Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 512.558

О ПОЛУКОЛЬЦАХ, НАД КОТОРЫМИ ВСЕ ПРОСТЫЕ ПОЛУМОДУЛИ ПРОЕКТИВНЫ

С. Н. Ильин

Аннотация. Изучаются полукольца, удовлетворяющие условию проективности всех своих простых полумодулей. Получен ряд результатов о таких полукольцах, в том числе установлено, что для произвольного полукольца S указанное условие влечет инъективность всех простых S-полумодулей, а также показано, что проективность всех простых полумодулей в отличие от кольцевого случая не является, вообще говоря, левоправосимметричным свойством.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.204

Ключевые слова: простой полумодуль, проективный полумодуль, V-полукольцо, V^*-полукольцо.

Сравнительно недавно в [1, 2] был представлен ряд результатов о V-полукольцах, т. е. полукольцах, над которыми все простые полумодули инъективны. Данная статья посвящена полукольцам, обладающим «двойственным» свойством — проективностью всех простых полумодулей; такие полукольца естественно назвать *V^*-полукольцами.* Известно (см., например, [3, п. 7.6]), что в кольцевом случае указанное свойство характеризует классически полупростые кольца, другими словами, верна

Теорема А. *Все простые правые* (*левые*) *модули над кольцом R проективны тогда и только тогда, когда R полупросто.*

В силу теоремы А все полупростые кольца являются V^*-полукольцами, в связи с чем естественный интерес представляют вопросы о том, как сильно различаются классы V^*-полуколец и полупростых колец и в какой мере те или иные результаты о полупростых кольцах можно обобщить на случай V^*-полуколец. Как будет показано ниже, класс V^*-полуколец весьма обширен и тесно связан с классом V-полуколец; исследование V^*-полуколец и их свойств в сравнении со свойствами полупростых колец составляет основную цель данной работы.

1. Предварительные сведения

В данном разделе кратко приводятся используемые в настоящей статье определения и факты о полукольцах и полумодулях (более подробное их изложение можно найти, например, в [4]), а также доказываются некоторые несложные утверждения о V^*-полукольцах.

Под *полукольцом* понимается непустое множество S с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ такое, что $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид,

Работа выполнена за счет финансовых средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету на выполнение гос. задания (код проекта 1.2045.2014).

$(S, \cdot, 1)$ — моноид, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и для всех $x \in S$ верно $0x = x0 = 0$.

Коммутативный моноид $(M, +, 0_M)$ называется *правым полумодулем* над полукольцом S (*правым S-полумодулем*), если задано умножение элементов из M на элементы из S справа, причем $(ms)s' = m(ss')$, $(m + m')s = ms + m's$, $m(s + s') = ms + ms'$, $m1 = m$ и $m0 = 0_M s = 0_M$ для всех $m, m' \in M$, $s, s' \in S$. Аналогично определяются *левые полумодули*. Естественным образом вводятся понятия *подполумодуля*, *гомоморфизма* полумодулей и т. д.; через $\mathscr{M}_S$ обозначается категория всех правых S-полумодулей. Все рассуждения ниже (за исключением утверждений, касающихся лево-правой симметричности исследуемых свойств полуколец) по умолчанию проводятся для правых полумодулей.

Для любого полумодуля M множество $\mathrm{Cong}(M)$ всех конгруэнций на M образует решетку относительно естественного порядка $\leq$, где $\theta_1 \leq \theta_2$, если $m\ \theta_1\ m'$ влечет $m\ \theta_2\ m'$ для всех $m, m' \in M$; ее наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1, очевидно, являются отношение равенства и универсальная конгруэнция соответственно. Полумодуль $M \neq 0$ *прост*, если $\mathrm{Cong}(M) = \{0, 1\}$; легко видеть, что в этом случае любой ненулевой S-гомоморфизм $\psi : M \to N$ инъективен, следовательно, $M \cong \psi(M)$. Стандартными рассуждениями с помощью леммы Цорна нетрудно показать, что любая конгруэнция, отличная от универсальной, на всяком конечно-порожденном (в частности, циклическом) полумодуле $M \neq 0$ не превосходит некоторой максимальной конгруэнции θ; ясно, что при этом фактор-полумодуль M/θ прост.

Полумодуль M называется *свободным*, если для некоторого индексного множества I верно $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$, где $M_i \cong S_S$ для всех $i \in I$. Полумодуль M *инъективен*, если для любого S-полумодуля B и любого подполумодуля $A \subseteq B$ всякий S-гомоморфизм $\varphi : A \to M$ можно продолжить до S-гомоморфизма $\overline{\varphi} : B \to M$. Полумодуль M *проективен*, если для любых S-полумодулей A и B, любого сюръективного S-гомоморфизма $\alpha : A \to B$ и любого S-гомоморфизма $\varphi : M \to B$ существует S-гомоморфизм $\psi : M \to A$ такой, что $\alpha\psi = \varphi$. Проективность полумодуля M равносильна тому, что он является ретрактом некоторого свободного S-полумодуля F [4, предложение 17.16], т. е. существуют S-гомоморфизмы $\alpha : F \to M$ и $\beta : M \to F$ такие, что $\alpha\beta = 1_M$.

Согласно [1] полукольцо S называется *правым* (*левым*) *V-полукольцом*, если каждый простой правый (левый) S-полумодуль инъективен. Назовем S *правым* (*левым*) *V^*-полукольцом*, если каждый простой правый (левый) S-полумодуль проективен. В силу [1, теорема 2.10; 2, следствие 3.2] класс правых V-полуколец замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных прямых произведений. Следующее утверждение показывает, что аналогичными свойствами обладает и класс правых V^*-полуколец.

Предложение 1.1. *Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Гомоморфный образ правого V^*-полукольца есть правое V^*-полукольцо.*

(b) *Прямое произведение конечного числа правых V^*-полуколец есть правое V^*-полукольцо.*

Доказательство. (a) Пусть $\gamma : S \to T$ — сюръективный гомоморфизм полуколец. Тогда любой полумодуль $M \in |\mathscr{M}_T|$ можно рассматривать как правый S-полумодуль, полагая $ms = m\gamma(s)$ для всех $m \in M$, $s \in S$, при этом M прост в категории $\mathscr{M}_S$ ровно тогда, когда он прост в категории $\mathscr{M}_T$. Легко видеть также, что для любых $A, B \in |\mathscr{M}_T|$ всякий T-гомоморфизм $\alpha : A \to B$

является S-гомоморфизмом, и наоборот. Учитывая это, нетрудно понять, что если S есть правое V^*-полукольцо, то проективность каждого простого полумодуля $M \in |\mathscr{M}_T|$ непосредственно вытекает из его проективности в категории $\mathscr{M}_S$, значит, T — правое V^*-полукольцо.

(b) Пусть $S_1, \dots, S_n$ — правые V^*-полукольца и $S = S_1 \times \dots \times S_n$. Вполне очевидно, что всякий S-полумодуль A можно отождествить с набором полумодулей $(A_1, \dots, A_n)$, $A_i \in |\mathscr{M}_{S_i}|$, а всякий S-гомоморфизм $\alpha : A \to B$ — с набором гомоморфизмов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{M}_{S_i}}(A_i, B_i)$, $i = 1, \dots, n$. Ясно также, что если $M \in |\mathscr{M}_S|$ прост, то M при подходящем j является одновременно простым S_j-полумодулем, так что при $i \neq j$ имеем $M_i = 0$ и, следовательно, $\varphi_i = 0$ для любого S-гомоморфизма $\varphi : M \to B$. Если при этом S_j есть правое V^*-полукольцо, то M проективен в категории $\mathscr{M}_{S_j}$, откуда легко выводится его проективность в категории $\mathscr{M}_S$. Таким образом, если $S_1, \dots ,S_n$ — правые V^*-полукольца, то и S — правое V^*-полукольцо. $\square$

Для произвольного полумодуля M зафиксируем обозначения следующих его подполумодулей:

$$V(M) = \{m \in M : m + m' = 0 \text{ для некоторого } m' \in M\},$$

$$I^+(M) = \{m \in M : m + m = m\},$$

$$Z(M) = \{z \in M : z + m = m \text{ для некоторого } m \in M\}.$$

Полумодуль M называется *модулем* (*антинегативным*, *аддитивно-идемпотентным*, *зероидным*), если $V(M) = M$ (соответственно $V(M) = 0$, $I^+(M) = M$, $Z(M) = M$). В частности, полукольцо S *антинегативно* (*аддитивно-идемпотентно*, *зероидно*), если регулярный полумодуль S_S антинегативный (соответственно аддитивно-идемпотентный, зероидный). Также зафиксируем для S следующие обозначения: $I^\times(S) = \{e \in S : e^2 = e\}$, $I(S) = I^+(S) \cap I^\times(S)$.

Каждому подполумодулю $A \subseteq M$ отвечает отношение Бёрна $\equiv_A \in \mathrm{Cong}(M)$, где $m \equiv_A m'$, если $m + a = m' + a'$ для подходящих $a, a' \in A$. Легко видеть, что если A аддитивно-идемпотентен, то соотношение $m \equiv_A m'$ эквивалентно равенству $m + a = m' + a$ при некотором $a \in A$.

