}\big[\widehat{L}_{n+1}^{\alpha}(t)\widehat{L}_n^{\alpha}(\tau)-\widehat{L}_n^{\alpha}(t)\widehat{L}_{n+1}^{\alpha}(\tau)\big], \tag{7.2}$$

$$\frac{1}{\alpha_{n-1}}\mathscr{K}_n^{\alpha}(t,\tau)=\frac{1}{\tau-t}\big[\widehat{L}_n^{\alpha}(t)\widehat{L}_{n-1}^{\alpha}(\tau)-\widehat{L}_{n-1}^{\alpha}(t)\widehat{L}_n^{\alpha}(\tau)\big]+\frac{1}{\alpha_{n-1}}\widehat{L}_n^{\alpha}(t)\widehat{L}_n^{\alpha}(\tau). \tag{7.3}$$

Сложим правые и левые части равенств (7.2) и (7.3):

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)\mathscr{K}_n^{\alpha}(t,\tau)&=\frac{1}{\alpha_{n-1}}\widehat{L}_n^{\alpha}(t)\widehat{L}_n^{\alpha}(\tau)\\&+\frac{1}{\tau-t}\big[\widehat{L}_n^{\alpha}(\tau)\big(\widehat{L}_{n+1}^{\alpha}(t)-\widehat{L}_{n-1}^{\alpha}(t)\big)-\widehat{L}_n^{\alpha}(t)\big(\widehat{L}_{n+1}^{\alpha}(\tau)-\widehat{L}_{n-1}^{\alpha}(\tau)\big)\big].\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_n^{\alpha}(t,\tau)&=\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n-1}}\widehat{L}_n^{\alpha}(t)\widehat{L}_n^{\alpha}(\tau)\\&+\frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{(\alpha_n+\alpha_{n-1})(\tau-t)}\big[\widehat{L}_n^{\alpha}(\tau)\big(\widehat{L}_{n+1}^{\alpha}(t)-\widehat{L}_{n-1}^{\alpha}(t)\big)-\widehat{L}_n^{\alpha}(t)\big(\widehat{L}_{n+1}^{\alpha}(\tau)-\widehat{L}_{n-1}^{\alpha}(\tau)\big)\big].\end{aligned} \tag{7.4}$$

Перейдем к доказательству оценки (6.10). Пусть $t\in G_1$,

$$I_1(t)=t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\int\limits_0^{4/\theta_n}e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\big|\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(t,\tau)\big|\,d\tau, \tag{7.5}$$

$$I_2(t)=t^{\frac{r}{2}+\frac14}\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} e^{-\frac{\tau+t}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\left|\mathscr{K}^{\alpha}_{n-r}(t,\tau)\right|d\tau. \tag{7.6}$$

Тогда из (6.8) следует, что

$$\lambda^{\alpha}_{r,n}(t)\le I_1(t)+I_2(t). \tag{7.7}$$

Оценим $I_1(t)$. Из (2.5), (2.12)–(2.15) имеем

$$\left|\mathscr{K}^{\alpha}_{n-r}(t,\tau)\right|\le c(\alpha)\sum_{k=0}^{n-r}\frac{B^{\alpha}_k(t)B^{\alpha}_k(\tau)}{\theta^{\alpha}_k}\le c(\alpha)\sum_{k=0}^{n-r}\theta^{\alpha}_k\le c(\alpha)\theta_n^{\alpha+1}.$$

Поэтому из (7.5) находим

$$I_1(t)\le c(\alpha)\theta_n^{-\frac{r}{2}-\frac14}\int\limits_0^{4/\theta_n}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\theta_n^{\alpha+1}\,dt\le c(\alpha). \tag{7.8}$$

Оценим $I_2(t)$. С этой целью обратимся к формуле (7.4) и запишем

$$I_2(t)\le I_{21}+I_{22}+I_{23}, \tag{7.9}$$

где

$$I_{21}=\frac{\alpha_n e^{-\frac{t}{2}}}{\alpha_n+\alpha_{n-1}}\left|\widehat{L}^{\alpha}_n(t)\right|t^{\frac{r}{2}+\frac14}\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\left|\widehat{L}^{\alpha}_n(\tau)\right|d\tau,$$

$$I_{22}=\frac{\alpha_n\alpha_{n-1}e^{-\frac{t}{2}}}{\alpha_n+\alpha_{n-1}}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n+1}(t)-\widehat{L}^{\alpha}_{n-1}(t)\right|t^{\frac{r}{2}+\frac14}\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\tau}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\left|\widehat{L}^{\alpha}_n(\tau)\right|}{\tau-t}\,d\tau,$$

$$I_{23}=\frac{\alpha_n\alpha_{n-1}e^{-\frac{t}{2}}}{\alpha_n+\alpha_{n-1}}\left|\widehat{L}^{\alpha}_n(t)\right|t^{\frac{r}{2}+\frac14}\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\tau}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n+1}(\tau)-\widehat{L}^{\alpha}_{n-1}(\tau)\right|}{\tau-t}\,d\tau.$$

Положим

$$W=\int\limits_{4/\theta_n}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\left|\widehat{L}^{\alpha}_n(\tau)\right|d\tau=W_1+W_2, \tag{7.10}$$

где

$$W_1=\int\limits_{4/\theta_n}^{3\theta_n/2}e^{-\frac{\tau}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\left|\widehat{L}^{\alpha}_n(\tau)\right|d\tau, \tag{7.11}$$

$$W_2=\int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{2}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\left|\widehat{L}^{\alpha}_n(\tau)\right|d\tau. \tag{7.12}$$

Пользуясь неравенством Коши — Шварца, получим

$$\begin{aligned} W_1&\le\left(\int\limits_{4/\theta_n}^{3\theta_n/2}\tau^{\alpha-r-\frac12}\,d\tau\right)^{\frac12}\left(\int\limits_{4/\theta_n}^{3\theta_n/2}\tau^{\alpha}e^{-\tau}\left(\widehat{L}^{\alpha}_n(\tau)\right)^2d\tau\right)^{\frac12}\\ &<\left[\frac{1}{\alpha-r+\frac12}\left(\left(\frac{3\theta_n}{2}\right)^{\alpha-r+\frac12}-\left(\frac{4}{\theta_n}\right)^{\alpha-r+\frac12}\right)\right]^{\frac12}\le c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r+\frac12}{2}}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Далее, в силу (7.12) с учетом (2.15) имеем

$$W_2 \le c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{4}}\,d\tau$$

$$= c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_{\frac{3}{2}(4n+2\alpha+r)}^{\infty} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{4}}\,d\tau \le c(\alpha,r)e^{-n}. \quad (7.14)$$

Из (7.10)–(7.14) находим

$$W \le c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r+\frac{1}{2}}{2}}.$$

