Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ДВУХ НОРМАЛЬНЫХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП

С. Тан, Ю. Е, В. Го

Аннотация. Пусть $\mathfrak{P}1$ — класс всех конечных групп, являющихся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп. Пусть $\mathfrak{P}$ — класс всех несверхразрешимых $\mathfrak{P}1$-групп G таких, что все собственные $\mathfrak{P}1$-подгруппы группы G и все нетривиальные фактор-группы группы G сверхразрешимы. В настоящей работе получена классификация $\mathfrak{P}$-групп.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.215

Ключевые слова: конечная группа, сверхразрешимая подгруппа, произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, модуль.

1. Введение

Все группы в данной статье конечны. На протяжении всей статьи G обозначает конечную группу, p — простое число и F_p — конечное поле из p элементов. Через $|G|$ обозначается порядок группы G и через $\pi(G)$ — множество всех простых делителей числа $|G|$. Группа G называется *p-замкнутой*, если ее силовская p-подгруппа нормальна.

Хорошо известно, что произведение двух нормальных разрешимых подгрупп разрешимо и произведение двух нормальных нильпотентных подгрупп нильпотентно. Однако произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп не обязательно сверхразрешимо. Таким образом, возникают следующие вопросы.

Проблема 1.1. *При каких условиях произведение двух (нормальных) сверхразрешимых подгрупп снова будет сверхразрешимо?*

Проблема 1.2 (см. [1, гл. II, проблема 6.34]). *Каково строение несверхразрешимой группы, являющейся произведением двух (нормальных) сверхразрешимых подгрупп?*

Проблема 1.1 изучалась во многих работах, например, в [2–14]. В частности, Бэр доказал, что если G — произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп и $[G,G]$ нильпотентна, то G сверхразрешима [2]. Фризен показал, что группа G, являющаяся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп M и N, сверхразрешима, если индексы $|G:M|$ и $|G:N|$ взаимно просты [3].

Research is supported by NNSF grants of China (Grant # 11371335, 11431010, 11571329) and Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics of Chinese Academy of Sciences.

Недавно В. Го и А. С. Кондратьев в [4, 5] описали строение минимальной несверхразрешимой группы, являющейся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп. Они доказали, что конечная минимальная несверхразрешимая группа G раскладывается в произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп тогда и только тогда, когда $G/F(G)$ — примарная минимальная неабелева группа.

Пусть $\mathfrak{P}1$ — класс всех групп, являющихся произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп. Пусть $\mathfrak{P}$ — класс всех несверхразрешимых $\mathfrak{P}1$-групп G таких, что все собственные $\mathfrak{P}1$-подгруппы и нетривиальные фактор-группы группы G сверхразрешимы. Естественным образом возникает следующий вопрос.

Проблема 1.3. *Каково строение $\mathfrak{P}$-групп?*

Основная цель данной работы — решить проблему 1.3. А именно, получить классификацию $\mathfrak{P}$-групп (см. теорему 3.6). В качестве следствия получено необходимое и достаточное условие сверхразрешимости $\mathfrak{P}1$-группы (см. следствие 4.1).

Все необъясненные обозначения и понятия стандартны и могут быть при необходимости найдены в [15, 16].

2. Предварительные сведения

Нам потребуются следующие хорошо известные результаты.

Лемма 2.1 (см. [17, теорема 1.8.17]). *Предположим, что M — нормальная нильпотентная подгруппа группы G и $M \cap \Phi(G) = 1$. Тогда M является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G.*

Напомним, что G — группа Фробениуса с дополнением H, если H — нетривиальная собственная подгруппа группы G такая, что $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \backslash H$ (см. [18, гл. V, определение 8.1]). В этом случае множество

$$K = \Big(G \backslash \Big(\bigcup_{g \in G} H^g\Big)\Big) \cup \{1\}$$

является нормальной подгруппой группы G и называется *фробениусовым ядром группы G, соответствующим дополнению H*. Более того, $G = K \rtimes H$.

Лемма 2.2 (см. [18, гл. V, теорема 8.7]). *Пусть $G = KH$ — группа Фробениуса с ядром K и дополнением H. Если $p > 2$, то силовские p-подгруппы группы H циклические. Если $p = 2$, то силовские p-подгруппы группы H либо циклические, либо обобщенные кватернионные. В частности, если H абелева, то H циклическая.*

Напомним, что группа A действует на G регулярно, если A нетривиальна и $C_G(\langle a \rangle) = \{g \mid g \in G,\ g^a = g\} = 1$ для любого $1 \neq a \in A$. Если A — группа автоморфизмов группы G и A действует на G регулярно, то A называется *регулярной группой автоморфизмов группы G*.

Следующая лемма дана как упражнение в книге Горенстейна [16, гл. 2, упражнение 17]. Для удобства читателя приводим доказательство.

Лемма 2.3. *Если A — регулярная группа автоморфизмов группы G, то полупрямое произведение $G \rtimes A$ является группой Фробениуса с ядром G и дополнением A.*

Доказательство. Если $ga \in G \rtimes A \backslash A$, где $g \in G$ и $a \in A$, то ясно, что $g \neq 1$. Предположим, что $A \cap A^{ga} \neq 1$. Тогда существует $1 \neq b \in A \cap A^{ga}$. Следовательно, существует $c \in A$ такой, что $b = c^{ga}$, т. е. $b = a^{-1}g^{-1}cga$. Отсюда вытекает, что $g^c = g$. Значит, $c = 1$, поскольку $g \neq 1$ и A действует на G регулярно. Тогда $b = 1$; противоречие. Таким образом, $A \cap A^{ga} = 1$ для любого $ga \in G \rtimes A \backslash A$. Это означает, что $G \rtimes A$ — группа Фробениуса с дополнением A. Поскольку G — нормальное дополнение к A в $G \rtimes A$, получаем, что G — фробениусово ядро группы $G \rtimes A$. $\square$

3. Основной результат

Пусть $E_p(1,1,1) = \langle a, b \mid c = [a,b],\ a^p = b^p = c^p = [a,c] = [b,c] = 1\rangle$, $p > 2$, и $M_p(n,1) = \langle a, b \mid a^{p^n} = b^p = 1,\ a^b = a^{1+p^{n-1}}\rangle$, $n \geq 2$. Отметим, что любая максимальная подгруппа группы $M_p(n,1)$ содержит $\langle a^p\rangle = Z(M_p(n,1))$ в качестве максимальной подгруппы. Следовательно, $M_p(n,1)$ — минимальная неабелева группа.