Каждому полукольцу S соответствует кольцо $S^\triangle$ (возможно, нулевое), называемое *кольцом разностей* полукольца S, причем $S^\triangle = 0$ ровно тогда, когда S зероидно (см. [4, гл. 8], а также [1]).

Предложение 1.2. *Полукольцо S есть правое V^*-полукольцо ровно тогда, когда $S = R \oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T — зероидное правое V^*-полукольцо.*

Доказательство. Пусть S — правое V^*-полукольцо. С учетом теоремы A достаточно рассмотреть случай, когда S не является кольцом. Зададим на S конгруэнцию Бёрна $\equiv_{V(S)}$. Ввиду предложения 1.1(a) и [5, предложение 1.5] фактор-полукольцо $\overline{S} = S/{\equiv_{V(S)}}$ снова есть правое V^*-полукольцо, причем $V(\overline{S}) = 0$.

Покажем, что $\overline{S}$ зероидно. В самом деле, допустим, что это не так. Тогда кольцо разностей $\overline{S}^\triangle$ ненулевое, следовательно, существует простой $\overline{S}^\triangle$-модуль $M \neq 0$, являющийся одновременно простым $\overline{S}$-модулем (см. [1, замечание 1.3 и следующий за ним абзац]). Так как $\overline{S}$ — правое V^*-полукольцо, M проективен, поэтому для некоторого свободного $\overline{S}$-полумодуля F найдутся $\overline{S}$-гомоморфизмы $\alpha : F \to M$ и $\beta : M \to F$ такие, что $\alpha\beta = 1_M$. Поскольку M — модуль, получаем

$\beta(M) \subseteq V(F) = 0$, так как $V(\overline{S}) = 0$. Но тогда $0 \neq M = \alpha\beta(M) \subseteq \alpha(0) = 0$; противоречие.

Итак, полукольцо $\overline{S}$ зероидно, следовательно, ввиду [1, предложение 2.9] имеем $S = R \oplus T$, где R — кольцо, а T — зероидное полукольцо. В силу предложения 1.1(a) каждое из прямых слагаемых R и T является правым V^*-полукольцом, откуда с учетом теоремы A получаем, что кольцо R полупросто.

Обратно, если R — полупростое кольцо и T — зероидное правое V^*-полукольцо, то $S = R \oplus T$ есть правое V^*-полукольцо ввиду теоремы A и предложения 1.1(b). $\square$

2. V^*- и V-полукольца

Как известно (см., например, [6, следствие 8.2.2(e)]), над полупростыми кольцами все (в частности, все простые) модули инъективны, поэтому всякое полупростое кольцо, очевидно, является V-кольцом. Этот факт в принятых в настоящей статье терминах можно сформулировать следующим образом: *всякое V^*-кольцо есть V-кольцо.* Основной результат данного раздела — теорема 2.10 — показывает, что аналогичное утверждение справедливо и в случае полуколец.

Ясно, что в силу предложения 1.2 изучение V^*-полуколец, по существу, сводится к изучению их «зероидной» части. Как показывает приведенный ниже пример 2.2, класс зероидных V^*-полуколец довольно обширен. Предварительно установим несколько полезных фактов.

Прежде всего заметим, что все полумодули над зероидными полукольцами антинегативны. Действительно, если полукольцо S зероидно, то его кольцо разностей $S^{\triangle}$ нулевое, следовательно, для каждого S-полумодуля M модуль $V(M)$ нулевой.

Далее, для всякого $M \in |\mathscr{M}_S|$ сопоставим каждому элементу $m \in M$ его правый аннулятор $\mathrm{Ann}_r(m) = \{s \in S : ms = 0\}$ и зададим на M отношение σ_M, положив $m \,\sigma_M\, m'$, если $\mathrm{Ann}_r(m) = \mathrm{Ann}_r(m')$. Напомним, что идеал $I \subseteq S$ называется *строгим*, если $a + b \in I$ влечет $a, b \in I$. Легко видеть, что если S антинегативно (в частности, зероидно), то для каждого $m \in M$ правый идеал $\mathrm{Ann}_r(m)$ строгий.

Предложение 2.1. *Пусть S — зероидное полукольцо, $M \in |\mathscr{M}_S|$, $M \neq 0$. Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Если M прост, то он аддитивно-идемпотентен.*

(b) *M прост ровно тогда, когда σ_M — отношение равенства и для любого ненулевого подполумодуля $A \subseteq M$ конгруэнция $\equiv_A$ универсальна.*

(c) *Если M прост, то каждый его ненулевой подполумодуль прост.*

Доказательство. (a) В силу [1, предложение 1.2] каждый простой полумодуль над произвольным полукольцом либо является модулем, либо аддитивно-идемпотентен, но поскольку S зероидно, первый случай для M невозможен.

(b) Пусть M прост. Тогда с учетом антинегативности M конгруэнция σ_M есть отношение равенства ввиду [1, лемма 1.1]. Очевидно также, что для всякого ненулевого подполумодуля $A \subseteq M$ конгруэнция $\equiv_A$ на M отлична от нулевой и, значит, она универсальна в силу того, что M прост.

Обратно, пусть σ_M — отношение равенства и для любого ненулевого подполумодуля $A \subseteq M$ конгруэнция $\equiv_A$ универсальна. Нетрудно видеть, что поскольку M антинегативен, для каждого $m \in M$ верно $(m+m) \,\sigma_M\, m$ и, следовательно, $m + m = m$, так что сложение в M идемпотентно.

Пусть $\theta \in \mathrm{Cong}(M)$ — ненулевая конгруэнция. В частности, для некоторых $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2$, имеем $m_1\ \theta\ m_2$. Так как σ_M — отношение равенства, найдется $x \in S$, аннулирующий ровно один из элементов m_1 и m_2. Для определенности пусть $m_1x = 0$ и $m_2x \neq 0$. Очевидно, m_2xS — ненулевой подполумодуль в M, следовательно, $\equiv_{m_2xS}$ — универсальная конгруэнция на M. В частности, для любого $m \in M$ верно $0 \equiv_{m_2xS} m$, т. е. при подходящем $t \in S$ выполнено равенство $m_2xt = m + m_2xt$. Умножая обе части соотношения $m_1\ \theta\ m_2$ справа на xt, получаем $0 = (m_1xt)\ \theta\ (m_2xt) = m + m_2xt$, откуда с учетом идемпотентности сложения в M выводим $m\ \theta\ (m + m_2xt)\ \theta\ 0$. Таким образом, при любом $m \in M$ верно $m\ \theta\ 0$, т. е. θ — универсальная конгруэнция и, значит, полумодуль M прост.

(c) Очевидно, что для любых подполумодулей $B \subseteq A \subseteq M$ конгруэнции $\sigma_A, \equiv_B \in \mathrm{Cong}(A)$ совпадают с ограничениями на A конгруэнций $\sigma_M, \equiv_B \in \mathrm{Cong}(M)$ соответственно. Поэтому справедливость данного пункта вытекает из п. (b). $\square$

Пример 2.2. Пусть S — произвольное полукольцо, не являющееся кольцом. Нетрудно убедиться в том, что множество $P(S) = \{1 + s, s \in S\} \cup 0$ образует в S антинегативное подполукольцо без делителей нуля. Превратим $P(S)$ в зероидное полукольцо T, присоединив к $P(S)$ элемент $\infty \notin P(S)$ и положив $x + \infty = \infty + x = \infty$ для всех $x \in T$, $0\infty = \infty 0 = 0$ и $x\infty = \infty x = \infty$ при $x \neq 0$.

Легко видеть, что в T есть ровно два строгих правых идеала: 0 и T. В самом деле, если $I \subseteq T$ — ненулевой правый строгий идеал, то $1 + t \in I$ для некоторого $t \in T$, так что $1 \in I$ и, значит, $I = T$. Поскольку для любого простого $M \in |\mathscr{M}_T|$ правый аннулятор каждого $m \in M$ есть правый строгий идеал, ввиду предложения 2.1(b) получаем, что M содержит ровно два элемента, т. е. $M = \{0, m\}$, причем $m + m = m$ и $mt = m$ при любом ненулевом $t \in T$. Следовательно, M изоморфен идеалу $\{0, \infty\} \subset T$, являющемуся, как нетрудно видеть, ретрактом регулярного полумодуля T_T. Таким образом, с точностью до изоморфизма имеется ровно один простой правый T-полумодуль, и он проективен, поэтому T есть правое V^*-полукольцо.

Инъективный S-гомоморфизм $\alpha : M \to N$ называется *существенным*, если для всякого S-гомоморфизма $\beta : N \to N'$ инъективность гомоморфизма $\beta\alpha$ равносильна инъективности β. Подполумодуль $M \subseteq M'$ называется *существенным* в M', если отображение включения M в M' есть существенный гомоморфизм. Говорят также, что M' — *существенное расширение* для M. Известно (см. [4, предложение 17.26]), что существенность M в M' эквивалентна тому, что ограничение произвольной ненулевой конгруэнции $\theta \in \mathrm{Cong}(M')$ на M также есть ненулевая конгруэнция.