Отсюда и из (2.15) следует, что если $r-\frac{1}{2}<\alpha\le r+\frac{1}{2}$, то

$$I_{21} \le c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{\frac{\alpha-r+\frac{1}{2}}{2}} = c(\alpha,r)\theta_n^{\alpha-r} \le c(\alpha,r)n^{\alpha-r}. \quad (7.15)$$

Оценим I_{22}. В силу (2.14), (2.15)

$$I_{22} \le c(\alpha)n\theta_n^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-1}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} \frac{B_n^{\alpha}(\tau)\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}\,d\tau$$

$$\le \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\infty} \frac{B_n^{\alpha}(\tau)\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}\,d\tau = I'_{22}+I''_{22}+I'''_{22}, \quad (7.16)$$

где $I'_{22}=\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_n/2}$, $I''_{22}=\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\int\limits_{\theta_n/2}^{3\theta_n/2}$, $I'''_{22}=\frac{c(\alpha)}{\theta_n^{r/2+\frac{1}{4}}}\int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty}$. Пользуясь определением функции $B_n^{\alpha}(t)$ (см. (2.12)), имеем

$$I'_{22} \le \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_n/2} \frac{\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}\,d\tau = \frac{c(\alpha)\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}} \int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_n/2} \frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{\tau-t}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}} \int\limits_{4/\theta}^{\theta_n/2} \tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{3}{2}}\,d\tau \le c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\theta_n^{-\frac{\alpha-r}{2}+\frac{1}{2}} \le c(\alpha,r), \quad (7.17)$$

$$I''_{22} \le \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}} \int\limits_{\theta_n/2}^{3\theta_n/2} \frac{\left[\theta_n\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|\right)\right]^{-\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\tau-t}\,d\tau$$

$$\le \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}} \int\limits_{\theta_n/2}^{3\theta_n/2} \left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|\right)^{-\frac{1}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}\,d\tau$$

$$\le \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}} \int\limits_{\theta_n/2}^{3\theta_n/2} \left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|\right)^{-\frac{1}{4}}\theta_n^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}\,d\tau \le c(\alpha)\theta_n^{\alpha-r-\frac{3}{4}}\theta_n^{\frac{3}{4}} \le c(\alpha)\theta_n^{\alpha-r}. \quad (7.18)$$

Далее, для I_{22}''' из (7.16) находим

$$I_{22}''' \le \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac14}} \int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\tau}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}}{\tau-t}\,d\tau \le \frac{c(\alpha)}{\theta_n^{\frac{r}{2}+\frac14}} \int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{4}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac54}\,d\tau \le c(\alpha,r)n^{-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-n}. \quad (7.19)$$

Собирая оценки (7.17)–(7.19) и сопоставляя их с (7.16), приходим к оценке

$$I_{22} \le c(\alpha,r)\bigl(1+\theta_n^{\alpha-r}\bigr). \quad (7.20)$$

Перейдем к оценке I_{23} при $t \in G_1$. Используя (2.14), (2.15), можно записать

$$I_{23} \le c(\alpha)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{\alpha}\theta_n^{-\frac{r}{2}+\frac34}[H_1+H_2+H_3] = c(\alpha)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac34}[H_1+H_2+H_3], \quad (7.21)$$

где

$$H_1 = \int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_n/2} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\theta_n^{-\frac34}\tau^{-\frac{\alpha}{2}+\frac14}}{\tau-t}$$

$$= \theta_n^{-\frac34}\int\limits_{4/\theta_n}^{\theta_n/2} \tau^{\frac{\alpha-r}{2}-1}\,d\tau \le \theta_n^{-\frac34}\begin{cases} 2\ln\theta_n - 3\ln 2, & \alpha = r,\\ \frac{2}{\alpha-r}\Bigl[\Bigl(\frac{\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}}{2}\Bigr) - \Bigl(\frac{4}{\theta_n}\Bigr)^{\frac{\alpha-r}{2}}\Bigr], & \alpha \ne r, \end{cases} \quad (7.22)$$

$$H_2 = \theta_n^{-\frac34}\int\limits_{\theta_n/2}^{3\theta_n/2} \frac{\tau^{-\frac{\alpha}{2}}\bigl(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\bigr)^{\frac14}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}}{\tau-t}\,d\tau$$

$$\le \theta_n^{-\frac34}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac54}\int\limits_{\theta_n/2}^{3\theta_n/2}\bigl(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\bigr)^{\frac14}\,d\tau \le c\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-2}\theta_n^{\frac54} \le c(\alpha,r)\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac34}, \quad (7.23)$$

$$H_3 = \int\limits_{3\theta_n/2}^{\infty} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{4}}}{\tau-t}\,d\tau < \int\limits_{3\theta_{n/2}}^{\infty} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac54}e^{-\frac{\tau}{4}}\,d\tau \le c(\alpha,r)e^{-n}. \quad (7.24)$$

Из (7.22)–(7.24) имеем

$$I_{23} \le c(\alpha,r)\begin{cases} \ln n, & \alpha = r,\\ n^{\alpha-r}, & \alpha \ne r. \end{cases} \quad (7.25)$$

Из оценок (7.9), (7.15), (7.16), (7.20) и (7.25) выводим, что

$$I_2(t) \le c(\alpha,r)\begin{cases} \ln n, & \text{если } \alpha = r,\\ 1+n^{\alpha-r}, & \text{если } \alpha \ne r. \end{cases} \quad (7.26)$$

Из (7.7), (7.8) и (7.26) получаем

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) \le c(\alpha,r)\begin{cases} \ln n, & \text{если } \alpha = r,\\ 1+n^{\alpha-r}, & \text{если } \alpha \ne r. \end{cases}$$

Тем самым оценка (6.10) доказана.

Перейдем к доказательству оценки (6.11). Пусть $t \in G_2 = \left[\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}\right]$. Тогда можно записать $(0,\infty) = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, где

$$Q_1 = [0, t - \sqrt{t/\theta_n}], \quad Q_2 = [t - \sqrt{t/\theta_n}, t + \sqrt{t/\theta_n}], \quad Q_3 = [t + \sqrt{t/\theta_n}, \infty).$$

Используя эти обозначения, из (6.8) имеем

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) = J_1 + J_2 + J_3, \tag{7.27}$$

где

$$J_k = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{Q_k} e^{-\frac{\tau+t}{2}} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \left|\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(t,\tau)\right| d\tau, \quad 1 \le k \le 3. \tag{7.28}$$

Оценим J_2. Для этого сначала заметим, что в силу неравенства Коши — Шварца

$$\left|\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(t,\tau)\right| \le \left(\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.29}$$

Далее, если $3/\theta_n \le t \le 3\theta_n/2$, то $t - \sqrt{t/\theta_n} \ge 1/\theta_n$, кроме того, для $\tau \in [t - \sqrt{t/\theta_n}, t + \sqrt{t/\theta_n}]$ имеем $c_1 t \le \tau \le c_2 t$. Поэтому из (7.28) и (7.29) получаем неравенство

$$\begin{aligned} J_2 &= \int\limits_{Q_2} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \tau^{\alpha} e^{-\frac{\tau+t}{2}} \left|\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(t,\tau)\right| d\tau \\ &\le c\big(e^{-t}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t)\big)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{Q_2} \tau^{\alpha} \big(e^{-\tau}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau)\big)^{\frac{1}{2}} d\tau, \end{aligned} \tag{7.30}$$

которое, в свою очередь, приводит к задаче об оценке для $e^{-\tau}\mathscr{K}_n^{\alpha}(\tau,\tau)$ при $3/\theta_n \le \tau \le 3\theta_n/2$. Следующее утверждение дает ответ на этот вопрос.