Начнем с построения четырех серий групп, которые являются $\mathfrak{P}$-группами, и затем в теореме 3.6 покажем, что других $\mathfrak{P}$-групп нет.

Пример 3.1. Пусть p и q — простые числа такие, что $q \mid p-1$ и $q > 2$, и пусть $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_2 + \dots + \mathrm{F}_p v_q$ — q-мерное векторное пространство над F_p. Пусть ω — первообразный корень степени q из единицы в F_p. Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} \omega & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{q-1} \end{pmatrix}_{q\times q},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}$$

и $Q = \langle \alpha, \beta, \gamma\rangle$, где Q порождается α, β, γ относительно матричного умножения. Тогда $Q \simeq E_q(1,1,1)$. Пусть $G = P \rtimes Q$, $M = P \rtimes \langle \alpha, \beta\rangle$ и $N = P \rtimes \langle \alpha, \gamma\rangle$. Тогда M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = MN$. Однако G несверхразрешима. Обозначим группу G через $E(p,q,1)$.

Пример 3.2. Пусть p и q — простые числа такие, что $q^n \mid p-1$ для $n \geq 2$. Пусть $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_2 + \dots + \mathrm{F}_p v_q$ — q-мерное векторное пространство над F_p. Пусть ω и θ — первообразные корни из единицы в F_p степеней q и q^n соответственно. Положим

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & & & \\ & \theta\omega^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta\omega^{q-1} \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}$$

и $Q = \langle \beta, \gamma\rangle$. Тогда $Q \simeq M_q(n,1)$. Пусть $G = P \rtimes Q$, $M = P \rtimes \langle \beta\rangle$ и $N = P \rtimes \langle \beta^q, \gamma\rangle$. Тогда M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы

G и $G = MN$. Ясно, что G несверхразрешима. Обозначим группу G через $M(p, q, n, \theta, \omega)$.

Пример 3.3. Пусть p — простое число, $4 \mid p-1$ и $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_2$ — двумерное векторное пространство над F_p. Пусть θ — первообразный корень четвертой степени из единицы в F_p. Положим

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $Q = \langle \beta, \gamma \rangle$. Тогда $Q \simeq Q_8$. Пусть $G = P \rtimes Q$, $M = P \rtimes \langle \beta \rangle$ и $N = P \rtimes \langle \gamma \rangle$. Тогда M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = MN$. При этом G — несверхразрешимая группа Фробениуса с ядром P и дополнением Q. Обозначим группу G через $Q(p, 2)$.

Пример 3.4. Пусть p — простое число, $4 \nmid p-1$ и $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_2$ — двумерное векторное пространство над F_p. Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $Q = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Тогда $Q \simeq D_4$. Пусть $G = P \rtimes Q$, $M = P \rtimes \langle \alpha, \beta \rangle$ и $N = P \rtimes \langle \alpha, \gamma \rangle$. Тогда M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = MN$. Ясно, что G несверхразрешима. Обозначим группу G через $D(p, 2)$.

Группы $E(p, q, 1)$, $M(p, q, n, \theta, \omega)$, $Q(p, 2)$ и $D(p, 2)$ являются $\mathfrak{P}$-группами. Действительно, с одной стороны, P — единственная минимальная нормальная подгруппа групп $E(p, q, 1)$, $M(p, q, n, \theta, \omega)$, $Q(p, 2)$ и $D(p, 2)$. Из этого следует, что любая нетривиальная фактор-группа групп $E(p, q, 1)$, $M(p, q, n, \theta, \omega)$, $Q(p, 2)$ и $D(p, 2)$ сверхразрешима. С другой стороны, $E(p, q, 1)$, $M(p, q, n, \theta, \omega)$ и $Q(p, 2)$ несверхразрешимы, поскольку любая собственная подгруппа группы Q — абелева группа, период которой делит $p - 1$. (Отметим, что если $G = PQ$, где P — нормальная абелева силовская p-подгруппа группы G такая, что $C_G(P) = P$, и Q — силовская q-подгруппа группы G, $q \neq p$, то G сверхразрешима тогда и только тогда, когда Q абелева и ее период делит $p - 1$.) В случае группы $D(p, 2)$ у Q есть единственная собственная подгруппа $A = \langle \beta\gamma \rangle$, не являющаяся абелевой группой периода, делящего $p - 1$, поэтому все собственные подгруппы группы $D(p, 2)$, кроме $P \rtimes A$, сверхразрешимы. Отметим, что $P \rtimes A$ не $\mathfrak{P}_1$-группа. Следовательно, любая собственная $\mathfrak{P}_1$-подгруппа групп $E(p, q, 1)$, $M(p, q, n, \theta, \omega)$, $Q(p, 2)$ и $D(p, 2)$ сверхразрешима.