Лемма 2.3. *Пусть M — простой полумодуль над зероидным полукольцом и N — существенное расширение для M. Тогда N аддитивно-идемпотентен и σ_N — отношение равенства.*

Доказательство. Согласно [1] отношение $\diamond_N$ на N (где $n_1 \diamond_N n_2$, если для подходящих натуральных $k_1, k_2 \geq 1$ и $x_1, x_2 \in N$ выполнены равенства $k_1n_1 = n_2 + x_2$ и $k_2n_2 = n_1 + x_1$) является конгруэнцией. Ввиду предложения 2.1(a) сложение в M идемпотентно, поэтому для любых $m_1, m_2 \in M$ отношение $m_1 \diamond_N m_2$ влечет $m_1 + m_2 = m_1 + k_2m_2 = m_1 + m_1 + x_1 = m_1 + x_1 = k_2m_2 = m_2$, т. е. $m_1 + m_2 = m_2$ и аналогично $m_1 + m_2 = m_1$. В итоге $m_1 = m_2$, так что ограничение на M конгруэнции $\diamond_N$ есть отношение равенства, а следовательно, в силу существенности расширения N и сама конгруэнция $\diamond_N$ есть отношение равенства, откуда немедленно вытекает, что сложение в N идемпотентно. Аналогично, используя предложение 2.1(b) и существенность N, получаем, что σ_N есть отношение равенства. $\square$

В дополнение к предложению 2.1 отметим, что в отличие от кольцевого случая, когда каждый простой модуль порождается любым своим ненулевым элементом (и, следовательно, является циклическим), простые полумодули над зероидными полукольцами могут быть устроены гораздо сложнее. Это демонстрирует следующий

Пример 2.4. Пусть $\mathbb{B}_2 = \{0, 1\}$ — двухэлементная булева алгебра и $S = \mathbb{B}_2(X, Y)$ — полукольцо многочленов над ней от некоммутирующих переменных X и Y. Обозначим через M цепь натуральных чисел с естественным порядком, дополненную наибольшим элементом ∞, т. е. $M = \{0 < 1 < 2 < \cdots < \infty\}$. Сложение элементов из M определим как взятие их максимума, умножение справа на элементы $X, Y \in S$ зададим следующим образом: $0{\cdot}X = 0{\cdot}Y = 0$, $\infty{\cdot}X = \infty{\cdot}Y = \infty$, если $0 < m < \infty$, то полагаем $m{\cdot}X = m - 1$ и $m{\cdot}Y = \infty$; умножение элементов из M на произвольные многочлены из S естественным образом доопределяется с учетом законов ассоциативности и дистрибутивности.

Нетрудно видеть, что введенные операции задают на M структуру правого S-полумодуля. Покажем, что M прост. В самом деле, пусть θ — ненулевая конгруэнция на M, т. е. найдутся $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2$, такие, что $m_1\ \theta\ m_2$. Для определенности пусть $m_1 < m_2$. Тогда $m_1 < \infty$, поэтому $0 = (m_1 X^{m_1} Y)\ \theta\ (m_2 X^{m_1} Y) = \infty$, т. е. $0\ \theta\ \infty$. Прибавляя к обеим частям последнего соотношения произвольный элемент $m \in M$, получаем $m\ \theta\ \infty$, следовательно, конгруэнция θ универсальна.

Для произвольного $m \in M$, $m \neq 0$, рассмотрим циклический подполумодуль mS. Легко убедиться в том, что $\infty S = \{0, \infty\}$, а если $0 < m < \infty$, то $mS = \{0, 1, \ldots, m, \infty\}$. Таким образом, все ненулевые циклические подполумодули в M конечны и образуют бесконечную строго возрастающую цепь простых подполумодулей $\infty S \subset 1{\cdot}S \subset 2{\cdot}S \ldots$, объединением элементов которой является простой полумодуль M. Нетрудно понять, что для любого конечного подмножества $\{m_1, \ldots, m_k\} \subset M$ найдется $m \in M$ такой, что $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \subseteq mS \subset M$. Следовательно, построенный простой полумодуль M не является не только циклическим, но даже конечно-порожденным.

Согласно примеру 2.4 над зероидными полукольцами в общем случае могут существовать простые полумодули, не являющиеся циклическими. Однако, как будет показано ниже, подобная ситуация невозможна для зероидных V^*-полуколец. Предварительно докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2.5. *Пусть $A, B \in |\mathscr{M}_S|$ и $\alpha : A \to B$ — S-гомоморфизм такой, что $\alpha(a) \neq 0$ при $a \neq 0$. Тогда для каждого $a \in A$ верно $\operatorname{Ann}_r(a) = \operatorname{Ann}_r(\alpha(a))$.*

Доказательство. Для всех $a \in A$ и $s \in S$ имеем $s \in \operatorname{Ann}_r(a) \Leftrightarrow as = 0 \Leftrightarrow \alpha(as) = 0 \Leftrightarrow \alpha(a)s = 0 \Leftrightarrow s \in \operatorname{Ann}_r(\alpha(a))$. $\square$

Очевидно, любой циклический полумодуль mS есть образ регулярного полумодуля S_S относительно гомоморфизма $\alpha_m : S \ni s \mapsto ms \in mS$. Нетрудно также показать, что mS проективен ровно тогда, когда $mS \cong eS$ при некотором $e \in I^{\times}(S)$. В самом деле, если $e \in I^{\times}(S)$, то eS проективен как ретракт S_S.

Обратно, если mS проективен, то найдется S-гомоморфизм $\psi : mS \to S$ такой, что $\alpha_m\psi = 1_{mS}$. Положим $e = \psi(m)$. Тогда $m = (\alpha_m\psi)(m) = \alpha_m(e) = me$ и $e = \psi(m) = \psi(me) = \psi(m)e = e^2$, так что $e \in I^{\times}(S)$. Ясно, что ψ — инъекция, поэтому $mS \cong \psi(mS) = eS$. В частности, если S зероидно и mS прост, то с учетом предложения 2.1(a) имеем $e \in I^{+}(S) \cap I^{\times}(S) = I(S)$. Тем самым верна

Лемма 2.6. *Пусть $\psi : mS \to S$ — S-гомоморфизм такой, что $\alpha_m\psi = 1_{mS}$ и $e = \psi(m)$. Тогда $e \in I^{\times}(S)$; в частности, если S зероидно и mS прост, то $e \in I(S)$.*

Лемма 2.7. *Пусть $M \in |\mathscr{M}_S|$ аддитивно-идемпотентен, $m, m' \in M$, причем σ_M — отношение равенства. Если найдутся $e, s \in S$ такие, что $m' + ms = ms$, $m'e = m'$ и $\mathrm{Ann}_r(m') = \mathrm{Ann}_r(e)$, то $m'S \subseteq mS$.*

Доказательство. Легко видеть, что идемпотентность сложения в M влечет включение $\mathrm{Ann}_r(m_1 + m_2) \subseteq \mathrm{Ann}_r(m_1)$ для всех $m_1, m_2 \in M$. Учитывая это, имеем цепочку включений $\mathrm{Ann}_r(mse) = \mathrm{Ann}_r(m'e + mse) \subseteq \mathrm{Ann}_r(m'e) = \mathrm{Ann}_r(m') = \mathrm{Ann}_r(e) \subseteq \mathrm{Ann}_r(mse)$, из которой вытекает, что $\mathrm{Ann}_r(mse) = \mathrm{Ann}_r(m')$, т. е. $(mse)\ \sigma_M\ m'$. Тогда $m' = mse \in mS$ и, следовательно, $m'S \subseteq mS$. $\square$

Предложение 2.8. *Если все простые циклические правые полумодули над зероидным полукольцом S проективны, то каждый простой правый S-полумодуль порождается любым своим ненулевым элементом.*

Доказательство. Пусть $M \in |\mathscr{M}_S|$ прост, $m \in M$, $m \neq 0$. Тогда в силу пп. (a), (b) предложения 2.1 сложение в M идемпотентно, σ_M — отношение равенства и $\equiv_{mS}$ — универсальная конгруэнция. В частности, для любого $m' \in M$ выполнено соотношение $m' \equiv_{mS} 0$, т. е. при некотором $s \in S$ верно $m' + ms = ms$. Если $m' \neq 0$, то в силу предложения 2.1(c) циклический подполумодуль $m'S \subseteq M$ прост и, значит, проективен. Следовательно, найдется S-гомоморфизм $\psi : m'S \to S$ такой, что $\alpha_{m'}\psi = 1_{m'S}$, причем $\psi(m') \in I(S)$ ввиду леммы 2.6. Полагая $e = \psi(m')$, выводим $m'e = m'$ и в силу леммы 2.5 $\mathrm{Ann}_r(m') = \mathrm{Ann}_r(e)$; применяя лемму 2.7, получаем $m'S \subseteq mS$. Последнее ввиду произвольности $m' \in M$ влечет $M = mS$. $\square$

Из предложений 2.8 и 2.1(b) непосредственно вытекает

Следствие 2.9. *Полумодуль $M \neq 0$ над зероидным правым V^*-полукольцом прост ровно тогда, когда σ_M — отношение равенства и M порождается любым своим ненулевым элементом.*

Докажем основной результат данного раздела, устанавливающий связь V^*-полуколец с V-полукольцами.