Лемма 7.1. *Пусть $\alpha > -1$, $\theta_k = 4k + 2\alpha + 2$ и $\tau \ge 3/\theta_n$. Тогда*

$$e^{-\tau}\mathscr{K}_n^{\alpha}(\tau,\tau) \le c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}. \tag{7.31}$$

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев: (a) $1/\theta_n \le \tau \le 1/\sqrt{2}$; (b) $1/\sqrt{2} < \tau \le \sqrt{3/2}$; (c) $\sqrt{3/2} < \tau$. В случае (a) имеем $1/\theta_n \le \tau \le 1/\sqrt{2}$, откуда $0 < 2\tau \le 1/\tau$. Через k_1 обозначим наибольшее натуральное число, для которого $\theta_{k_1} \le 1/\tau$, следовательно, $\tau \le 1/\theta_k$ при $k \le k_1$ и $\tau > 1/\theta_k$ при $k \ge k_1+1$, стало быть, $\theta_k > 1/\tau \ge 2\tau$. Тем самым для $k \ge k_1 + 1$ имеем $1/\theta_k < \tau < \theta_k/2$. Эти неравенства вместе с оценкой (2.15) дают

$$\begin{aligned} e^{-\tau}\mathscr{K}_n^{\alpha}(\tau,\tau) &\le \sum_{k=0}^{k_1} e^{-\tau}\big(\widehat{L}_k^{\alpha}(\tau)\big)^2 + \sum_{k=k_1+1}^{n} e^{-\tau}\big(\widehat{L}_k^{\alpha}(\tau)\big)^2 \\ &\le c(\alpha)\sum_{k=0}^{k_1}(k+1)^{-\alpha}\theta_k^{2\alpha} + c(\alpha)\sum_{k=k_1+1}^{n}(k+1)^{-\alpha}\theta_k^{\alpha-\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}} \\ &\le c(\alpha)k_1^{\alpha+1} + c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}} \le c(\alpha)\tau^{-\alpha-1} + c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}} \\ &\le c(\alpha)(\tau^{-\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}})\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}} \le c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Тем самым оценка (7.31) в случае (a) доказана. Перейдем к случаю (b). В этом случае нетрудно заметить, что для всех $k = 1, 2, \dots, n$ имеет место неравенство $1/\theta_k < \tau < \theta_k/2$. Действительно,

$$\frac{1}{\theta_k} \le \frac{1}{\theta_1} \le \frac{1}{4+2\alpha+2} < \frac{1}{4} < \tau \le \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2} < \frac{1}{2}(4+2\alpha+2) = \frac{1}{2}\theta_1 \le \frac{1}{2}\theta_k.$$

Кроме того, $\frac{1}{2} < \tau^2 < \frac{3}{2}$, стало быть, $\frac{2}{3}\tau < \frac{1}{\tau} < 2\tau$. Из этих неравенств и оценки (2.15) имеем

$$e^{-\tau}\mathscr{K}_n^\alpha(\tau,\tau) \le e^{-\tau}\big(\widehat{L}_0^\alpha(\tau)\big)^2 + \sum_{k=1}^n e^{-\tau}\big(\widehat{L}_k^\alpha(\tau)\big)^2$$
$$\le c(\alpha)\left[e^{-\tau} + \sum_{k=1}^n k^{-\alpha}\theta_k^{\alpha-\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right] \le c(\alpha)\left[e^{-\tau} + \sum_{k=1}^n \theta_k^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right]$$
$$\le c(\alpha)[e^{-\tau} + n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}] \le c(\alpha)n^{\frac{1}{2}}\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что оценка (7.31) верна и в случае (b). Перейдем к случаю (c). Рассуждения из п. (b) позволяют утверждать, что если произвольные фиксированные числа a и b таковы, что $0 < a < b < \infty$, то для $a \le \tau \le b$ оценка (7.31) непосредственно вытекает из неравенства (2.15). Поэтому можем считать, что $b \le \tau$, где b — достаточно большое фиксированное число. Обозначим через m и q натуральные числа, для которых

$$\frac{3}{2}\theta_m \le \tau < \frac{3}{2}\theta_{m+1}, \quad \frac{1}{2}\theta_q \le \tau < \frac{1}{2}\theta_{q+1}. \tag{7.33}$$

Тогда

$$e^{-\tau}\mathscr{K}_n^\alpha(\tau,\tau) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \tag{7.34}$$

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^m e^{-\tau}\big(\widehat{L}_k^\alpha(\tau)\big)^2, \tag{7.35}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=m+1}^q e^{-\tau}\big(\widehat{L}_k^\alpha(\tau)\big)^2, \tag{7.36}$$

$$\Sigma_3 = \sum_{k=q+1}^n e^{-\tau}\big(\widehat{L}_k^\alpha(\tau)\big)^2. \tag{7.37}$$

Из определения чисел m и q получаем

$$\frac{3}{2}\theta_k \le \tau, \quad \text{если } 1 \le k \le m,$$
$$\frac{1}{2}\theta_k \le \tau < \frac{3}{2}\theta_k, \quad \text{если } m+1 \le k \le q,$$
$$\sqrt{\frac{3}{2}} \le \tau \le \frac{1}{2}\theta_k, \quad \text{если } q+1 \le k.$$

Это позволяет при оценке Σ_1–Σ_3 использовать неравенство (2.15). С учетом выбора m и q (см. (7.33)) и обозначений (7.35)–(7.37) имеем

$$\Sigma_1 \le c(\alpha)\sum_{k=0}^m \theta_k^{-\alpha}e^{-\frac{\tau}{2}} \le c(\alpha)\tau^{-\alpha}e^{-\frac{\tau}{2}}m \le c(\alpha)\tau^{-\alpha+1}e^{-\frac{\tau}{2}} \le c(\alpha), \tag{7.38}$$

$$\Sigma_2 \le c(\alpha)\sum_{k=m+1}^q \theta_k^{-\alpha}\big[\theta_k\big(\theta_k^{\frac{1}{3}} + |\tau-\theta_k|\big)\big]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\le c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=m+1}^q \big(\theta_k^{\frac{1}{3}} + |\tau-\theta_k|\big)^{-\frac{1}{2}} \le c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^n \big(\theta_k^{\frac{1}{3}} + |\tau-\theta_k|\big)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\le c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{k=1}^{k_\tau-1} + \sum_{k=k_\tau+2}^n\right)|\tau-\theta_k|^{-\frac{1}{2}} + 2\theta_{k_\tau}^{-\frac{1}{12}}\right] \le c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}, \tag{7.39}$$