Предложение 3.5. *Пусть θ^k и ω^r — первообразные корни из единицы степеней q^n и p соответственно в поле F_p. Тогда $M(p, q, n, \theta, \omega) \simeq M(p, q, n, \theta^k, \omega^r)$.*

Доказательство. Будем придерживаться обозначений из примера 3.2. Поскольку θ и θ^k являются первообразными корнями степени q^n из единицы в $\mathrm{F_p}$, существует натуральное число a такое, что $(\theta^k)^a = \theta$ и $(a, q) = 1$. В силу того, что

$$\begin{aligned} M(p, q, n, \theta^k, \omega^r) &= \overline{P} \rtimes \langle \bar{\beta}, \bar{\gamma} \rangle = \overline{P} \rtimes \langle (\bar{\beta})^a, \bar{\gamma} \rangle \\ &\simeq M(p, q, n, \theta^{ka}, \omega^{ra}) = M(p, q, n, \theta, \omega^{ra}), \end{aligned}$$

где $\overline{P}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ аналогичны P, β, γ из примера 3.2 соответственно, достаточно показать, что $M(p, q, n, \theta, \omega) \simeq M(p, q, n, \theta, \omega^m)$ для любого $1 \leq m \leq q - 1$.

Пусть $P' = \mathrm{F}_p v_1' + \mathrm{F}_p v_2' + \cdots + \mathrm{F}_p v_q'$, где $(v_1', v_2', \ldots, v_q')$ — базис для P', и

$$\beta' = \begin{pmatrix} \theta & & & \\ & \theta\omega^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta\omega^{(q-1)m} \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \gamma' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}.$$

Пусть $Q' = \langle \beta', \gamma' \rangle$ и $G' = P' \rtimes Q' = M(p,q,n,\theta,\omega^m)$. Вернемся к $M(p,q,n,\theta,\omega)$. Пусть $vi = v_{r_i}$, где $1 \le r_i \le q$ и $q \mid i - r_i$ для любого $i > q$. Поскольку $v_i\gamma = v_{i+1}$, получаем, что $v_i\gamma^m = v_{i+m}$. Отметим, что $(v_1, v_{1+m}, \ldots, v_{1+(q-1)m})$ — базис для P. Тогда $P = \mathrm{F}_p v_1 + \mathrm{F}_p v_{1+m} + \cdots + \mathrm{F}_p v_{1+(q-1)m}$ и β и γ^m имеют следующие матрицы в базисе $(v_1, v_{1+m}, \ldots, v_{1+(q-1)m})$:

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & & & \\ & \theta\omega^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta\omega^{(q-1)m} \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}.$$

Таким образом,

$$M(p,q,n,\theta,\omega) = P \rtimes \langle \beta, \gamma \rangle = P \rtimes \langle \beta, \gamma^m \rangle \simeq P' \rtimes \langle \beta', \gamma' \rangle = M(p,q,n,\theta,\omega^m).$$

Следовательно, $M(p,q,n,\theta,\omega) \simeq M(p,q,n,\theta,\omega^m)$ для любого $1 \le m \le q-1$. Предложение доказано. $\square$

В силу предложения 3.5 вместо $M(p,q,n,\theta,\omega)$ можно писать $M(p,q,n)$.

В оставшейся части статьи $\mathfrak{A}(p-1)$ обозначает класс всех абелевых групп, период которых делит $p-1$.

Теорема 3.6. *Пусть G — $\mathfrak{P}$-группа. Тогда $|\pi(G)| = 2$ и G изоморфна одной из групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$.*

Доказательство. Поскольку G — $\mathfrak{P}$-группа, G является несверхразрешимой $\mathfrak{P}_1$-группой и все собственные $\mathfrak{P}_1$-подгруппы и все нетривиальные фактор-группы группы G сверхразрешимы. Пусть $G = MN$, где M и N — две нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Доказательство будет состоять из следующих шагов.

(1) $\Phi(G) = 1$.

Допустим, что $\Phi(G) \ne 1$. Из условия на G следует, что $G/\Phi(G)$ сверхразрешима. Тогда G сверхразрешима; противоречие.

(2) В G есть единственная минимальная нормальная подгруппа K и G/K сверхразрешима.

Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G. В силу условия на G группа G/K сверхразрешима. Предположим, что H — другая минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда G/H сверхразрешима. Из этого следует, что G сверхразрешима; противоречие. Таким образом, единственность доказана.

(3) Пусть p — наибольшее простое число в $\pi(G)$. Тогда G p-замкнута и $K = F(G) = O_p(G)$.

Группы M и N p-замкнуты, поскольку они сверхразрешимы. Значит, G тоже p-замкнута, так как M, N — нормальные подгруппы группы G и $G = MN$. Следовательно, достаточно показать, что $K = F(G)$. В силу (1) и леммы 2.1 имеет место разложение $F(G) = A_1 \times \dots \times A_k$, где A_i — минимальная нормальная подгруппа группы G для $1 \le i \le k$. С учетом (2) получаем, что $k = 1$ и $F(G) = K$, и (3) выполнено.

(4) $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$ и G/K — неабелева q-группа, причем $q \mid p-1$.