Теорема 2.10. *Всякое правое V^*-полукольцо является правым V-полукольцом.*

Доказательство. Пусть S — правое V^*-полукольцо. Ввиду предложения 1.2 имеем $S = R \oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T — зероидное правое V^*-полукольцо. Очевидно, достаточно показать, что T есть правое V-полукольцо; последнее в силу [1, теорема 2.10] равносильно тому, что всякое существенное расширение любого простого правого T-полумодуля M совпадает с M.

Итак, пусть $M \in |\mathscr{M}_T|$ прост и N — существенное расширение для M. Фиксируем $m \in M$, $m \neq 0$. Поскольку T — зероидное правое V^*-полукольцо, в силу следствия 2.9 имеем $M = mT$, а так как M проективен, с учетом лемм 2.5 и 2.6 найдется $e \in I(T)$ такой, что $m = me$ и $\mathrm{Ann}_r(m) = \mathrm{Ann}_r(e)$.

Далее, если $n \in N$, $n \neq 0$, то $\equiv_{nT}$ — ненулевая конгруэнция на N, поэтому ее ограничение на M также является ненулевой и, значит, универсальной конгруэнцией в силу простоты M. По лемме 2.3 полумодуль N аддитивно-идемпотентен, следовательно, соотношение $m \equiv_{nT} 0$ влечет равенство $m + nt = nt$ для подходящего $nt \in nT$. Таким образом, для полумодуля N и элементов $m, n \in N$, $e, t \in T$ выполнены условия леммы 2.7, согласно которой получаем $M = mT \subseteq nT$. Следовательно, M содержится в каждом ненулевом подполумодуле полумодуля N.

Зададим на N конгруэнцию Бёрна $\equiv_M$. Очевидно, имеется ровно два случая.

Случай 1. Конгруэнция $\equiv_M$ универсальна. Тогда универсальна и любая конгруэнция $\equiv_A \in \mathrm{Cong}(N)$, где $A \subseteq N$ — произвольный ненулевой подполумодуль; кроме того, σ_N есть отношение равенства по лемме 2.3. Значит, в силу предложения 2.1(b) N прост и по следствию 2.9 порождается любым своим ненулевым элементом; последнее, очевидно, равносильно тому, что N не содержит ненулевых собственных подполумодулей. Так как $0 \neq M \subseteq N$, то $M = N$, что и требовалось.

Случай 2. Конгруэнция $\equiv_M$ не является универсальной. Тогда найдется $n \in N$, для которого соотношение $n \equiv_M 0$ не выполняется. В частности, $n \notin M$ и поэтому $M \subset nT$; ясно, что конгруэнция $\equiv_M$ на подполумодуле $nT \subseteq N$ также не является универсальной. Поскольку nT циклический, для некоторой максимальной конгруэнции $\theta \in \mathrm{Cong}(nT)$ верно $\equiv_M \leq \theta$.

Положим $M' = nT/\theta$. Очевидно, что M' прост и, значит, проективен, поэтому для естественной сюръекции $\alpha : nT \to M'$ найдется T-гомоморфизм $\psi : M' \to nT$ такой, что $\alpha\psi = 1_{M'}$, откуда получаем $\psi(M') \cong M'$ и, значит, $\psi(M')$ прост.

Обозначим элемент $\alpha(n) \in M'$ через m'. Ясно, что $\psi(m') \in N$ и $\psi(m') \neq 0$, следовательно, $M \subseteq \psi(m')T \subseteq \psi(M')$, что ввиду простоты $\psi(M')$ и следствия 2.9 влечет $M = \psi(M')$. Поскольку $\equiv_M \leq \theta$, имеем $0 \neq M' = \alpha\psi(M') = \alpha(M) = 0$; противоречие.

Таким образом, случай 2 невозможен, а в случае 1 требуемое утверждение уже доказано. $\square$

3. Структурные свойства зероидных V^*-полуколец

Пусть S — зероидное правое V^*-полукольцо и $\chi : S \to S/\sigma_S$ — естественная сюръекция. Ввиду леммы 2.6 и следствия 2.9 всякий простой правый S-полумодуль изоморфен циклическому полумодулю eS при подходящем $e \in I(S)$. Положим $E(S) = \{e \in I(S) : eS \text{ прост}\}$.

Лемма 3.1. *Для каждого $e \in E(S)$ ограничение χ на eS — единственный ненулевой S-гомоморфизм из eS в S/σ_S, при этом $eS \cong \chi(eS)$.*

Доказательство. Обозначим S/σ_S через $\overline{S}$. Очевидно, $\sigma_{\overline{S}}$ — отношение равенства и $\chi|_{eS}$ — ненулевой S-гомоморфизм. Поскольку eS прост, всякий ненулевой S-гомоморфизм $\alpha : eS \to \overline{S}$ инъективен, следовательно, по лемме 2.5 для любого $x \in eS$ имеем $\mathrm{Ann}_r(\alpha(x)) = \mathrm{Ann}_r(x) = \mathrm{Ann}_r(\chi(x))$. Тем самым для каждого $x \in eS$ верно $\alpha(x)\ \sigma_{\overline{S}}\ \chi(x)$, что влечет $\alpha(x) = \chi(x)$ и, значит, $\alpha = \chi|_{eS}$. $\square$

Согласно [4, гл. 15] элемент $w \in M$ называется *бесконечным*, если $m+w = w$ при любом $m \in M$; очевидно, всякий полумодуль содержит не более одного бесконечного элемента. Ясно также, что каждый полумодуль с бесконечным элементом зероидный и что обратное утверждение в общем случае неверно, в чем легко убедиться на примере зероидного полукольца $(\mathbb{N}, \max, \cdot)$, рассматриваемого как полумодуль над самим собой.

Лемма 3.2. *Каждый простой правый полумодуль над зероидным правым V^*-полукольцом содержит бесконечный элемент.*

Доказательство. Согласно [5, предложение 1.7] каждый инъективный полумодуль над антинегативным полукольцом содержит бесконечный элемент. Осталось заметить, что всякое зероидное полукольцо антинегативно, а если оно при этом является правым V^*-полукольцом, то все простые правые полумодули над ним инъективны в силу теоремы 2.10. $\square$

Для каждого $e \in E(S)$ обозначим через $\omega(e)$ бесконечный элемент полумодуля eS, существующий в силу леммы 3.2. Ясно, что $\omega(e) \neq 0$, поэтому $eS = \omega(e)S$.

Предложение 3.3. *Для всех $e, e' \in E(S)$ верны следующие утверждения:*
(a) *если $x \in eS$, $x' \in e'S$, $x, x' \neq 0$ и $x \ \sigma_S \ x'$, то $eS \cong e'S$;*
(b) $\omega(e)\omega(e') = \begin{cases} \omega(e) & \text{при } eS \cong e'S, \\ 0 & \text{при } eS \ncong e'S; \end{cases}$
(c) *если $eS \cong e'S$, то $(\omega(e) + \omega(e'))S \cong \omega(e)S$.*

Доказательство. (a) Так как $e \in E(S)$, $x \in eS$ и $x \neq 0$, то $eS = xS$; аналогично $e'S = x'S$. Ввиду соотношения $x \ \sigma_S \ x'$ имеем $\chi(x) = \chi(x')$, что с учетом леммы 3.1 влечет $eS \cong \chi(eS) = \chi(xS) = \chi(x)S = \chi(x')S = \chi(x'S) = \chi(e'S) \cong e'S$.

(b) Прежде всего заметим, что $\omega(f)^2 \neq 0$ при любом $f \in E(S)$, поскольку иначе из равенств $f + \omega(f) = \omega(f)$ и $\omega(f)^2 = 0$ вытекает $f = 0$.

Пусть $\omega(e)\omega(e') \neq 0$. Тогда $\omega(e)\omega(e')$ порождает $\omega(e)S$, значит, $\omega(e) = \omega(e)\omega(e')s$ при подходящем $s \in S$. Поскольку $\omega(e)$ и $\omega(e')$ — бесконечные элементы в eS и $e'S$ соответственно, имеем $\omega(e) = \omega(e)\omega(e') + \omega(e) = \omega(e)(\omega(e') + \omega(e')s) = \omega(e)\omega(e')$, т. е. $\omega(e) = \omega(e)\omega(e')$. Умножая последнее равенство справа на $\omega(e)$ и учитывая, что $\omega(e)^2 \neq 0$, выводим $\omega(e')\omega(e) \neq 0$; проводя для $\omega(e')\omega(e)$ аналогичные выкладки, получаем $\omega(e') = \omega(e')\omega(e)$. Очевидно, из равенств $\omega(e) = \omega(e)\omega(e')$ и $\omega(e') = \omega(e')\omega(e)$ вытекает соотношение $\omega(e) \ \sigma_S \ \omega(e')$, так что в силу п. (a) имеем $eS \cong e'S$. Таким образом, если $\omega(e)\omega(e') \neq 0$, то $eS \cong e'S$, при этом $\omega(e)\omega(e') = \omega(e)$.