где $\theta_{k_\tau} \le \tau < \theta_{k_\tau+1}$,

$$\Sigma_3 \le c(\alpha) \sum_{k=q+1}^{n} \theta_k^{-\alpha} \theta_k^{\alpha-\frac{1}{2}} \tau^{-\alpha-\frac{1}{2}} \le c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}. \tag{7.40}$$

Из (7.34)–(7.40) имеем

$$e^{-\tau} \mathscr{K}_n^\alpha(\tau,\tau) \le c(\alpha)\tau^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}},$$

где $\sqrt{\frac{3}{2}} \le \tau$. Тем самым лемма 7.1 доказана полностью.

Лемма 7.2. *Пусть* $u = \sqrt{t/\theta_n}$, $\alpha > -1$, $\theta_n = 4n+2\alpha+2$ *и* $3/\theta_n \le t \le 3\theta_n/2$. *Тогда имеет место оценка*

$$I = \left(e^{-t}\mathscr{K}_n^\alpha(t,t)\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{Q_2} \tau^\alpha \left(e^{-\tau}\mathscr{K}_n^\alpha(\tau,\tau)\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \le c(\alpha). \tag{7.41}$$

Доказательство. По лемме 7.1 имеем (так как $t \asymp \tau$)

$$I \le c(\alpha) t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}} \int\limits_{t-u}^{t+u} \tau^\alpha \tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}}\, d\tau$$
$$\le c(\alpha) t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}} u = c(\alpha) n^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} u \le c(\alpha) n^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{t}{\theta_n}} \le c(\alpha).$$

Лемма 7.2 доказана.

Из равенства (7.28) и леммы 7.2 выводим оценку

$$J_2 \le c(\alpha). \tag{7.42}$$

Оценим J_3 при $t \in G_2$. Воспользовавшись равенствами (7.28) и (7.4), можно записать

$$J_3 \le c(\alpha)(J_{31} + J_{32} + J_{33}), \tag{7.43}$$

где

$$J_{31} = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} \left|\widehat{L}_{n-r}^\alpha(t)\right| \int\limits_{Q_3} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}} \left|\widehat{L}_{n-r}^\alpha(\tau)\right| d\tau, \tag{7.44}$$

$$J_{32} = n t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} \left|\widehat{L}_{n-r+1}^\alpha(t) - \widehat{L}_{n-r-1}^\alpha(t)\right| \int\limits_{Q_3} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau - t} \left|\widehat{L}_{n-r}^\alpha(\tau)\right| d\tau, \tag{7.45}$$

$$J_{33} = n t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} \left|\widehat{L}_{n-r}^\alpha(t)\right| \int\limits_{Q_3} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau - t} \left|\widehat{L}_{n-r+1}^\alpha(\tau) - \widehat{L}_{n-r-1}^\alpha(\tau)\right| d\tau. \tag{7.46}$$

Чтобы оценить величину J_{31} представим ее в следующем виде:

$$J_{31} = J_{31}^1 + J_{31}^2 + J_{31}^3, \tag{7.47}$$

в котором

$$J_{31}^k = t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} \left|\widehat{L}_{n-r}^\alpha(t)\right| \int\limits_{Q_{31}^k} \tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}} \left|\widehat{L}_{n-r}^\alpha(\tau)\right| d\tau, \tag{7.48}$$

где $k=1,2,3$, $Q_{31}^1=(t+\sqrt{t/\theta_n},\theta_n/2)$, $Q_{31}^2=(\theta_n/2,3\theta_n/2)$ и $Q_{31}^3=(3\theta_n/2,\infty)$. Обратимся к неравенству (2.15). Из (7.48) находим

$$J_{31}^1\le c(\alpha,r)n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{Q_{31}^1}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}\,d\tau$$
$$=\frac{c(\alpha,r)}{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}-\left(t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}\right]\le c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, \tag{7.49}$$

$$J_{31}^2\le c(\alpha,r)n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{Q_{31}^2}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}\,d\tau}{\left(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\right)^{\frac14}}$$
$$\le c(\alpha,r)n^{-\frac34+\frac{\alpha-r}{2}}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{Q_{31}^2}\frac{d\tau}{\left(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\right)^{\frac14}}$$
$$\le c(\alpha,r)n^{-\frac34}\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\int\limits_{Q_{32}^2}\frac{d\tau}{\left(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\right)^{\frac14}}$$
$$\le c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}2n^{-\frac34}\int\limits_{\theta_n}^{3\theta_n/2}\frac{d\tau}{\left(\tau+\theta_n^{\frac13}-\theta_n\right)^{\frac14}}\le c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, \tag{7.50}$$

$$J_{31}^3\le c(\alpha,r)n^{-\frac14}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{Q_{31}^3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{\tau}{4}}\,d\tau$$
$$\le c(\alpha,r)n^{-\frac14-\frac{\alpha}{2}}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{Q_{31}^3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{4}}\,d\tau$$
$$\le c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}n^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac14}\le c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}. \tag{7.51}$$

Из (7.47), (7.49)–(7.51) выводим, что

$$J_{31}\le c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}},\quad t\in G_2,\ r-\frac12<\alpha<r+\frac12. \tag{7.52}$$

Переходя к оценке величины J_{32}, представим ее в виде

$$J_{32}=J_{32}^1+J_{32}^2+J_{32}^3, \tag{7.53}$$

в котором ($k=1,2,3$)

$$J_{32}^k=nt^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}\left|\widehat L_{n-r+1}^\alpha(t)-\widehat L_{n-r-1}^\alpha(t)\right|\int\limits_{Q_{32}^k}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}\left|\widehat L_{n-r}^\alpha(\tau)\right|d\tau, \tag{7.54}$$

где $Q_{32}^1=(t+\sqrt{t/\theta_n},\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n})$, $Q_{32}^2=(\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n},3\theta_n/2)$ и $Q_{32}^3=$