Из (3) следует, что $F(M) = K$. Поскольку M сверхразрешима, получаем, что M/K абелева. В силу (1) выполнено $\Phi(M) = 1$. По лемме 2.1 имеем $K = A_1 \times \dots \times A_r$, где A_i, $1 \le i \le r$, — минимальная нормальная подгруппа группы M. Из сверхразрешимости группы M вытекает, что $M/C_M(A_i) \in \mathfrak{A}(p-1)$, $1 \le i \le r$. Значит, $M/(C_M(A_1) \cap \dots \cap C_M(A_r)) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Отметим, что

$$C_M(A_1) \cap \dots \cap C_M(A_r) = C_M(K) = C_M(F(M)) \le F(M) = K.$$

Следовательно, $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. По тем же соображениям $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. Предположим, что $|\pi(G/K)| \ne 1$. Пусть $q \in \pi(G/K)$ и Q_1/K, Q_2/K — силовские q-подгруппы групп M/K, N/K соответственно. Ясно, что Q_1 и Q_2 — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $(Q_1Q_2)/K$ — нормальная силовская q-подгруппа группы G/K. Значит, Q_1Q_2 — собственная $\mathfrak{P}_1$-подгруппа группы G. Из условия на G следует, что Q_1Q_2 сверхразрешима. Поскольку $K = F(G) = F(Q_1Q_2)$, получаем, что $(Q_1Q_2)/K$ абелева. Тогда G/K абелева, так как каждая силовская подгруппа группы G/K абелева и нормальна в G/K. Показали, что G/K абелева, $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. Следовательно, $G/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. По [19, гл. 1, теорема 1.4] группа K циклическая. Тогда G сверхразрешима; противоречие. Таким образом, $|\pi(G/K)| = 1$, и, значит, G/K — q-группа для некоторого простого числа $q \ne p$. Ясно, что G/K неабелева и $q \mid p-1$, и (4) доказано.

(5) Пусть $M_1 \ge M$ и $N_1 \ge N$ — две максимальные нормальные подгруппы группы G. Тогда M_1 и N_1 сверхразрешимы, M_1/K и N_1/K абелевы и $1 \ne M_1/K \cap N_1/K$ — циклическая группа.

Ясно, что $M_1 = MN \cap M_1 = M(N \cap M_1)$ и M, $N \cap M_1$ — две нормальные сверхразрешимые подгруппы группы M_1. Из условия на G следует, что M_1 сверхразрешима. Тогда в силу равенств $K = F(G) = F(M_1)$ группа M_1/K абелева. По тем же соображениям N_1 сверхразрешима и N_1/K абелева.

Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G. Из (3) и (4) вытекает, что $G = KQ$. Поскольку K — минимальная нормальная подгруппа группы G и Q — дополнение к K в G, получаем, что Q — максимальная подгруппа группы G. Более того, $M_1 = M_1 \cap KQ = K(Q \cap M_1)$ и $N_1 = N_1 \cap KQ = K(Q \cap N_1)$. В силу того, что M_1/K и N_1/K абелевы, $Q \cap M_1$ и $Q \cap N_1$ — различные абелевы максимальные подгруппы группы Q. Пусть

$$Q' = (Q \cap M_1) \cap (Q \cap N_1).$$

Если $Q' = 1$, то Q абелева и, значит, G/K абелева; противоречие. Следовательно, $1 \ne Q' \le Z(Q)$. Покажем, что действие группы Q' на K сопряжением регулярно. Предположим противное. Найдутся $1 \ne \alpha \in Q'$ и $1 \ne k \in K$ такие, что $k^\alpha = k$. Тогда $C_G(\langle \alpha \rangle) \ge \langle Q, k \rangle = G$, так как Q — максимальная подгруппа группы G. Следовательно, $\langle \alpha \rangle \trianglelefteq G$, что противоречит (2). Таким образом, Q' действует на K регулярно. Поскольку $K = F(G)$, группа Q' действует на K

точно. Значит, Q' можно рассматривать как регулярную группу автоморфизмов группы K. Применяя лемму 2.3, получаем, что KQ' — группа Фробениуса с дополнением Q'. По лемме 2.2 группа Q' циклическая. Следовательно, группа $M_1/K \cap N_1/K = (M_1 \cap N_1 \cap Q)K/K = Q'K/K \neq 1$ тоже циклическая, и (5) выполнено.

Без потери общности можно считать, что M и N — максимальные нормальные подгруппы группы G. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G. До конца доказательства фиксируем q-группы Q_1 и Q_2 такие, что $Q_1 = M \cap Q$ и $Q_2 = N \cap Q$. Тогда $M = KQ_1$ и $N = KQ_2$. Из (5) получаем, что Q_1 и Q_2 — абелевы максимальные подгруппы группы Q и $1 \neq Q_1 \cap Q_2$ — циклическая группа. Пусть $Q_1 \cap Q_2 = \langle \alpha \rangle$. Тогда $\langle \alpha \rangle \leq Z(Q)$ и $|Q/\langle \alpha \rangle| \leq q^2$.

(6) $\langle \alpha \rangle = Z(Q)$ и $Q/\langle \alpha \rangle \simeq Z_q \times Z_q$.

Если хотя бы одно из указанных утверждений неверно, то $Q/Z(Q)$ — циклическая группа. Это означает, что Q абелева. Тогда G/K абелева, но это противоречит (4). Следовательно, (6) выполнено.

Очевидно, что K — элементарная абелева p-группа и может рассматриваться как векторное пространство над F_p. В силу равенства $K = F(G)$ группы $C_G(K) = K$ и Q могут рассматриваться как линейные преобразования на K. Действие группы Q на K сопряжением превращает K в неприводимый Q-модуль. Поскольку M сверхразрешима, по теореме Машке [16, гл. 3, теорема 3.1] в K есть базис $\mathscr{M}$ такой, что любой элемент из Q_1 имеет диагональную матрицу в базисе $\mathscr{M}$. Тогда

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 I_{n_1} & & & \\ & a_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k I_{n_k}, \end{pmatrix},$$

где a_i, $1 \leq i \leq k$, — попарно различные элементы.

(7) $k = 1$, т. е. α — скалярное преобразование на K.

Пусть $V = \{v \mid v \in K, v^\alpha = a_1 v\}$. Тогда V — нетривиальный Q-подмодуль модуля K, поскольку $\alpha \in Z(Q)$. Так как K — неприводимый Q-модуль, получаем, что $V = K$ и, значит, (7) верно.

