*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1*

*УДК 519.46+514.763+512.81+519.9+517.911*

# СУБРИМАНОВО РАССТОЯНИЕ В ГРУППЕ ЛИ SL(2)

**В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева**

**Аннотация.** Найдены расстояния между произвольными элементами группы Ли SL(2) для левоинвариантной субримановой метрики, инвариантной относительно правых сдвигов на элементы подгруппы Ли $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SL}(2)$, другими словами, для инвариантной субримановой метрики на слабо симметрическом пространстве Сельберга $(\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SO}(2))/\,\mathrm{SO}(2)$.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.103

**Ключевые слова:** алгебра Ли, геодезическая, группа Ли, инвариантная субриманова метрика, кратчайшая, расстояние.

## Введение

В работе найдены расстояния между произвольными элементами группы Ли SL(2) для левоинвариантной субримановой метрики, инвариантной относительно правых сдвигов на элементы подгруппы Ли $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SL}(2)$, другими словами, для инвариантной субримановой метрики на слабо симметрическом пространстве Сельберга $(\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SO}(2))/\,\mathrm{SO}(2)$. В общем случае расстояния задаются неявными функциями от элементов матриц и параметра $\beta$ кратчайшей.

Аналогичные результаты о расстояниях для левоинвариантных субримановых метрик на группах Ли SU(2) и SO(3), инвариантных относительно правых сдвигов на элементы подгрупп Ли в SU(2) и SO(3), изоморфных группе Ли SO(2), т. е. для инвариантных субримановых метрик на слабо симметрических пространствах $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SO}(2))/\,\mathrm{SO}(2)$ и $(\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(2))/\,\mathrm{SO}(2)$, получены в [1]. Множества раздела и сопряженные множества этих субримановых метрик на группах Ли SL(2), SU(2), SO(3) найдены в [2].

Результаты о расстояниях для указанных метрик на SL(2) представлены в следствии 6, предложениях 5, 6 и теореме 5.

Следует заметить, что все упомянутые метрики геодезически орбитальны, т. е. каждая их геодезическая есть орбита некоторой 1-параметрической группы изометрий. По-видимому, именно указанное обстоятельство позволило получить эти результаты.

Работа выполнена частично при поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00068–а).

## 1. Предварительные сведения

Приведем необходимые понятия и результаты из [3].

Напомним, что SL(2) — группа всех вещественных $(2\times 2)$-матриц с определителем 1. Ее алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ состоит из всех вещественных $(2\times 2)$-матриц с нулевым следом. Зададим базис $\mathfrak{sl}(2)$ следующим образом:

$$p_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Пусть $e$ — единица в SL(2), $D(e)$ — линейная оболочка векторов $p_1$, $p_2$. Зададим на $D(e)$ скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ с ортонормированным базисом $p_1$, $p_2$. Из (1) вытекает, что

$$[p_1,p_2] = -k, \quad [k,p_1] = p_2, \quad [k,p_2] = -p_1. \tag{2}$$

В силу соотношений (2) справедливы следующие утверждения.

1. Левоинвариантное распределение $D$ на группе Ли SL(2) с данным $D(e)$ вполне неголономно, и пара $(D(e),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику $\delta$ на SL(2).

2. $D(e)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ инвариантны относительно группы $\mathrm{Ad}(\mathrm{SO}(2))$, $\mathrm{SO}(2)\subset\mathrm{SL}(2)$.

3. Метрика $\delta$ инвариантна относительно сопряжения группы SL(2) элементами подгруппы SO(2).

4. Метрика $\delta$ инвариантна относительно правых сдвигов группы SL(2) на элементы подгруппы SO(2).

Утверждения 1 и 4 эквивалентны тому, что $\delta$ — инвариантная субриманова метрика на слабо симметрическом пространстве $(\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SO}(2))/\mathrm{SO}(2)$. Понятие слабо симметрического пространства ввел Сельберг в [4]; $(\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SO}(2))/\mathrm{SO}(2)$ — единственное слабо симметрическое несимметрическое пространство, рассмотренное им в [4].