$(3\theta_n/2,\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13). Из (7.48) находим

$$J_{32}^1 \le c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}\int\limits_{Q_{32}^1}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}}{\tau-t}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r)\int\limits_{t+\sqrt{t/\theta_n}}^{2t}\frac{d\tau}{\tau-t}+c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}\int\limits_{2t}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac32}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r)\ln\frac{t}{\sqrt{t/\theta_n}}+\frac{c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}}{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}\left[\left(\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}-(2t)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}\right]$$

$$\le c(\alpha,r)\ln\sqrt{\frac{\theta_n}{t}}+c(\alpha,r)\left[1-\left(\frac{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}\right]\le c(\alpha,r)\ln\sqrt{\frac{\theta_n}{t}}, \quad (7.55)$$

$$J_{32}^2 \le c(\alpha,r)nt^{\frac r2+\frac14}\theta_n^{-\frac34}t^{-\frac\alpha2+\frac14}\int\limits_{Q_{32}^2}\theta_n^{-\frac14}\left(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\right)^{-\frac14}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}\,d\tau}{\theta_n^{\frac\alpha2}(\tau-t)}$$

$$\le c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}\int\limits_{Q_{32}^2}\left(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\right)^{-\frac14}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\le c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}n^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}\left[\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac13}}+\int\limits_{\theta_n-\theta_n^{\frac13}}^{3\theta_n/2}\right]\left(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\right)^{-\frac14}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\le c(\alpha,r)\left(\frac nt\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\left(\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}-1}+1\right)$$

$$\le c(\alpha,r)\left(\frac nt\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}-1}, \quad (7.56)$$

$$J_{32}^3 \le c(\alpha,r)nt^{\frac r2+\frac14}\theta_n^{-\frac34}t^{-\frac\alpha2+\frac14}\int\limits_{Q_{32}^3}e^{-\frac\tau4}\theta_n^{-\frac\alpha2}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac54}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac12}n^{-\frac\alpha2+\frac14}\int\limits_{Q_{32}^3}e^{-\frac\tau4}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac54}\,d\tau\le c(\alpha,r)e^{-\frac{3\theta_n}{8}}. \quad (7.57)$$

Из (7.53)–(7.57) выводим оценку

$$J_{32}\le c(\alpha,r)\left[\ln\frac{\theta_n}{t}+\left(\frac nt\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}-1+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}}\right]. \quad (7.58)$$

Оценим J_{33} по той же схеме, что и J_{32}. Имеем представление

$$J_{33}=J_{33}^1+J_{33}^2+J_{33}^3, \quad (7.59)$$

в котором

$$J_{33}^k = nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}\left|\widehat{L}_{n-r}^\alpha(t)\right| \int\limits_{Q_{33}^k} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}\left|\widehat{L}_{n-r+1}^\alpha(\tau)-\widehat{L}_{n-r-1}^\alpha(\tau)\right|d\tau, \tag{7.60}$$

где $k=1,2,3$, $Q_{33}^1=(t+\sqrt{t/\theta_n},\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n})$, $Q_{33}^2=(\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n},3\theta_n/2)$ и $Q_{33}^3=(3\theta_n/2,\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13). Из (7.60) получаем

$$J_{33}^1 \le c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{Q_{33}^1}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}}}{\tau-t}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r)\int\limits_{t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{2t}\frac{d\tau}{\tau-t}+c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{2t}^{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-1}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r)\left(\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\right), \tag{7.61}$$

$$J_{33}^2 \le c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\int\limits_{Q_{33}^2}\theta_n^{-\frac{3}{4}}\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{4}}\,d\tau}{\tau-t}$$

$$\le c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{Q_{32}^2}\left(\frac{\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}}\,d\tau}{\tau-t}$$

$$\le c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\int\limits_{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n}\frac{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+\theta_n-\tau\right)^{\frac{1}{4}}}{\tau^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$+c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha-r}{2}}\int\limits_{\theta_n}^{\frac{3\theta_n}{2}}\frac{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}-\theta_n+\tau\right)^{\frac{1}{4}}}{\theta_n^{1+\frac{1}{4}}}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r)(t/n)^{\frac{r-\alpha}{2}}\left(1+\ln\frac{\theta_n-t}{\frac{\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}-t}\right)$$

$$=c(\alpha,r)\left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}-1}\right), \tag{7.62}$$

$$J_{33}^3 \le c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\int\limits_{Q_{33}^3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{4}}\,d\tau}{\tau-t}$$

$$\le c(\alpha,r)n^{\frac{3}{4}}\int\limits_{Q_{33}^3}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{5}{4}}e^{-\frac{\tau}{4}}\,d\tau}{\tau-t}\le c(\alpha,r)e^{-\frac{3\theta_n}{8}}\le c(\alpha,r)e^{-\frac{3n}{2}}. \tag{7.63}$$

Из (7.59)–(7.63) находим

$$J_{33}\le c(\alpha,r)\left[\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\left(1+\ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}-1}\right)\right], \tag{7.64}$$

а из (7.52), (7.58) и (7.64), в свою очередь, получаем

$$J_3 \le c(\alpha,r)\left[\ln\sqrt{t\theta_n} + \left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}} \ln\frac{\frac{\theta_n}{t}-1}{\frac{\theta_n}{2t}+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}-1}}\right]. \tag{7.65}$$

Оценим J_1 при $t \in G_2$. Воспользовавшись равенствами (7.28) и (7.4), можно записать

$$J_1 \le c(\alpha)(J_{11}+J_{12}+J_{13}), \tag{7.66}$$

где

$$J_{11} = t^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n-r}(t)\right|\int\limits_{Q_1}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n-r}(\tau)\right|d\tau, \tag{7.67}$$

$$J_{12} = nt^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n-r+1}(t)-\widehat{L}^{\alpha}_{n-r-1}(t)\right|\int\limits_{Q_1}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n-r}(\tau)\right|d\tau, \tag{7.68}$$

$$J_{13} = nt^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n-r}(t)\right|\int\limits_{Q_1}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}}{\tau-t}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n-r+1}(\tau)-\widehat{L}^{\alpha}_{n-r-1}(\tau)\right|d\tau. \tag{7.69}$$

Чтобы оценить величину J_{11}, представим ее в виде

$$J_{11} = J^1_{11} + J^2_{11}, \tag{7.70}$$

в котором

$$J^k_{11} = t^{\frac{r}{2}+\frac14}e^{-\frac{t}{2}}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n-r}(t)\right|\int\limits_{Q^k_1}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}e^{-\frac{\tau}{2}}\left|\widehat{L}^{\alpha}_{n-r}(\tau)\right|d\tau, \tag{7.71}$$