В силу (6) для любого $\beta \in Q_1 \backslash \langle \alpha \rangle$ выполнено $\beta^q \in \langle \alpha \rangle$. С учетом (7) имеем

$$\beta = \begin{pmatrix} bI_{m_1} & & & \\ & b\omega^{k_{2-1}} I_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b\omega^{k_{r-1}} I_{m_r}, \end{pmatrix},$$

где ω — первообразный корень степени q из единицы в F_p и $1 \leq k_i \neq k_j \leq q-1$ при $i \neq j$.

(8) $r > 1$.

Если $r = 1$, то $\beta \in Z(Q) = \langle \alpha \rangle$; противоречие. Значит, (8) доказано.

Из (8) и равенства $Q_1 = \langle \alpha, \beta \rangle$ следует, что K можно рассматривать как Q_1-модуль с r компонентами Веддерберна (см. [16, с. 72]) $V_1, V_2, \ldots, V_r$, $r > 1$ (на самом деле V_i — собственное подпространство, соответствующее собственному числу $b\omega^{k_{i-1}}$ преобразования β).

(9) $r = q$ и $m_1 = m_2 = \cdots = m_q = n$ для некоторого $n \geq 1$.

Пусть $\gamma \in Q \backslash Q_1$. По теореме Клиффорда [16, гл. 3, теорема 4.1] группа $\langle\gamma\rangle$ индуцирует транзитивное подстановочное действие на множестве $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$, так как $Q_1 \trianglelefteq Q$, $Q = Q_1\langle\gamma\rangle$ и K — неприводимый Q-модуль. Следовательно, $m_1 = m_2 = \dots = m_r = n$ для некоторого $n \geq 1$. Поскольку $\gamma^q \in \langle\alpha\rangle$ в силу (6) и V_i — Q_1-модуль для $1 \leq i \leq r$, получаем, что $r = q$. Таким образом, (9) доказано.

Пусть $\gamma \in Q \backslash Q_1$. Как показано в доказательстве утверждения (9), в K есть базис $\left(v_1^1, \dots, v_1^n, v_2^1, \dots, v_2^n, \dots, v_q^1, \dots, v_q^n\right)$ такой, что α, β и γ имеют следующие матрицы в этом базисе:

$$\alpha = \begin{pmatrix} aI_n & & & \\ & aI_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & aI_n \end{pmatrix}_{qn\times qn}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \bar{b}I_n & & & \\ & \bar{b}\omega^{k_1'}I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{b}\omega^{k_{q-1}'}I_n \end{pmatrix}_{qn\times qn},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I_n \\ C & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{qn\times qn},$$

где $1 \leq k_i' \leq q-1$ и k_i', $1 \leq i \leq q-1$, попарно различны.

(10) $n = 1$ и существует k такое, что $(k, q) = 1$ и $q \mid k_i' - ik$ для всех $1 \leq i \leq q-1$.

Отметим, что $\gamma^q \in \langle\alpha\rangle$. Следовательно, $C = cI_n$, где $c \in \mathrm{F}_p^*$. Тогда $\langle v_1^1\rangle \times \langle v_2^1\rangle \times \dots \times \langle v_q^1\rangle$ — Q-подмодуль модуля K. Значит, $\langle v_1^1\rangle \times \langle v_2^1\rangle \times \dots \times \langle v_q^1\rangle = K$ и $n = 1$. Из (6) получаем, что $[\beta, \gamma] \in \langle\alpha\rangle$ имеет порядок q, так как $[\beta, \gamma]^q = [\beta^q, \gamma] = 1$. Непосредственные вычисления показывают, что существует k такое, что $(k, q) = 1$ и $q \mid k_i' - ik$ для всех $1 \leq i \leq q-1$. Значит, (10) верно.

Без потери общности можно считать, что $k_i' = i$ для $1 \leq i \leq q-1$. В противном случае в качестве первообразного корня степени q из единицы в F_p можно взять $\omega' = \omega^k$.

(11) Заключение.

Случай I. Обе группы Q_1 и Q_2 не являются циклическими.

В этом случае можно выбрать $\beta \in Q_1$ и $\gamma \in Q_2$, оба порядка q. Предположим, что $|\alpha| > q$. Пусть $A = K\langle\alpha^q, \beta, \gamma\rangle$, $B = K\langle\alpha^q, \beta\rangle$ и $C = K\langle\alpha^q, \gamma\rangle$. Тогда $F(A) = K$ и B, C — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы A. Поскольку $K = F(A)$ и группа $A/K \simeq \langle\alpha^q, \beta, \gamma\rangle$ неабелева, A не является сверхразрешимой, что противоречит условию на G, так как A — собственная $\mathfrak{P}_1$-подгруппа группы G. Значит, $|\alpha| = q$. Тогда α, β, γ имеют следующие матричные представления:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \omega & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{q-1} \end{pmatrix}_{q\times q},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q},$$

где ω — первообразный корень степени q из единицы в F_p. Тогда $G \simeq K \rtimes \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$. Более того, если $q \neq 2$, то $G \simeq E(p,q,1)$.

Случай II. Одна из групп Q_1 и Q_2 циклическая, а другая нет.

Без потери общности можно считать, что $Q_1 = \langle\beta\rangle$, $Q_2 = \langle\alpha\rangle \times \langle\gamma\rangle$, где $|\alpha| = q^n$, $n \geq 1$ и $|\gamma| = q$. Тогда $|\beta| = q^{n+1}$ и β, γ имеют следующие матричные представления:

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & & & \\ & \theta\omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta\omega^{q-1} \end{pmatrix}_{q\times q}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{q\times q},$$

где θ и ω — первообразные корни из единицы в F_p степеней q^{n+1} и q соответственно. Значит, $G \simeq K \rtimes \langle\beta,\gamma\rangle = M(p,q,n+1)$, $n \geq 1$.