Обратно, пусть $eS \cong e'S$. Очевидно, при изоморфизме полумодулей бесконечный элемент отображается в бесконечный, поэтому ввиду леммы 2.5 правые аннуляторы элементов $\omega(e)$ и $\omega(e')$ совпадают, а поскольку $\omega(e')^2 \neq 0$, то и $\omega(e)\omega(e') \neq 0$.

Итак, $\omega(e)\omega(e') \neq 0$ равносильно $eS \cong e'S$, тем самым $\omega(e)\omega(e') = 0$ при $eS \ncong e'S$.

(c) Положим $u = \omega(e)$, $u' = \omega(e')$ и $w = u + u'$; тогда $eS = uS$, $e'S = u'S$. Легко видеть, что отображение $uS \ni us \mapsto u's \in u'S$ является изоморфизмом. Следовательно, в силу простоты uS изоморфизмом является и отображение $uS \ni us \mapsto ws \in wS$. $\square$

Напомним, что в силу теоремы A для всякого кольца R условие «быть V^*-кольцом» равносильно тому, что регулярный модуль R_R полупрост или, эквивалентно, существуют взаимно ортогональные идемпотенты $e_1, \dots, e_k \in R$ такие, что $1 = e_1 + \dots + e_k$ и все модули e_1R, …, e_kR просты. Нетрудно заметить определенные «параллели» между этими фактами и следующим результатом о зероидных V^*-полукольцах.

Теорема 3.4. *Зероидное полукольцо S является правым V^*-полукольцом ровно тогда, когда существуют взаимно ортогональные идемпотенты $z_1, \dots, z_k \in I(S)$ такие, что*

1) *$z_1 + \dots + z_k$ — бесконечный элемент для S,*

2) *все простые правые S-полумодули с точностью до изоморфизма исчерпываются попарно не изоморфными друг другу простыми полумодулями z_1S, …, z_kS.*

Доказательство. Пусть S — правое V^*-полукольцо. Рассмотрим правый идеал $A = \sum\limits_{e \in E(S)} eS \subseteq S$. Ясно, что $A \subseteq I^+(S)$, поскольку $E(S) \subseteq I(S)$. Покажем, что конгруэнция $\equiv_A \in \mathrm{Cong}(S_S)$ универсальна. В самом деле, допустим, что это не так. Тогда по аналогии с рассуждениями, приведенными в доказательстве теоремы 2.10 (случай 2), конгруэнция $\equiv_A$ не превосходит некоторой максимальной конгруэнции $\theta \in \mathrm{Cong}(S_S)$, фактор-полумодуль $M' = S/\theta$ прост и для естественной сюръекции $\alpha : S \to M'$ найдется S-гомоморфизм $\psi : M' \to S$ такой, что $\alpha\psi = 1_{M'}$. С учетом леммы 2.6 и следствия 2.9 получаем $M' \cong \psi(M') = eS$ при подходящем $e \in I(S)$, а так как M' прост, то $e \in E(S)$ и, значит, $\psi(M') \subseteq A$. Но тогда $0 \neq M' = \alpha\psi(M') \subseteq \alpha(A) = 0$; противоречие.

Итак, $\equiv_A$ — универсальная конгруэнция. В частности, верно соотношение $1 \equiv_A 0$, что с учетом идемпотентности сложения в A влечет $1 + a = a$ при подходящем $a \in A$. Отметим, что $a = e_1s_1 + \dots + e_ns_n$ для некоторых $e_1, \dots, e_n \in E(S)$, $s_1, \dots, s_n \in S$, тем самым $a \in e_1S + \dots + e_nS = a_1S + \dots + a_nS$, где $a_i = \omega(e_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Положим $z = a_1 + \dots + a_n$. Ясно, что $x + z = z$ для каждого $x \in a_1S + \dots + a_nS$. В частности, $as \in a_1S + \dots + a_nS$ при любом $s \in S$, поэтому $as + z = z$ и, значит, $s + z = s + as + z = (1 + a)s + z = as + z = z$, так что z — бесконечный элемент для S. Разобьем множество индексов $I = \{1, 2, \dots, n\}$ на подмножества I_1, …, I_k, считая, что i, j лежат в одном подмножестве ровно тогда, когда $a_iS \cong a_jS$, и положим $z_j = \sum\limits_{i \in I_j} a_i$, $j = 1, \dots, k$. Тогда с учетом предложения 3.3 для каждого $i = 1, \dots, k$ получаем, что полумодуль z_iS прост, $z_i \in I(S)$ — бесконечный элемент для z_iS, $z_iz_j = 0$ при $i \neq j$ и $z = z_1 + \dots + z_k$.

Пусть M — произвольный простой правый S-полумодуль. Тогда для некоторого $e \in E(S)$ верно $M \cong eS$, и поскольку $eS = \omega(e)S$, без ограничения общности можно считать, что $e = \omega(e)$. Так как z — бесконечный элемент для S, то $1 + z = z$, поэтому $ez \neq 0$ и, значит, $ez_i \neq 0$ для некоторого i. Последнее ввиду предложения 3.3(b) влечет $eS \cong z_iS$, так что $M \cong z_iS$. Таким образом, все простые правые S-полумодули с точностью до изоморфизма исчерпываются полумодулями z_1S, …, z_kS; отсутствие среди последних изоморфных друг другу полумодулей с учетом взаимной ортогональности элементов $z_1, \dots, z_k$ вытекает из упомянутого предложения 3.3(b).

Обратно, поскольку для каждого $e \in I^\times(S)$ полумодуль eS проективен, всякое полукольцо, удовлетворяющее условию 2, является правым V^*-полукольцом. $\square$

Легко видеть, что если в полукольце S есть бесконечный элемент z и полумодуль $M \in |\mathscr{M}_S|$ порожден элементами $m_1, \ldots, m_n$, то $m_1 z + \cdots + m_n z$ — бесконечный элемент для M. Поэтому с учетом теоремы 3.4 справедливо

Следствие 3.5. *Если S — зероидное правое V^*-полукольцо, то каждый конечно-порожденный S-полумодуль обладает бесконечным элементом.*

Согласно классической теореме Веддерберна — Артина всякое полупростое кольцо изоморфно прямой сумме конечного числа полных матричных колец над телами; легко видеть, что при этом каждое из упомянутых прямых слагаемых обладает с точностью до изоморфизма ровно одним простым правым модулем. С учетом примера 2.2 говорить о столь же ясном структурном описании зероидных V^*-полуколец в общем случае не приходится, тем не менее, как показывает следующий результат, некоторые аналогии имеются и в этом случае, а именно вопрос о том, является ли зероидное полукольцо правым V^*-полукольцом, достаточно решить для конечного числа его фактор-полуколец, каждое из которых обладает с точностью до изоморфизма ровно одним простым правым полумодулем.

Для всякого $M \in |\mathscr{M}_S|$ зададим на M отношение $\preceq_M$, полагая $m \preceq_M m'$, если $m' = m + x$ для некоторого $x \in M$. Легко видеть, что $\preceq_M$ есть отношение квазипорядка, стабильное относительно сложения и умножения на элементы из S.

Предложение 3.6. *Пусть S — полукольцо и $W = \{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq I(S)$ — набор ненулевых взаимно ортогональных идемпотентов таких, что $w_1 + \cdots + w_n$ — бесконечный элемент для S. Справедливы следующие утверждения.*

(a) *для каждого $j = 1, \ldots, n$ множество $I_j = \bigl\{s \in S : s \preceq_S \sum\limits_{i \neq j} w_i\bigr\}$ есть строгий двусторонний идеал в S;*

(b) *S — правое V^*-полукольцо ровно тогда, когда $\overline{S}_j = S/{\equiv_{I_j}}$ — правое V^*-полукольцо для всех $j = 1, \ldots, n$;*

(c) *если S — правое V^*-полукольцо и W состоит из взаимно ортогональных идемпотентов $z_1, \ldots, z_k$, указанных в формулировке теоремы 3.4, то каждое фактор-полукольцо $\overline{S}_j$, $j = 1, \ldots, k$, обладает с точностью до изоморфизма ровно одним простым правым полумодулем.*

Доказательство. (a) Обозначим $w_1 + \cdots + w_n$ через z и фиксируем j, $1 \leq j \leq n$. Ясно, что S зероидно и $w_j z$ — бесконечный элемент для $w_j S$, при этом $w_j z = w_j$ ввиду взаимной ортогональности элементов $w_1, \ldots, w_n \in I(S)$.