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Каждая параметризованная длиной дуги геодезическая* $\gamma=\gamma(t)=\gamma(\beta,\phi;t)$, $t\in\mathbb{R}$, *в* $(\mathrm{SL}(2),\delta)$ *с условием* $\gamma(0)=e$ *есть произведение двух* 1*-параметрических подгрупп:*

$$\gamma(t) = \exp(t(\cos\phi p_1 + \sin\phi p_2 + \beta k))\exp(-t\beta k), \tag{3}$$

*где* $\phi$, $\beta$ *— некоторые произвольные постоянные.*

Отсюда и из указанных выше свойств метрики $\delta$ непосредственно вытекает

**Следствие 1.** *Пространство* $(\mathrm{SL}(2),\delta)$ *геодезически орбитально, т. е. каждая (полная) геодезическая в* $(\mathrm{SL}(2),\delta)$ *— орбита некоторой* 1*-параметрической подгруппы изометрий пространства* $(\mathrm{SL}(2),\delta)$.

Замечание 1. Известно, что всякое слабо симметрическое пространство с инвариантной римановой метрикой геодезически орбитально. Скорее всего, это верно и для субримановых метрик; тогда следствие 1 — частный случай этого утверждения.

**Теорема 2.** *Пусть*

$$m = \frac{t}{2}, \quad n = 1, \quad \text{если } |\beta| = 1, \tag{4}$$

$$m = \frac{\operatorname{sh}\frac{t\sqrt{1-\beta^2}}{2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad n = \operatorname{ch}\frac{t\sqrt{1-\beta^2}}{2}, \quad \textit{если } |\beta| < 1, \tag{5}$$

$$m = \frac{\sin\frac{t\sqrt{\beta^2-1}}{2}}{\sqrt{\beta^2-1}}, \quad n = \cos\frac{t\sqrt{\beta^2-1}}{2}, \quad \textit{если } |\beta| > 1. \tag{6}$$

*Тогда геодезическая $\gamma(t)$ метрики $\delta$ на $\mathrm{SL}(2)$ (см. теорему 1) равна*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} n\cos\frac{\beta t}{2} + m\left(\cos\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right) + \beta\sin\frac{\beta t}{2}\right) & n\sin\frac{\beta t}{2} + m\left(\sin\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right) - \beta\cos\frac{\beta t}{2}\right) \\ -n\sin\frac{\beta t}{2} + m\left(\sin\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right) + \beta\cos\frac{\beta t}{2}\right) & n\cos\frac{\beta t}{2} + m\left(-\cos\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right) + \beta\sin\frac{\beta t}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В силу (7)

$$\begin{gathered} c_{11} + c_{22} = 2n\cos\frac{\beta t}{2} + 2\beta m\sin\frac{\beta t}{2}, \quad c_{12} - c_{21} = 2n\sin\frac{\beta t}{2} - 2\beta m\cos\frac{\beta t}{2}, \\ c_{11} - c_{22} = 2m\cos\left(\frac{\beta t}{2} + \phi\right), \quad c_{12} + c_{21} = 2m\sin\left(\frac{\beta t}{2} + \phi\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Из последних двух равенств вытекает, что

$$|m| = m(c) = \frac{\sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + (c_{12} + c_{21})^2}}{2}. \tag{9}$$

**Предложение 1.** *Матрица $c$ принадлежит $\mathrm{SO}(2)$ тогда и только тогда, когда $c \in \mathrm{SL}(2)$ и $m(c) = 0$.*

**Следствие 2.** *Матрица $c \in \mathrm{SL}(2) - \{e\}$ симметрична и $\mathrm{trace}(c) := c_{11} + c_{22} > 0$ тогда и только тогда, когда $c = \gamma(0, \phi; t)$, где*

$$\operatorname{sh}\frac{t}{2} = m(c), \quad \cos\phi = \frac{c_{11} - c_{22}}{2m(c)}, \quad \sin\phi = \frac{c_{12}}{m(c)}. \tag{10}$$

**Предложение 2.** *Если $\beta = 0$, то каждый отрезок $\gamma(t) = \gamma(0, \phi; t)$, $0 \leq t \leq t_1$, — кратчайшая и множество $\mathrm{Sim}^+$ всех симметричных матриц из $\mathrm{SL}(2)$ с положительным следом есть объединение всех таких отрезков.*

**Теорема 3.** *Пусть $C(e)$ — множество раздела для $e \in (\mathrm{SL}(2), \delta)$ (совпадающее с множеством концов непродолжаемых кратчайших в $(\mathrm{SL}(2), \delta)$ с началом в $e$ [3]). Тогда*

$$C(e) = K(e) \cup S_1(e), \tag{11}$$

*где*

$$K(e) = \mathrm{Sim}^- = \{c \in \mathrm{SL}(2) \mid c^T = c, \ \mathrm{trace}(c) < 0\}, \tag{12}$$

$$S_1(e) = \mathrm{SO}(2) - \{e\}. \tag{13}$$

*При этом $K(e)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^2$, $S_1(e)$ диффеоморфно $\mathbb{R}$, $S_1(e) \cap K(e) = \{-e\}$.*