Случай III. Обе группы Q_1 и Q_2 циклические.

Предположим, что существует элемент $a \in Q \setminus Q_1$ порядка q. Отметим, что $\langle\alpha,a\rangle \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $[Q,Q] \leq \langle\alpha\rangle$ в силу (6). Значит, $A = K\langle\alpha,a\rangle$ — нормальная сверхразрешимая подгруппа группы G и $G = MA$. Таким образом, этот случай сводится к случаю II, поскольку можно заменить N на A.

Следовательно, можно считать, что в Q есть только одна подгруппа порядка q. Это означает, что Q является либо циклической группой, либо обобщенной кватернионной. Из неабелевости группы Q вытекает, что Q — обобщенная кватернионная группа и $q = 2$, т.е.

$$Q \simeq \langle a,b \mid a^{2^n} = 1,\ a^{2^{n-1}} = b^2,\ a^b = a^{-1}\rangle,$$

где $n \geq 2$. Получаем, что $|Z(Q)|$=2. Тогда $|Q| = 8$ в силу равенства $Q/Z(Q) \simeq Z_q \times Z_q$, установленного в (6). Значит, $Q \simeq Q_8$, и можно выбрать β и γ так, что $Q_1 = \langle\beta\rangle$, $Q_2 = \langle\gamma\rangle$ и β, γ имеют следующие матричные представления:

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где θ — первообразный корень четвертой степени из единицы в F_p. Таким образом, $G \simeq K \rtimes \langle\beta,\gamma\rangle = Q(p,2)$.

Допустим, что $q = 2$ в случае I. Если $4 \mid p-1$, то этот случай сводится к случаю II, поскольку можно положить $Q_1 = Q_1' = \langle\beta\gamma\rangle$ и $Q_2 = Q_2' = \langle\alpha,\gamma\rangle$ ($M' = KQ_1'$ и $N' = KQ_2'$ — две нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = M'N'$), и тогда $G \simeq M(p,2,2)$. Предположим, что $4 \nmid p-1$. Тогда рассматриваемый случай не сводится к случаю II, так как KQ_1' не является сверхразрешимой, и $G \simeq D(p,2)$. Следовательно, в случае I при $q = 2$ группа G изоморфна одной из групп $M(p,2,2)$ и $D(p,2)$.

Таким образом, G изоморфна одной из групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$. Теорема доказана. $\square$

4. Некоторые приложения теоремы 3.6

Пусть A — группа. Говорят, что в G *есть A-секция*, если в ней есть подгруппы H и K такие, что $K \trianglelefteq H$ и $H/K \simeq A$.

Следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 3.6, дает необходимое и достаточное условие того, что $\mathfrak{P}1$-группа сверхразрешима.

Следствие 4.1. *Пусть $G = MN$, где M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Тогда G сверхразрешима в том и только в том случае, когда в G нет A-секций для любой A из групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$.*

Отметим, что коммутанты групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$ не нильпотентны. Из следствия 4.1 очевидным образом вытекает

Следствие 4.2 [2]. *Пусть $G = MN$, где M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Если $[G,G]$ нильпотентна, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.3 [3]. *Пусть M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Если индексы $|G:M|$ и $|G:N|$ взаимно просты, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Из взаимной простоты индексов $|G:M|$ и $|G:N|$ следует, что $G = MN$. Если G несверхразрешима, то по следствию 4.1 в G есть секция H/K, изоморфная одной из групп $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ и $D(p,2)$. Индексы $|H : H \cap M|$ и $|H : H \cap N|$ взаимно просты, поскольку $|H : H \bigcap M| = |HM : M|$ и $|H : H \cap N| = |HN : N|$. Следовательно, тройка $(H, H \cap M, H \cap N)$ удовлетворяет посылке следствия. При этом ясно, что H несверхразрешима. Без потери общности можно считать, что $H = G$. Отметим, что индексы $|G/K : MK/K|$ и $|G/K : NK/K|$ взаимно просты. Значит, $MK/K = G/K$ или $NK/K = G/K$, так как $|\pi(G/K)| = |\pi(H/K)| = 2$ и $G/K = H/K$ содержит единственную минимальную нормальную подгруппу, которая является силовской подгруппой группы G/K. Тогда G/K сверхразрешима, т. е. H/K сверхразрешима; противоречие. $\square$

Если H — элементарная абелева группа и $|H| = p^n$ для простого числа p, то будем говорить, что H *имеет ранг* n, и положим $r(H) = n$.

Теорема 4.4. *Пусть $G = MN$, где M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Пусть q — наименьшее простое число в $\pi(M)\cap\pi(N)$. Если $r(H/K) < q$ для любого главного фактора H/K группы G, содержащегося в $M \cap N$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Если $\pi(M) \cap \pi(N) = \varnothing$, то $M \cap N = 1$ и $G = M \times N$. В этом случае G сверхразрешима. Значит, можно считать, что $\pi(M)\cap\pi(N) \neq \varnothing$. Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Тогда выполнены следующие утверждения.

(1) $\Phi(G) \cap M = \Phi(G) \cap N = 1$.

Если это не так, то $\Phi(G) \cap M \neq 1$ или $\Phi(G) \cap N \neq 1$. Без потери общности можно считать, что $\Phi(G) \cap M \neq 1$. Пусть $A = \Phi(G) \cap M$. Поскольку $M/A \bigcap NA/A = (M \cap N)A/A$ и $\pi(M/A) \cap \pi(NA/A) \subseteq \pi(M) \cap \pi(N)$, условие теоремы выполнено для $(G/A, M/A, NA/A)$. В силу выбора группы G получаем, что G/A сверхразрешима. Следовательно, G сверхразрешима; противоречие.