Покажем, что $I_j = \mathrm{Ann}_r(w_j)$. Если $s \in I_j$, то для некоторого $x \in S$ верно $s + x = \sum\limits_{i \neq j} w_i$, так что $0 = w_j\bigl(\sum\limits_{i \neq j} w_i\bigr) = w_j(s + x) = w_j s + w_j x$, откуда выводим $w_j s = 0$. Тем самым $s \in \mathrm{Ann}_r(w_j)$ и, значит, верно включение $I_j \subseteq \mathrm{Ann}_r(w_j)$. Обратно, пусть $w_j s = 0$. Очевидно, $1 \preceq_S z$, поэтому

$$s \preceq_S zs = \Bigl(\sum_i w_i\Bigr)s = \sum_{i \neq j} w_i s \preceq_S \sum_{i \neq j} w_i,$$

следовательно, $s \in I_j$, т. е. верно обратное включение $\mathrm{Ann}_r(w_j) \subseteq I_j$.

Наконец, заметим, что поскольку w_j — бесконечный элемент для $w_j S$, справедливо равенство $\mathrm{Ann}_r(w_j) = \mathrm{Ann}_r(w_j S)$. Таким образом, $I_j = \mathrm{Ann}_r(w_j S)$, откуда непосредственно вытекает, что I_j — строгий двусторонний идеал.

(b) Если S — правое V^*-полукольцо, то $\overline{S}_j$ — правое V^*-полукольцо при любом $j = 1, \ldots, n$ ввиду предложения 1.1(a), так что требуется лишь установить справедливость обратного утверждения. Для этого с учетом предложения 2.8 достаточно показать, что любой простой циклический полумодуль $mS \in |\mathscr{M}_S|$ проективен.

Как и в п. (a), положим $z = w_1 + \cdots + w_n$. Очевидно, $mw_1 + \cdots + mw_n = mz \neq 0$, значит, $mw_j \neq 0$ при некотором j. Тогда ввиду предложения 2.1(b) конгруэнция $\equiv_{mw_jS}$ на mS универсальна, поэтому при любом $i = 1, \ldots, n$ верно $0 \equiv_{mw_jS} mw_i$, что с учетом бесконечности элемента mw_j для mw_jS влечет $mw_j = mw_i + mw_j$. Умножая последнее равенство справа на w_i, $i \neq j$, получаем $0 = mw_i$, так что $mz = mw_j$ и, следовательно, $\mathrm{Ann}_r(mS) = \mathrm{Ann}_r(mz) = \mathrm{Ann}_r(mw_j) \supseteq I_j$.

Легко видеть, что доказанное включение $I_j \subseteq \mathrm{Ann}_r(mS)$ влечет справедливость для всех $s, s' \in S$, $m' \in mS$ импликации $s \equiv_{I_j} s' \Rightarrow m's = m's'$ (т. е. в терминологии из [5] *согласованность* всех элементов полумодуля mS с конгруэнцией $\equiv_{I_j}$). Это позволяет в силу [5, предложение 1.2] одновременно рассматривать mS как $\overline{S}_j$-полумодуль, полагая $m'\bar{s} = m's$, где $S \ni s \mapsto \bar{s} \in \overline{S}_j$ — естественная сюръекция. Ясно, что из простоты полумодуля mS в категории $\mathscr{M}_S$ вытекает, что он прост как $\overline{S}_j$-полумодуль, откуда, учитывая, что $\overline{S}_j$ — правое V^*-полукольцо, получаем $mS = m\overline{S}_j \cong \bar{e}\overline{S}_j$ для некоторого $\bar{e} \in E(\overline{S}_j)$.

Заметим, что $\omega(\bar{e})^2 = \omega(\bar{e})$ в силу предложения 3.3(b), поэтому с учетом следствия 2.9 можно считать, что $\bar{e} = \omega(\bar{e})$, т. е. $\bar{e} = \bar{e}\overline{w}_j$. Так как $\bar{e}^2 = \bar{e}$, в S выполнено соотношение $(ew_j)^2 \equiv_{I_j} (ew_j)$ или, эквивалентно, $(ew_j)^2 + \sum\limits_{i \neq j} w_i = ew_j + \sum\limits_{i \neq j} w_i$. Умножая последнее равенство на w_j справа, выводим $(ew_j)^2 = ew_j$, так что $ew_j \in I(S)$ и, значит, S-полумодуль ew_jS проективен.

Легко видеть, что $I_j \subseteq \mathrm{Ann}_r(ew_jS)$, значит, ew_jS является одновременно $\overline{S}_j$-полумодулем. Покажем, что отображение $\alpha : ew_j\overline{S}_j \ni ew_j\bar{s} \mapsto \bar{e}\overline{w}_j\bar{s} \in \bar{e}\overline{w}_j\overline{S}_j$ есть $\overline{S}_j$-изоморфизм. Действительно, если для некоторых $\bar{s}, \bar{s}' \in \overline{S}_j$ верно $ew_j\bar{s} = ew_j\bar{s}'$, то $ew_js = ew_js'$ и, следовательно, $\bar{e}\overline{w}_j\bar{s} = \bar{e}\overline{w}_j\bar{s}'$, тем самым отображение α определено корректно. То, что α есть сюръективный $\overline{S}_j$-гомоморфизм, вытекает непосредственно из способа задания α. Наконец, если $\alpha(ew_j\bar{s}) = \alpha(ew_j\bar{s}')$, то $ew_js \equiv_{I_j} ew_js'$ или, эквивалентно, $ew_js + \sum\limits_{i \neq j} w_i = ew_js' + \sum\limits_{i \neq j} w_i$. Умножая последнее равенство слева на ew_j, получаем $ew_js = ew_js'$, т. е. $ew_j\bar{s} = ew_j\bar{s}'$.

Итак, в категории $\mathscr{M}_{\overline{S}_j}$ имеем $ew_jS = ew_j\overline{S}_j \cong \bar{e}\overline{w}_j\overline{S}_j \cong m\overline{S}_j = mS$. Вполне очевидно, что изоморфность полумодулей ew_jS и mS в категории $\mathscr{M}_{\overline{S}_j}$ равносильна их изоморфности в категории $\mathscr{M}_S$, а поскольку ew_jS проективен как S-полумодуль, проективен и mS.

(c) Фиксируем j, $1 \leq j \leq k$, и рассмотрим произвольный простой правый $\overline{S}_j$-полумодуль M. Тогда M является одновременно простым правым S-полумодулем; ясно, что при этом $z_j \notin \mathrm{Ann}_r(M)$. В силу теоремы 3.4 найдется единственный индекс i такой, что $M \cong z_iS$ в категории $\mathscr{M}_S$, следовательно, $\mathrm{Ann}_r(M) = \mathrm{Ann}_r(z_iS)$. Таким образом, имеем $z_j \notin \mathrm{Ann}_r(z_iS)$, что, очевидно, возможно только при $i = j$. Итак, любой простой правый $\overline{S}_j$-полумодуль изоморфен z_jS в категории $\mathscr{M}_S$, следовательно, в категории $\mathscr{M}_{\overline{S}_j}$ все простые полумодули изоморфны друг другу. $\square$

4. Правые и левые V^*-полукольца

Напомним, что в силу теоремы A для любого кольца R проективность всех простых правых R-модулей эквивалентна проективности всех простых левых R-модулей. Представленные в данном разделе результаты показывают, что в полукольцевом случае при некоторых дополнительных ограничениях (например, если полукольцо конечно) аналогичное утверждение также справедливо. Однако для произвольных полуколец проективность всех простых полумодулей не является, вообще говоря, левоправосимметричным свойством.

Заметим, что с учетом предложения 3.6 и его левостороннего аналога вопрос о том, является ли некоторое зероидное правое V^*-полукольцо левым V^*-полукольцом, достаточно исследовать для полуколец, обладающих с точностью до изоморфизма ровно одним простым правым полумодулем. Согласно теореме 3.4 каждое такое полукольцо S содержит бесконечный элемент z, при этом полумодуль zS прост, так что ввиду следствия 2.9 при любом ненулевом $x \in S$ верно $zxz = z$.

Для всякого полукольца S обозначим через $\mathrm{rsid}(S)$ ($\mathrm{lsid}(S)$) множество всех правых (соответственно левых) строгих идеалов в S и упорядочим его по включению. Ясно, что наибольшим элементом в $\mathrm{rsid}(S)$ является само полукольцо S и что пересечение любого набора строгих правых идеалов снова есть строгий правый идеал, поэтому $\mathrm{rsid}(S)$ есть полная решетка (см., например, [7, теорема 1]). Для любых $I, J \in \mathrm{rsid}(S)$ обозначим через $I \vee J$ их точную верхнюю грань в $\mathrm{rsid}(S)$ и для каждого $a \in S$ положим $a^\nabla = \{s \in S : s \preceq_S a\}$.