**Теорема 4.** *Пусть $\beta \neq 0$ и $\gamma = \gamma(\beta, \phi; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая (7). Тогда*

1. *Если $|\beta| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$.*

2. *Если $|\beta| = 1$, то $T \in (2\pi, 3\pi)$ и $T$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos\frac{T}{2} = \frac{-1}{\sqrt{1 + (T/2)^2}}, \quad \sin\frac{T}{2} = \frac{-T/2}{\sqrt{1 + (T/2)^2}}.$$

3. *Если* $|\beta| < 1$, *то* $T \in \left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ *и* $T$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{th} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}},$$

*где*

$$k = \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x = \frac{T\sqrt{1-\beta^2}}{2} = \frac{T}{2\sqrt{1+k^2}}. \tag{14}$$

4. *Если* $|\beta| = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, *то* $T = 2\sqrt{2}\pi$.

5. *Если* $\frac{3}{2\sqrt{2}} < |\beta| < \frac{2}{\sqrt{3}}$, *то* $\frac{3\pi}{|\beta|} < T < 2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 - 1}) < \frac{4\pi}{|\beta|}$ *и* $T$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos kx = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

*где*

$$k = \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad x = \frac{T\sqrt{\beta^2-1}}{2} = \frac{T}{2\sqrt{k^2-1}}. \tag{15}$$

6. *Если* $1 < |\beta| < \frac{3}{2\sqrt{2}}$, *то* $\frac{2\pi}{|\beta|} < 2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 - 1}) < T < \frac{3\pi}{|\beta|}$ *и* $T$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

*где* $k$ *и* $x$ *определены формулами* (15).

**Следствие 3.** $T = T(|\beta|)$, $|\beta| > 0$, — *непрерывная функция.*

Пусть $m_0$ — минимальный положительный корень уравнения $\operatorname{tg} m = m$, $m_0$ — единственный корень уравнения $\operatorname{tg} m = m$ в интервале $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Можно показать, что $m_0$ приблизительно равно $4,4934$.

**Следствие 4.** 1. *Если* $0 < |\beta| < 1$, *то* $\operatorname{tg} kx = k \operatorname{th} x$.
2. *Если* $|\beta| = 1$, *то* $\operatorname{tg}(T/2) = T/2 = m_0$.
3. *Если* $|\beta| > 1$, *то* $\operatorname{tg} kx = k \operatorname{tg} x$.

На основании п. 1 теоремы 4, (6) и (7) получаем

**Следствие 5.** *Если* $|\beta| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, *то*

$$c = \gamma(\beta, \phi; T(|\beta|)) = \gamma\left(\beta, \phi; \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}\right) = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} & -\sin\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} \\ \sin\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} & -\cos\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

## 2. Леммы

Пусть $0 < |\beta| < 1$. Из (5), (9) следует, что $m = m(c) > 0$ и

$$t = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{arcsh}(m\sqrt{1-\beta^2}), \tag{17}$$

$$n = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{t\sqrt{1-\beta^2}}{2}} = \sqrt{1 + (1-\beta^2)m^2}, \quad \sqrt{n^2 + (\beta m)^2} = \sqrt{1+m^2}. \tag{18}$$

Тогда на основании (8), (9), (17), (18) имеем

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{arcsh}(m(c)\sqrt{1-\beta^2}) - \arcsin\frac{\beta m(c)}{\sqrt{1+m^2(c)}}\right) = \frac{\operatorname{trace}(c)}{2\sqrt{1+m^2(c)}}, \\ \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{arcsh}(m(c)\sqrt{1-\beta^2}) - \arcsin\frac{\beta m(c)}{\sqrt{1+m^2(c)}}\right) = \frac{c_{12}-c_{21}}{2\sqrt{1+m^2(c)}}. \end{cases} \tag{19}$$

**Лемма 1.** *Определим на интервале* $(-1,1)$ *функцию* $t_1 = t_1(\beta)$ *формулой* (17) *при фиксированном* $m > 0$. *Тогда*

1) $t_1(\beta)$ *— четная функция;*

2) $t_1(\beta)$ *возрастает на полуоткрытом интервале* $[0,1)$ *и убывает на полуоткрытом интервале* $(-1,0]$*;*

3) *ее область значений есть полуоткрытый интервал* $[2\operatorname{arcsh} m, 2m)$.