(2) Пусть $K \leq M$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в M или в N, $K = F(M) = F(N)$ и G/K сверхразрешима.

Поскольку $M/K \bigcap NK/K = (M \cap N)K/K$ и $\pi(M/K) \cap \pi(NK/K) \subseteq \pi(M) \cap \pi(N)$, условие теоремы выполнено для $(G/K, M/K, NK/K)$. Из минимальности группы G следует, что G/K сверхразрешима. Значит, в G есть единственная минимальная нормальная подгруппа K, содержащаяся в M. В силу (1) и леммы 2.1 получаем, что $F(M) = K$. Предположим, что $A \leq N$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Аналогичным образом показываем, что A — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N, G/A сверхразрешима и $A = F(N)$. Группа G несверхразрешима, поэтому $A = K$. Значит, (2) выполнено.

(3) Пусть p — наибольшее простое число в $\pi(G)$. Тогда G p-замкнута, $K = O_p(G)$ и $F(G) = K \times Z(G)$.

Поскольку M и N сверхразрешимы, они p-замкнуты. Из (2) и равенства $G = MN$ получаем, что $K = O_p(G) = O_p(M)O_p(N)$ — силовская p-подгруппа группы G. Следовательно, G тоже p-замкнута, и $F(G) = K \times O_{p'}(F(G))$. Из (2) вытекает, что $O_{p'}(F(G)) \cap M = O_{p'}(F(G)) \cap N = 1$. Ясно, что $K \bigcap Z(G) = 1$. Значит, $F(G) = K \times Z(G)$, и (3) доказано.

(4) Пусть $A \leq M$ и $B \leq N$ — две нормальные подгруппы группы G. Тогда условие теоремы выполнено для (AB, A, B).

Пусть q' — наименьшее простое число в $\pi(A) \cap \pi(B)$ (если $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$, то также считаем, что условие выполнено для (AB, A, B), поскольку в этом случае AB сверхразрешима). Тогда $q' \geq q$. Если это не так, то $A \cap B$ содержит главный фактор H/K группы AB такой, что $r(H/K) \geq q'$. Отметим, что $A \cap B$ — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $M \cap N$. По операторной теореме Жордана — Гёльдера $M \cap N$ содержит главный фактор H'/K' группы G такой, что $r(H'/K') \geq r(H/K) \geq q' \geq q$. Это противоречит условию теоремы, и (4) доказано.

(5) $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, G/K — неабелева q-группа и $q \mid p-1$.

Из (1) получаем, что $\Phi(M) = \Phi(N) = 1$. Рассуждая так же, как на шаге (4) доказательства теоремы 3.6, выводим, что $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$. Предположим, что $|\pi(G/K)| \geq 2$. Пусть $r \in \pi(G/K)$ и R_1/K, R_2/K — силовские r-подгруппы групп M/K, N/K соответственно. Тогда $R_1 \leq M$, $R_2 \leq N$ — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $(R_1R_2)/K$ — нормальная силовская r-подгруппа группы G/K. В силу (4) группа R_1R_2 сверхразрешима, так как R_1R_2 — собственная подгруппа группы G. Тогда $R_1R_2Z(G)$ тоже сверхразрешима. Следовательно, $(R_1R_2)Z(G)/(K \times Z(G))$ абелева, поскольку $F(G) = K \times Z(G) = F(R_1R_2Z(G))$ по (3). Отметим, что $(R_1R_2)Z(G)/(K \times Z(G))$ — нормальная силовская r-подгруппа группы $G/(K \times Z(G))$. Тогда $G/(K \times Z(G))$ абелева, поскольку любая силовская подгруппа группы $G/(K \times Z(G))$ абелева и нормальна в $G/(K \times Z(G))$. Таким образом, $M/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, $N/K \in \mathfrak{A}(p-1)$, и $G/(K \times Z(G))$ абелева. Следовательно, $G/(K \times Z(G)) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Ясно, что $(K \times Z(G))/Z(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G/Z(G)$ и

$$(G/Z(G))/((K \times Z(G))/Z(G)) \simeq G/(K \times Z(G)) \in \mathfrak{A}(p-1).$$

По [19, гл. 1, теорема 1.4] группа $(K \times Z(G))/Z(G)$ циклическая и, значит, K тоже циклическая. Следовательно, G сверхразрешима; противоречие. Значит, $|\pi(G/K)| = 1$ и G/K — r-группа для некоторого простого числа $r \neq p$. Ясно, что G/K неабелева и $r \mid p-1$. Если $r = q$, то (5) выполнено. Предположим, что $r \neq q$. Тогда $p = q$, поскольку $\pi(G) = \{p, r\}$. Отметим, что $p > r$. Это означает, что $r \notin \pi(M) \cap \pi(N)$. Следовательно, $G = N$ или $G = M$, так как K — силовская

p-подгруппа группы G, содержащаяся в M и в N по (3), и $G = MN$. Получаем, что G сверхразрешима; противоречие. Таким образом, (5) доказано.

Теперь готовы прийти к противоречию, завершающему доказательство.