Лемма 4.1. *Для любого полукольца S с бесконечным элементом z справедливы следующие утверждения:*

(a) *соответствие $a \mapsto a^\nabla$ инъективно отображает Sz в $\mathrm{rsid}(S)$;*

(b) *для каждого $I \in \mathrm{rsid}(S)$ верно $I = \bigvee\limits_{a \in Sz \cap I} a^\nabla$;*

(c) *если $a, b \in Sz$, то $a^\nabla \vee b^\nabla = (a+b)^\nabla$.*

Доказательство. (a) Пусть $a \in Sz$. Очевидно, что $a \in a^\nabla$. Поскольку $Sz \subseteq I^+(S)$, $z^2 = z$ и $s \preceq_S z$ для всех $s \in S$, имеем $x, y \in a^\nabla \Rightarrow x + y \preceq_S a + a = a$ и $xs \preceq_S as \preceq_S az = a$, значит, a^∇ — правый идеал. Если $x + y \in a^\nabla$, то $x \preceq_S x + y \preceq_S a$ и аналогично $y \preceq_S a$, так что идеал a^∇ строгий.

Пусть $a, b \in Sz$ и $a^\nabla = b^\nabla$. Тогда $a \preceq_S b$, поэтому для подходящего $x \in S$ имеем $b = a + x = a + a + x = a + b$; аналогично $b = a + b$ и в итоге $a = b$.

(b) Пусть $I \in \mathrm{rsid}(S)$. Ясно, что для каждого $a \in I$ верно включение $a^\nabla \subseteq I$, следовательно, $\bigvee\limits_{a \in Sz \cap I} a^\nabla \subseteq I$. Обратно, если $x \in I$, то $xz \in Sz \cap I$ и $x \preceq_S xz$, значит, $x \in (xz)^\nabla \subseteq \bigvee\limits_{a \in Sz \cap I} a^\nabla$.

(c) Очевидно, $a^\nabla, b^\nabla \subseteq (a+b)^\nabla$, поэтому $a^\nabla \vee b^\nabla \subseteq (a+b)^\nabla$. Обратно, так как $a^\nabla \vee b^\nabla$ — строгий идеал, содержащий элементы a и b, то $a + b \in a^\nabla \vee b^\nabla$ и, следовательно, $(a+b)^\nabla \subseteq a^\nabla \vee b^\nabla$. $\square$

Как отмечено выше, если $M \in |\mathscr{M}_S|$ и $m \in M$, то $\mathrm{Ann}_r(m)$ — правый строгий идеал в S, т. е. $\mathrm{Ann}_r(m) \in \mathrm{rsid}(S)$. Заметим, что в силу предложения 2.1(b) в случае, когда M прост, отображение $M \ni m \mapsto \mathrm{Ann}_r(m) \in \mathrm{rsid}(S)$ инъективно.

Предложение 4.2. *Пусть S — правое V^*-полукольцо с бесконечным элементом z, причем полумодуль zS прост. Тогда*

(a) *отображение $zS \ni a \mapsto \mathrm{Ann}_r(a) \in \mathrm{rsid}(S)$ биективно;*

(b) *полумодуль Sz прост;*

(c) *если хотя бы один из полумодулей zS и Sz конечен, то S — левое V^*-полукольцо.*

Доказательство. (a) Поскольку zS прост, достаточно показать, что указанное отображение сюръективно. Фиксируем произвольный идеал $I \in \mathrm{rsid}(S)$ и покажем, что $I = \mathrm{Ann}_r(a)$ для некоторого $a \in zS$. Очевидно, можно считать, что $I \subset S$. Тогда конгруэнция $\equiv_I \in \mathrm{Cong}(S_S)$ отлична от универсальной, поскольку иначе из соотношения $0 \equiv_I 1$ вытекало бы равенство $a = 1 + b$ для подходящих $a, b \in I$, которое с учетом строгости I влечет $1 \in I$ и, следовательно, $I = S$.

Таким образом, фактор-полумодуль $\overline{S} = S/{\equiv_I}$ ненулевой. Нетрудно видеть, что справедлива следующая цепочка эквивалентностей: $x \in I \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ann}_r(\bar{1})$; тем самым верно равенство $I = \mathrm{Ann}_r(\bar{1})$.

Далее, пусть $\bar{c} \in \overline{S}$, $\bar{c} \neq \bar{0}$ и $x \in \mathrm{Ann}_r(\bar{c}z)$. Если $x \neq 0$, то $zxz = z$ и $\bar{0} = \bar{0}z = \bar{c}zxz = \bar{c}z = \bar{c} + \bar{c}z = \bar{c} \neq \bar{0}$; противоречие. Следовательно, $\mathrm{Ann}_r(\bar{c}z) = 0$.

Положим $\widetilde{S} = \overline{S}/\sigma_{\overline{S}}$. Очевидно, полумодуль $\widetilde{S}$ ненулевой и циклический, значит, найдется максимальная конгруэнция $\theta \in \mathrm{Cong}(\widetilde{S})$, при этом полумодуль $\check{S} = \widetilde{S}/\theta$ прост, следовательно, $\check{S} \cong zS$. Покажем, что $I = \mathrm{Ann}_r(\check{1})$, тогда ввиду леммы 2.5 идеал I будет правым аннулятором для некоторого $a \in zS$.

Ясно, что $\mathrm{Ann}_r(\bar{1}) \subseteq \mathrm{Ann}_r(\check{1})$, поэтому $I \subseteq \mathrm{Ann}_r(\check{1})$. Обратно, пусть $c \in \mathrm{Ann}_r(\check{1})$, т. е. $\check{c} = \check{0}$. Предположим, что $c \notin I$. Тогда $\bar{c} \neq \bar{0}$, следовательно, $\mathrm{Ann}_r(\bar{c}z) = 0 = \mathrm{Ann}_r(\bar{z})$, поэтому $\bar{c}z \; \sigma_{\overline{S}} \; \bar{z}$ и, значит, $\tilde{c}z = \tilde{z}$, что влечет $\check{z} = \check{c}z = \check{0}z = \check{0}$. Но последнее с учетом бесконечности элементов $\check{z}$ и z для $\check{S}$ и S соответственно, а также изоморфности полумодулей $\check{S}$ и zS означает, что $S = 0$. Полученное противоречие показывает, что случай, когда $c \notin I$, невозможен; тем самым доказано обратное включение $\mathrm{Ann}_r(\check{1}) \subseteq I$, а значит, и желаемое равенство $I = \mathrm{Ann}_r(\check{1})$.

(b) С учетом левостороннего аналога предложения 2.1(b) достаточно показать, что левые аннуляторы различных элементов из Sz различны и что для каждого ненулевого подполумодуля $A \subseteq Sz$ конгруэнция $\equiv_A$ на Sz универсальна.

Пусть $a, b \in Sz$, $a \neq b$. Тогда хотя бы одно из включений $a \in b^\triangledown$ и $b \in a^\triangledown$ неверно, поскольку иначе $a^\triangledown = b^\triangledown$ (см. доказательство п. (a) леммы 4.1). Для определенности пусть $b \notin a^\triangledown$. Так как $a^\triangledown \in \mathrm{rsid}(S)$, в силу п. (a) найдется $c \in zS$ такой, что $\mathrm{Ann}_r(c) = a^\triangledown$. В частности, имеем $ca = 0$ и $cb \neq 0$, поскольку $b \notin a^\triangledown$; тем самым $c \in \mathrm{Ann}_l(a)$ и $c \notin \mathrm{Ann}_l(b)$, так что $\mathrm{Ann}_l(a) \neq \mathrm{Ann}_l(b)$.

Пусть $A \subseteq Sz$ — ненулевой подполумодуль, $a \in A$, $a \neq 0$. Тогда $z = zaz = za \in A$, откуда немедленно вытекает, что конгруэнция $\equiv_A$ на Sz универсальна.

(c) Согласно п. (b) полумодуль Sz прост и, очевидно, проективен, поскольку $z \in I(S)$. Следовательно, достаточно показать, что любой простой левый S-полумодуль изоморфен Sz.

Заметим, что конечность полумодуля Sz с учетом пп. (a), (b) леммы 4.1 равносильна конечности решетки $\mathrm{rsid}(S)$, кроме того, $|\,\mathrm{rsid}(S)| = |zS|$ согласно п. (a). Поэтому конечность хотя бы одного из полумодулей zS и Sz означает, что они оба конечны. В частности, в силу конечности Sz и пп. (b), (c) леммы 4.1 каждый идеал $I \in \mathrm{rsid}(S)$ имеет вид $a^\triangledown$ при подходящем $a \in Sz$, так что указанное в п. (a) леммы 4.1 соответствие между Sz и $\mathrm{rsid}(S)$ биективно, следовательно, $|Sz| = |\,\mathrm{rsid}(S)|$. Аналогично, используя левосторонний вариант леммы 4.1, получаем $|zS| = |\operatorname{lsid}(S)|$ и в итоге равенство числа элементов во всех четырех множествах Sz, zS, $\operatorname{rsid}(S)$ и $\operatorname{lsid}(S)$.