где $k=1,2$, $Q^1_1=(0,1/\theta_n)$ и $Q^2_1=(1/\theta_n, t-\sqrt{t/\theta_n})$. Обратимся к неравенству (2.13). Из (7.71) выводим, что

$$\begin{aligned} J^1_{11} &\le c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac14}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_0^{\frac{1}{\theta_n}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}\,d\tau \\ &= \frac{c(\alpha,r)}{\alpha-\frac{r}{2}+\frac34}\theta_n^{-\frac14}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}}\theta_n^{-\alpha+\frac{r}{2}-\frac34} \le c(\alpha,r)(t\theta_n)^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{-1} \le c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac12}, \end{aligned} \tag{7.72}$$

$$\begin{aligned} J^2_{11} &\le c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac14}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{\frac{1}{\theta_n}}^{t-\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac14}\theta_n^{-\frac14}\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\,d\tau \\ &= c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{\frac{1}{\theta_n}}^{t-\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac12}\,d\tau \\ &= \frac{c(\alpha,r)}{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}\theta_n^{-\frac12}t^{\frac{r-\alpha}{2}}\left[\left(t-\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}-\left(\frac{1}{\theta_n}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac12}\right] \le c(\alpha,r)\left(\frac{t}{\theta_n}\right)^{\frac12}. \end{aligned} \tag{7.73}$$

Из (7.72) и (7.73) имеем

$$J_{11} \le c(\alpha,r)\left[\left(\frac{t}{\theta_n}\right)^{\frac12} + \theta_n^{-\frac12}\right]. \tag{7.74}$$

Оценим J_{12}. С этой целью запишем

$$J_{12} = J_{12}^1 + J_{12}^2, \tag{7.75}$$

где

$$J_{12}^k = nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} \left|\widehat{L}_{n-r+1}^\alpha(t) - \widehat{L}_{n-r-1}^\alpha(t)\right| \int\limits_{Q_1^k} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}}}{|\tau - t|} \left|\widehat{L}_{n-r}^\alpha(\tau)\right| d\tau, \tag{7.76}$$

а Q_1^k имеет тот же смысл, что в (7.71), $k = 1, 2$. Обратимся снова к неравенству (2.13). Из (7.74) выводим, что

$$J_{12}^1 \le c(\alpha, r) nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{3}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_0^{\frac{1}{\theta_n}} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{t - \tau} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}}\, d\tau$$
$$\le c(\alpha, r) t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \frac{1}{t} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-\alpha+\frac{r}{2}-\frac{3}{4}}$$
$$= c(\alpha, r) t^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \theta_n^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \le c(\alpha, r)(t\theta_n)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{2}}, \tag{7.77}$$

$$J_{12}^2 \le c(\alpha, r) nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{3}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{\frac{1}{\theta_n}}^{t-\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{t - \tau} \theta_n^{-\frac{1}{4}} \tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\, d\tau$$
$$\le c(\alpha, r) t^{\frac{r-\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \int\limits_{\frac{1}{\theta_n}}^{t-\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{t-\tau}\, d\tau = c(\alpha, r) \int\limits_{\frac{1}{t\theta_n}}^{1-\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}} \frac{x^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}}{1-x}\, dx$$
$$\le c(\alpha, r) \int\limits_{\frac{1}{t\theta_n}}^{\frac{1}{3}} x^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac{1}{2}}\, dx + c(\alpha, r) \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1-\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}} \frac{dx}{1-x}$$
$$\le c(\alpha, r)\left(1 + \ln\left(\frac{2}{3}\sqrt{t\theta_n}\right)\right). \tag{7.78}$$

Из (7.75), (7.77) и (7.78) находим

$$J_{12} \le c(\alpha, r)(1 + \ln(\sqrt{t\theta_n})). \tag{7.79}$$

Переходя к оценке J_{13}, запишем равенство

$$J_{13} = J_{13}^1 + J_{13}^2, \tag{7.80}$$

в котором

$$J_{13}^k = nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}} \left|\widehat{L}_{n-r}^\alpha(t)\right| \int\limits_{Q_1^k} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau}{2}}}{|\tau - t|} \left|\widehat{L}_{n-r+1}^\alpha(\tau) - \widehat{L}_{n-r-1}^\alpha(\tau)\right| d\tau, \quad k = 1, 2. \tag{7.81}$$

Из (2.13) и (7.81) имеем

$$J_{13}^1 \le c(\alpha, r) nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \theta_n^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \int\limits_0^{\frac{1}{\theta_n}} \frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{t - \tau} \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-1}\, d\tau$$

$$\leq c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\frac{1}{t}\int\limits_0^{\frac{1}{\theta_n}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\,d\tau \leq c(\alpha,r)(t\theta_n)^{\frac{r-\alpha}{2}-1}, \quad (7.82)$$

$$J_{13}^2 \leq c(\alpha,r)nt^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\int\limits_{\frac{1}{\theta_n}}^{t-\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{t-\tau}\theta_n^{-\frac{3}{4}}\tau^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\,d\tau$$

$$\leq c(\alpha,r)t^{\frac{r-\alpha}{2}}\int\limits_{\frac{1}{\theta_n}}^{t-\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\frac{\tau^{\frac{\alpha-r}{2}}}{t-\tau}\,d\tau = c(\alpha,r)\int\limits_{\frac{1}{t\theta_n}}^{1-\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}}\frac{x^{\frac{\alpha-r}{2}}}{1-x}\,dx$$

$$\leq c(\alpha,r)(1+\ln(\sqrt{t\theta_n})). \quad (7.83)$$

Из (7.80)–(7.83) получаем

$$J_{13} \leq c(\alpha,r)(1+\ln(\sqrt{t\theta_n})). \quad (7.84)$$

Оценки (7.66), (7.74), (7.79), (7.84), взятые вместе, дают оценку

$$J_1 \leq c(\alpha,r)(1+\ln(t\theta_n)). \quad (7.85)$$

Собирая (7.27), (7.42), (7.65) и (7.85), приходим к неравенству

$$\lambda_{r,n}^{\alpha} \leq c(\alpha,r)\left[\ln\sqrt{t\theta_n}+\left(\frac{\theta_n}{t}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}\ln\frac{\theta_n/t-1}{\theta_n/(2t)+\sqrt{\frac{1}{t\theta_n}}-1}\right]$$

$$\leq c(\alpha,r)[\ln(n+1)+(n/t)^{\frac{\alpha-r}{2}}], \quad t\in G_2. \quad (7.86)$$

Тем самым оценка (6.11) доказана.