В (5) показано, что $\pi(G) = \{p, q\}$. Отметим, что K — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $M \cap N$. По условию теоремы $r(K) < q$ и, значит, $|K| < p^q$. В силу (5) и следствия 4.1 в G есть секция H/J, изоморфная одной из групп $E(p, q, 1)$, $M(p, q, n)$, $Q(p, 2)$ и $D(p, 2)$ (если H/J изоморфна $Q(p, 2)$ или $D(p, 2)$, то $q = 2$). Силовские p-подгруппы группы H/K имеют порядок p^q, поэтому $|K| \geq p^q$, так как K — силовская p-подгруппа группы G; противоречие. Теорема доказана. □

Пусть G — группа и $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ — простые числа и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — натуральные числа. Напомним, что G называется *группой с силовской башней*, если в G есть нормальный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$$

такой, что $|G_i/G_{i-1}| = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Следствие 4.5. *Пусть $G = MN$, где M и N — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Пусть q — наименьшее простое число в $\pi(M) \cap \pi(N)$. Если $r(P/\Phi(P)) < q$ для любой силовской подгруппы P группы $M \cap N$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Если $\pi(M) \cap \pi(N) = \varnothing$, то $G = M \times N$ и G сверхразрешима. Значит, можно считать, что $\pi(M) \cap \pi(N) \neq \varnothing$. Отметим, что $M \cap N$ — нормальная подгруппа группы G, обладающая силовской башней, т. е. если $|M \cap N| = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_n$, то в $M \cap N$ есть нормальный ряд

$$1 = A_0 < A_1 < \dots < A_n = M \cap N$$

такой, что $|A_i/A_{i-1}| = p_i^{\beta_i}$, $i = 1, \dots, n$. Поскольку A_i, $i = 0, 1, \dots, n$, — характеристические подгруппы группы $M \cap N$, они нормальны в G.

Предположим, что G несверхразрешима. Тогда существует $1 \leq i \leq n$ такое, что G/A_i сверхразрешима и G/A_{i-1} несверхразрешима. Пусть P_i — силовская p_i-подгруппа группы $M \cap N$. Тогда $A_i/A_{i-1} \simeq P_i$. Пусть $H/A_{i-1} = \Phi(A_i/A_{i-1})$. Ясно, что H нормальна в G и $r(A_i/H) = r(P_i/\Phi(P_i)) < q$. Отметим, что если $\pi(M/H) \cap \pi(N/H) = \varnothing$, то G/H сверхразрешима. С другой стороны, предположим, что $\pi(M/H) \cap \pi(N/H) \neq \varnothing$, и пусть q' — наименьшее простое число в $\pi(M/H) \cap \pi(N/H)$. Тогда $q' \geq q$ и $r(A_i/H) < q'$. Поскольку G/A_i сверхразрешима и $r(A_i/H) < q'$, тройка $(G/H, M/H, N/H)$ удовлетворяет условию теоремы 4.4 по теореме Жордана — Гёльдера, поэтому G/H сверхразрешима. Значит, в любом случае G/H сверхразрешима. Но тогда в силу того, что $H/A_{i-1} = \Phi(A_i/A_{i-1}) \leq \Phi(G/A_{i-1})$ и группа $(G/A_{i-1})/(H/A_{i-1}) \simeq G/H$ сверхразрешима, G/A_{i-1} тоже сверхразрешима; противоречие. Значит, G сверхразрешима. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guo W.* Structure theory for canonical classes of finite groups. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2015.
2. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 115–187.
3. *Friesen D. R.* Products of normal supersolvable subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30, N 1. P. 46–48.

4. *Guo W., Kondrat'ev A. S.* New examples of finite non-supersolvable groups factored by two normal supersoluble subgroups // Inter. Conf. "Mal'tsev meeting" (Nov. 12–16 2012) / Collection of Abstracts. Novosibirsk: Sobolev Inst. Math.; Novosibirsk State Univ., 2012. P. 92.
5. *Guo W., Kondrat'ev A. S.* Finite minimal non-supersolvable groups decomposable into the product of two normal supersolvable subgroups // Commun. Math. Stat. 2015. V. 3, N 2. P. 285–290.
6. *Alejandre M. J., Ballester-Bolinches A., Cossey J.* Permutable products of supersoluble groups // J. Algebra. 2004. V. 276, N 2. P. 453–461.
7. *Arroyo-Jordá M., Arroyo-Jordá P., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D.* On finite products of groups and supersolubility // J. Algebra. 2010. V. 323. P. 2922–2934.
8. *Asaad M., Shaalan A.* On the supersolvability of finite groups // Arch. Math. 1989. V. 53, N 4. P. 318–326.
9. *Ballester-Bolinches A., Pérez-Ramos M. D., Pedraza-Aguilera M. C.* Mutually permutable products of finite groups // J. Algebra. 1999. V. 213, N 1. P. 369–377.
10. *Го В., Скиба А. Н., Шам К. П.* X-перестановочные подгруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 742–759.
11. *Guo W., Skiba A. N.* On quasisupersoluble and p-quasisupersoluble finite groups // Algebra. Colloquium. 2010. V. 17. P. 549–556.
12. *Huppert B.* Monomiale darstellung endlicher gruppen // Nagoya J. Math. 1953. V. 6. P. 93–94.
13. *Nagrebetskii V. T.* On finite minimal non-supersolvable groups // Finite groups. Minsk, 1975. P. 104–108 (Proc. Gomel Sem. 1973/1974).
14. *Казарин Л. С., Корзюков Ю. А.* Конечные разрешимые группы со сверхразрешимыми максимальными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 22–27.
15. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992.
16. *Gorenstein D.* Finite groups. New York; Evanston; London: Harper & Row Publ., 1968.
17. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York: Sci. Press; Kluwer Acad. Publ., 2000.
18. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
19. *Weinstein M. (ed)* Between nilpotent and solvable. Passaic; New York: Polygonal Publ. House, 1982.

Статья поступила 7 января 2016 г.

Xingzheng Tang (Тан Синчжун), Yu Ye (Е Юй), Wenbin Guo (Го Вэньбин)
School of Mathematical Sciences,
University of Science and Technology of China
Hefei, 230026 P.R. China
tangxz@mail.ustc.edu.cn, yeyu@ustc.edu.cn, wbguo@ustc.edu.cn