Пусть M — произвольный простой левый S-полумодуль, $m \in M$, $m \neq 0$. Очевидно, ненулевой подполумодуль $Szm \subseteq M$ является гомоморфным образом простого полумодуля Sz, и, значит, $Szm \cong Sz$. Поскольку M прост, отображение $M \ni m' \mapsto \operatorname{Ann}_l(m') \in \operatorname{lsid}(S)$ инъективно, следовательно, $|M| \leq |\operatorname{lsid}(S)| = |Sz| = |Szm| \leq |M|$, поэтому $M = Szm \cong Sz$. $\square$

Следствие 4.3. *Пусть для фактор-полукольца $\overline{S} = S/{\equiv_{V(S)}}$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *$\overline{S}$ конечно,*

2) *$\overline{S}$ содержит бесконечный элемент $\bar{z}$ такой, что $\bar{z}\bar{s} = \bar{s}\bar{z}$ для всех $\bar{s} \in \overline{S}$.*

Тогда для S условия «быть правым V^*-полукольцом» и «быть левым V^*-полукольцом» равносильны.

Доказательство. С учетом лево-правой симметричности условий 1 и 2 достаточно показать, что если S — правое V^*-полукольцо, то оно одновременно и левое V^*-полукольцо.

Пусть S — правое V^*-полукольцо. Согласно предложению 1.2 имеем $S = R \oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T — зероидное правое V^*-полукольцо. Очевидно, $R = V(S)$, поэтому $T \cong \overline{S}$; в силу теоремы А и левостороннего аналога предложения 1.1(b) достаточно показать, что T есть левое V^*-полукольцо. С учетом рассуждений, приведенных в начале данного раздела, без ограничения общности можно считать, что T обладает с точностью до изоморфизма ровно одним простым правым полумодулем, т. е. полумодуль zT прост (где $z \in T$ — бесконечный элемент).

Ясно, что если T конечно, то полумодуль zT конечен; если $zt = tz$ для всех $t \in T$, то с учетом простоты zT при любом ненулевом $t \in T$ имеем $zt = z^2t = ztz = z$, так что $zT = \{0, z\}$. Таким образом, любое из условий 1 и 2 влечет конечность zT, следовательно, T есть левое V^*-полукольцо в силу предложения 4.2(c). $\square$

В завершение раздела приведем пример зероидного правого V^*-полукольца, не являющегося левым V^*-полукольцом.

Пример 4.4. Пусть $N = \{0 < 1 < 2 < \cdots < \infty\}$ — цепь натуральных чисел с естественным порядком, дополненная наибольшим элементом. Зададим на $A = (N \times N) \cup 0$ операцию умножения, положив $a0 = 0a = 0$ для всех $a \in A$ и

$$(k,l)(k',l') = \begin{cases} (k,l') & \text{при } l \leq k', \\ 0 & \text{при } l > k'. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $(A,\cdot)$ — полугруппа. Стандартным образом превратим ее в моноид $A' = A \cup 1$. Нетрудно видеть, что соотношения $0 \leq a$ для всех $a \in A'$ и $(k,l) \leq (k',l')$ при $k \leq k'$ и $l \geq l'$ задают на A' отношение частичного порядка, стабильное относительно умножения, и что данный порядок на A' индуцирует на полугрупповом полукольце $T = \mathbb{B}_2[A']$ (здесь $\mathbb{B}_2$ — двухэлементная булева алгебра) отношение квазипорядка $\trianglelefteq$, определенное правилом $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \trianglelefteq \sum\limits_{j=1}^{n} b_j \Leftrightarrow \forall i\, \exists j : a_i \leq b_j$. Стабильность $\trianglelefteq$ относительно сложения в T очевидна; последнее с учетом стабильности исходного порядка $\leq$ на A' и законов дистрибутивности влечет стабильность $\trianglelefteq$ относительно умножения.

Следовательно, отношение $\sim$ на T, где $t \sim t'$, если $t \trianglelefteq t'$ и $t' \trianglelefteq t$, является полукольцевой конгруэнцией.

Рассмотрим на $\overline{T} = T/\!\sim$ конгруэнцию θ, порожденную соотношением $(\overline{\infty, 0})\ \theta\ ((\overline{\infty, 0}) + \bar{1})$. Поскольку $a \leq (\infty, 0)$ для всех $a \in A$, легко видеть, что прибавление к обеим частям указанного соотношения для θ произвольного элемента $\bar{t} \in \overline{T}$, а также умножение его слева или справа на $\bar{t}$ либо не меняет это соотношение, либо дает тривиальное соотношение вида $\bar{x}\ \theta\ \bar{x}$. Значит, θ отличается от отношения равенства только соотношением $(\overline{\infty, 0})\ \theta\ ((\overline{\infty, 0}) + \bar{1})$. Положим $S = \overline{T}/\theta$ и покажем, что S есть правое (но не левое) V^*-полукольцо.

Для любых $k, l \in N$ обозначим через $[k, l]$ образ пары (k, l) при действии естественной сквозной сюръекции $T \to \overline{T} \to S$. Ясно, что $z = [\infty, 0]$ — бесконечный элемент в S и что каждый ненулевой элемент $s \in S$ имеет вид $s = \sum\limits_{i=1}^{n} [k_i, l_i] + \lambda \cdot 1$ при некотором натуральном n, подходящих $k_i, l_i \in N$ и $\lambda \in \mathbb{B}_2$. Тогда при $\lambda = 1$ получаем $zs = z$, а при $\lambda = 0$ —

$$zs = \sum_{i=1}^{n} [\infty, l_i] = [\infty, l],$$

где $l = \min_i l_i$. Аналогично $sz = z$ или $sz = [k, 0]$, где $k = \max_i k_i$. Таким образом,

$$zS = \{[\infty, l],\ l \in N\} \cup 0, \quad Sz = \{[k, 0],\ k \in N\} \cup 0.$$

С учетом формул, определяющих умножение в A, легко видеть, что правые аннуляторы различных элементов из zS различны и что $zsz = z$ при любом ненулевом $s \in S$, поэтому для любого ненулевого подполумодуля $B \subseteq zS$ имеем $z \in B$, откуда следует, что конгруэнция $\equiv_B$ на zS универсальна. В силу предложения 2.1(b) заключаем, что полумодуль zS прост. Отметим также, что ввиду строения Sz и пп. (b), (c) леммы 4.1 для каждого идеала $I \in \mathrm{rsid}(S)$, отличного от 0 и S, либо найдется $k < \infty$ такое, что $I = [k, 0]^{\triangledown}$, либо $I = \bigvee\limits_{k<\infty} [k, 0]^{\triangledown}$. В каждом из этих случаев $I = \mathrm{Ann}_r(x)$ для некоторого $x \in zS$, а именно для $x = [\infty, k + 1]$ в первом случае и для $x = [\infty, \infty]$ во втором. Очевидно, $0 = \mathrm{Ann}_r(z)$, $S = \mathrm{Ann}_r(0)$, поэтому в итоге получаем, что соответствие $zS \ni x \mapsto \mathrm{Ann}_r(x) \in \mathrm{rsid}(S)$ биективно.

Пусть M — произвольный простой правый S-полумодуль. Фиксируем $m \in M$, $m \neq 0$. Очевидно, ненулевой подполумодуль $mzS \subseteq M$ есть гомоморфный образ простого полумодуля zS, поэтому $mzS \cong zS$. Поскольку $\mathrm{Ann}_r(m') \in \mathrm{rsid}(S)$ при любом $m' \in M$, то $\mathrm{Ann}_r(m')$ совпадает с правым аннулятором некоторого элемента $x \in zS$, а значит, и некоторого $mzs \in mzS$, т. е. $m'\ \sigma_M\ mzs$. Так как M прост, согласно предложению 2.1(b) получаем $m' = mzs$, тем самым $M = mzS \cong zS$. В силу проективности zS заключаем, что S есть правое V^*-полукольцо.

Наконец, заметим, что $[\infty, \infty] \in zS$, поэтому $[\infty, \infty]^{\triangledown} \in \mathrm{lsid}(S)$ ввиду левостороннего аналога леммы 4.1(a). Однако идеал $[\infty, \infty]^{\triangledown}$ не является левым аннулятором ни для какого элемента из Sz. В самом деле, $\mathrm{Ann}_l(0) = S$, $\mathrm{Ann}_l([k, 0]) = [\infty, k+1]^{\triangledown}$ при $k < \infty$ и $\mathrm{Ann}_l(z) = 0$. Учитывая предложение 4.2(b) и левосторонний аналог предложения 4.2(a), получаем, что S не является левым V^*-полукольцом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин С. Н.* V-полукольца // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 277–290.

2. *Abuhlail J. Y., Il'in S. N., Katsov Y., Nam T. G.* On V-semirings and semirings all of whose cyclic semimodules are injective // Commun. Algebra. 2015. V. 43, N 11. P. 4632–4654.
3. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
4. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1999.
5. *Ильин С. Н.* Прямые суммы инъективных полумодулей и прямые произведения проективных полумодулей над полукольцами // Изв. вузов. Математика. 2010. № 10. С. 31–44.
6. *Каш Ф.* Модули и кольца. М.: Мир, 1981.
7. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. М.: Наука, 1982.

Статья поступила 23 апреля 2016 г.

Ильин Сергей Николаевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Sergey.Ilyin@kpfu.ru