Докажем (6.12). Пусть $t\in G_3=\left[\frac{1}{2}\theta_n,\frac{3}{2}\theta_n\right]$. Воспользуемся представлением (7.27) и оценим J_k ($1\leq k\leq 3$). Что касается величины J_2, то для нее верна оценка (7.42). Поэтому остается оценить J_k для $k=1$ и $k=3$. Для $k=3$ воспользуемся оценкой (7.43). Чтобы оценить величину J_{31}, представим ее в следующем виде:

$$J_{31}=J_{311}+J_{312}, \quad (7.87)$$

в котором

$$J_{31k}=t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}\left|\widehat{L}_{n-r}^{\alpha}(t)\right|\int\limits_{Q_{31k}}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{2}}\left|\widehat{L}_{n-r}^{\alpha}(\tau)\right|d\tau, \quad k=1,2, \quad (7.88)$$

где $Q_{311}=(t+\sqrt{t/\theta_n},3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n})$, $Q_{312}=(3\theta_n/2+\sqrt{t/\theta_n},\infty)$. Обратимся к неравенству (2.13), тогда из (7.88) находим

$$J_{311}\leq c(\alpha,r)\frac{\theta_n^{-\frac{1}{2}-\alpha}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{\frac{1}{4}}}\int\limits_{Q_{311}}\frac{\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}d\tau}{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\leq\frac{c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac{1}{2}}}{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|t-\theta_n|\right)^{\frac{1}{4}}}\int\limits_{Q_{311}}\frac{d\tau}{\left(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|\tau-\theta_n|\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\le \frac{c(\alpha,r)\theta_n^{-\frac12}}{\big(\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\big)^{\frac14}}\int\limits_{\theta_n}^{\frac32\theta_n+\sqrt{t/\theta_n}}\frac{d\tau}{\big(\tau+\theta_n^{\frac13}-\theta_n\big)^{\frac14}}$$

$$\le c(\alpha,r)\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac14}, \quad (7.89)$$

$$J_{312}\le c(\alpha,r)\frac{\theta_n^{-\alpha}t^{\frac r2+\frac14}}{\big(\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\big)^{\frac14}}\int\limits_{Q_{312}}\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}e^{-\frac\tau4}\,d\tau$$

$$\le \frac{c(\alpha,r)}{\big(\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\big)^{\frac14}}\int\limits_{\frac{3\theta_n}{2}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\theta_n}\right)^{\alpha}e^{-\frac\tau4}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r)\int\limits_{\frac{3\theta_n}{2}}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\theta_n}\right)^{\alpha}e^{-\frac\tau4}\,d\tau=c(\alpha,r)\theta_n\int\limits_{\frac32}^{\infty}\tau^{\alpha}e^{-\frac{\theta_n\tau}{4}}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r)\theta_n e^{-\frac{3\theta_n}{16}}\int\limits_{\frac32}^{\infty}\tau^{\alpha}e^{-\frac{\theta_n\tau}{8}}\,d\tau\le c(\alpha,r). \quad (7.90)$$

Из (7.87)–(7.90) выводим неравенства

$$J_{31}\le c(\alpha,r)\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac14}, \quad t\in G_3,\ r-\frac12<\alpha<r+\frac12. \quad (7.91)$$

Переходя к оценке величины J_{32}, представим ее в виде

$$J_{32}=J_{321}+J_{322}, \quad (7.92)$$

в котором

$$J_{32k}=nt^{\frac r2+\frac14}e^{-\frac t2}\big|\widehat L^{\alpha}_{n-r+1}(t)-\widehat L^{\alpha}_{n-r-1}(t)\big|\int\limits_{Q_{31k}}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}e^{-\frac\tau2}}{\tau-t}\big|\widehat L^{\alpha}_{n-r}(\tau)\big|\,d\tau, \quad k=1,2. \quad (7.93)$$

Обратимся к неравенству (2.14), тогда из (7.93) находим

$$J_{321}\le c(\alpha,r)nt^{\frac r2+\frac14}t^{-\frac\alpha2}\theta_n^{-\frac34}\big[\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\big]^{\frac14}$$

$$\times\int\limits_{Q_{311}}\frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}\theta_n^{-\frac\alpha2}\big[\theta_n\big(\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\big)\big]^{-\frac14}}{\tau-t}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r)\int\limits_{t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\frac32\theta_n+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\frac{\big[\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\big]^{\frac14}}{\big[\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\big]^{\frac14}}\frac{d\tau}{\tau-t}\le c(\alpha,r)\ln(n+1). \quad (7.94)$$

Чтобы убедиться в справедливости (7.94), покажем, что

$$A=\int\limits_{t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\frac32\theta_n+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\frac{\big[\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\big]^{\frac14}}{\big[\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\big]^{\frac14}}\frac{d\tau}{\tau-t}\le c(\alpha)\ln(n+1).$$

С этой целью рассмотрим два случая: 1) $\theta_n/2 \le t \le \theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}}$; 2) $\theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}} \le t \le 3\theta_n/2$. Во втором из этих случаев имеем

$$\frac{\theta_n^{\frac{1}{3}} + |t-\theta_n|}{\theta_n^{\frac{1}{3}} + |\tau-\theta_n|} \le 3, \quad \theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}} \le t \le \tau,$$

поэтому

$$A \le 3\ln\frac{\frac{3}{2}\theta_n + \sqrt{\frac{t}{\theta_n}} - t}{\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \le 3\ln\left(1 + \frac{\frac{3}{2}\theta_n - t}{\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}\right) \le c(\alpha)\ln(n+1).$$

Если $\theta_n/2 \le t \le \theta_n - 2\theta_n^{\frac{1}{3}}$, то можно записать

$$A = \int\limits_{t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} + \int\limits_{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} + \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{3\theta_n/2+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} = A_1 + A_2 + A_3.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $2\theta_n^{\frac{1}{3}} \le \theta_n - t$, получим

$$A_2 \le \int\limits_{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{\left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}}{\left[\theta_n^{\frac{1}{3}} + |\tau-\theta_n|\right]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\le \left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{12}}\ln\frac{\theta_n+\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}-t}{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}-t}$$

$$= \left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{12}}\ln\left(1+\frac{2\theta_n^{\frac{1}{3}}}{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}-t}\right)$$

$$\le \left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\theta_n^{-\frac{1}{12}}\frac{2\theta_n^{\frac{1}{3}}}{\theta_n-t-\theta_n^{\frac{1}{3}}} \le \left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}\frac{2\theta_n^{\frac{1}{4}}}{\theta_n-t-\frac{1}{2}(\theta_n-t)}$$

$$\le \left(\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right)^{\frac{1}{4}}\frac{4\theta_n^{\frac{1}{4}}}{\theta_n-t} \le 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\theta_n}{(\theta_n-t)^3}\right)^{\frac{1}{4}} \le c\left(\frac{\theta_n}{\left(2\theta_n^{\frac{1}{3}}\right)^3}\right)^{\frac{1}{4}} \le c,$$

$$A_1 \le \int\limits_{t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{\left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}}{\left[\theta_n^{\frac{1}{3}} + |\tau-\theta_n|\right]^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\le \int\limits_{t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{\left[\frac{3}{2}(\theta_n-t)\right]^{\frac{1}{4}}}{(\theta_n-\tau)^{\frac{1}{4}}}\frac{d\tau}{\tau-t} \le c\int\limits_{t+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\theta_n-\theta_n^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{-d\frac{\theta_n-\tau}{\theta_n-t}}{\left(1-\frac{\theta_n-\tau}{\theta_n-t}\right)\left(\frac{\theta_n-\tau}{\theta_n-t}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\le c\int\limits_{\frac{\theta_n^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}{\theta_n-t}}^{\frac{\theta_n-t-\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}{\theta_n-t}} \frac{d\tau}{(1-\tau)\tau^{\frac{1}{4}}} \le c(\alpha)\ln(n+1),$$

$$A_3 \le \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac13}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{3\theta_n/2+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{\left[\frac32(\theta_n-t)\right]^{\frac14}}{\left[\theta_n^{\frac13}+|\tau-\theta_n|\right]^{\frac14}} \frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\le c \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac13}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{3\theta_n/2+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{(\tau-t)^{\frac14}\,d\tau}{(\tau-t)(\tau-\theta_n)^{\frac14}} \le c \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac13}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{3\theta_n/2+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{\frac34}(\tau-\theta_n)^{\frac14}}$$

$$\le c \int\limits_{\theta_n+\theta_n^{\frac13}+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{3\theta_n/2+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}} \frac{d\tau}{(\tau-\theta_n)} \le c(\alpha)\ln(n+1).$$

Из полученных оценок для A_i, $i=1,2,3$, вытекает, что $A \le c(\alpha)\ln(n+1)$ и тем самым доказана справедливость оценки (7.94).

Далее из (7.93) и неравенства (2.14) имеем ($t \in G_3$)

$$J_{322} \le c(\alpha,r) n t^{\frac r2+\frac14} t^{-\frac\alpha2}\theta_n^{-\frac34}\left[\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\right]^{\frac14} \int\limits_{Q_{312}} \frac{\tau^{\alpha-\frac r2-\frac14}e^{-\frac\tau4}\,d\tau}{\theta_n^{\frac\alpha2}(\tau-t)}$$

$$\le c(\alpha,r)\theta_n^{\frac14-\alpha}\left[\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\right]^{\frac14} \int\limits_{\frac32\theta_n+\sqrt{\frac{t}{\theta_n}}}^{\infty} \frac{\tau^\alpha e^{-\frac\tau4}\,d\tau}{\tau-t}$$

$$\le c(\alpha,r)\theta_n^{\frac14-\alpha}\left[\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|\right]^{\frac14} \int\limits_{\frac32\theta_n+\sqrt{\frac32}}^{\infty} \tau^\alpha e^{-\frac\tau4}\,d\tau$$

$$\le c(\alpha,r) \int\limits_{\frac32\theta_n}^{\infty} \tau^\alpha e^{-\frac\tau4}\,d\tau \le c(\alpha,r), \quad r-\frac12<\alpha<r+\frac12. \quad (7.95)$$

Из (7.92)–(7.95) следует, что

$$J_{32} \le c(\alpha,r)\ln(n+1). \quad (7.96)$$

Комбинируя методы, которые привели к оценкам (7.91) и (7.96), нетрудно доказать также, что из (7.46) вытекает оценка

$$J_{33} \le c(\alpha,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac14}\right], \quad t\in G_3,\ r-\frac12<\alpha<r+\frac12. \quad (7.97)$$

Сопоставляя оценки (7.91), (7.96), (7.97) с (7.43), имеем

$$J_3 \le c(\alpha,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac14}\right], \quad t\in G_3,\ r-\frac12<\alpha<r+\frac12. \quad (7.98)$$

Наконец, почти дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к оценке (7.98), в силу (7.28) можно доказать, что

$$J_1 \le c(\alpha,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{\frac13}+|t-\theta_n|}\right)^{\frac14}\right], \quad t\in G_3,\ r-\frac12<\alpha<r+\frac12. \quad (7.99)$$

Объединяя оценки (7.98), (7.99), (7.42) и сопоставляя их с равенством (7.27), приходим к (6.12).

Осталось доказать оценку (6.13). С этой целью обратимся непосредственно к равенству (6.8), из которого находим

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) \leq t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left(e^{-t}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t)\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\infty}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\left(e^{-\tau}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau)\right)^{\frac{1}{2}}d\tau.$$

Положим

$$I_k = \int\limits_{E_k}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\left(e^{-\tau}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau)\right)^{\frac{1}{2}}d\tau, \quad k=1,2,3,$$

где $E_1 = [0, 1/\theta_n]$, $E_2 = [1/\theta_n, 3\theta_n/2]$, $E_3 = [3\theta_n/2, \infty)$. Тогда

$$\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) \leq t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left(e^{-t}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t)\right)^{\frac{1}{2}}(I_1+I_2+I_3).$$

Из (2.15) для $t \geq 3\theta_n/2$ имеем

$$t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left(e^{-t}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(t,t)\right)^{\frac{1}{2}} \leq c(\alpha,r)n^{\frac{1-\alpha}{2}}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-t/4}.$$

Кроме того,

$$I_1 = \int\limits_{E_1}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\left(e^{-\tau}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau)\right)^{\frac{1}{2}}d\tau \leq c(\alpha,r)n^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}},$$

и в силу леммы 7.1

$$I_2 = \int\limits_{E_2}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\left(e^{-\tau}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau)\right)^{\frac{1}{2}}d\tau$$
$$\leq c(\alpha,r)n^{\frac{1}{4}}\int\limits_{E_2}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\tau^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}d\tau \leq c(\alpha,r)n^{\frac{\alpha-r}{2}+\frac{3}{4}}.$$

Наконец,

$$I_3 = \int\limits_{E_3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\left(e^{-\tau}\mathscr{K}_{n-r}^{\alpha}(\tau,\tau)\right)^{\frac{1}{2}}d\tau \leq c(\alpha,r)n^{\frac{1-\alpha}{2}}\int\limits_{E_3}\tau^{\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\tau}{4}}d\tau \leq c(\alpha,r).$$

Собирая полученные оценки, находим $\lambda_{r,n}^{\alpha}(t) \leq c(\alpha,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}t^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{4}}$. Тем самым оценка (6.13) доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. N 2. P. 289–303.
2. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. V. 28. P. 547–594.
3. *Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L.* Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comput. Appl. Math. 1993. V. 48. P. 113–131.
4. *Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M.* On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. V. 65. P. 151–175.
5. *Meijer H. G.* Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. V. 73. P. 1–16.

6. *Marcellan F., Xu Yuan.* On Sobolev orthogonal polynomials // Expos. Math. 2015. V. 33, N 3. P. 308–352.
7. *Шарапудинов И. И.* Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье Лежандра // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 5. С. 143–160.
8. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства операторов $\mathscr{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 765–795.
9. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: Изд-во Дагестан. науч. центра, 2004.
10. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 442–465.
11. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 135–154.
12. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 452–471.
13. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
14. *Askey R., Wainger S.* Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math. 1965. V. 87. P. 698–708.

Статья поступила 18 сентября 2015 г.

Шарапудинов Идрис Идрисович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362025;
Дагестанский гос. педагогический университет,
ул. Гамидова, 17а, Махачкала 367013
sharapud@mail.ru