Доказательство. Четность функции $t_1 = t_1(\beta)$ очевидна.

Пусть

$$z_1 = m\sqrt{1-\beta^2}, \quad z_1 \in (0,m]. \tag{20}$$

Нетрудно показать, что

$$t_1'(\beta) = \frac{2\beta}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} \cdot \frac{\sqrt{1+z_1^2}\operatorname{arcsh} z_1 - z_1}{\sqrt{1+z_1^2}}. \tag{21}$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(z_1) = \sqrt{1+z_1^2}\operatorname{arcsh} z_1 - z_1, \quad z_1 \in (0,m]. \tag{22}$$

Так как

$$\lim_{z_1\to 0} f_1(z_1) = 0, \quad f_1'(z_1) = \frac{z_1 \operatorname{arcsh} z_1}{\sqrt{1+z_1^2}} > 0 \text{ при } z_1 \in (0,m],$$

то $f_1(z_1) > 0$ для любого $z_1 \in (0,m]$. Отсюда и из (21) вытекает утверждение п. 2 леммы 1.

На основании (17)

$$t_1(0) = 2\operatorname{arcsh} m, \quad \lim_{\beta\to 1} t_1(\beta) = 2m.$$

Отсюда и из пп. 1, 2 леммы 1 вытекает утверждение п. 3 леммы 1. □

**Лемма 2.** *Определим на интервале* $(-1,1)$ *функцию* $F_1(\beta)$ *формулой*

$$F_1(\beta) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\operatorname{arcsh}(m\sqrt{1-\beta^2}) - \arcsin\frac{\beta m}{\sqrt{1+m^2}} \tag{23}$$

*при фиксированном* $m > 0$. *Тогда*

1) $F_1(\beta)$ *— нечетная функция;*

2) $F_1(\beta)$ *возрастает на всей области определения;*

3) *ее область значений есть интервал* $(\operatorname{arctg} m - m, m - \operatorname{arctg} m)$.

Доказательство. Нечетность функции $F_1(\beta)$ очевидна.

Нетрудно показать, что

$$F_1'(\beta) = \frac{f_1(z_1)}{(\sqrt{1-\beta^2})^3 \cdot \sqrt{1+z_1^2}},$$

где $z_1$ определено формулой (20), $f_1(z_1)$ — формулой (22). Утверждение п. 2 леммы 2 следует из того факта, что $f_1(z_1) > 0$ для любого $z_1 \in (0,m]$.

На основании (23)

$$\lim_{\beta\to 1} F_1(\beta) = m - \arcsin\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = m - \operatorname{arctg} m.$$

Отсюда и из пп. 1, 2 леммы 2 вытекает утверждение п. 3 леммы 2. □

Пусть $|\beta| > 1$. Рассмотрим случай $0 < t < \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$. Из (6), (9) следует, что тогда $n > 0$, $m = m(c) > 0$ и

$$t = \frac{2}{\sqrt{\beta^2-1}} \arcsin(m\sqrt{\beta^2-1}), \tag{24}$$

$$n = \sqrt{1-(\beta^2-1)m^2}, \quad \sqrt{n^2+(\beta m)^2} = \sqrt{1+m^2}. \tag{25}$$

На основании (8), (9), (24), (25) имеем

$$\begin{cases} \cos\Big(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} \arcsin(m(c)\sqrt{\beta^2-1}) - \arcsin\frac{\beta m(c)}{\sqrt{1+m^2(c)}}\Big) = \frac{\mathrm{trace}(c)}{2\sqrt{1+m^2(c)}}, \\ \sin\Big(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} \arcsin(m(c)\sqrt{\beta^2-1}) - \arcsin\frac{\beta m(c)}{\sqrt{1+m^2(c)}}\Big) = \frac{c_{12}-c_{21}}{2\sqrt{1+m^2(c)}}. \end{cases} \tag{26}$$

**Лемма 3.** *Определим на* $\big(-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, -1\big) \cup \big(1, \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\big)$ *функцию* $t_2 = t_2(\beta)$ *формулой* (24) *при фиксированном* $m > 0$. *Тогда*

1) $t_2(\beta)$ *— четная функция;*
2) $t_2(\beta)$ *возрастает на* $\big(1, \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\big)$ *и убывает на* $\big(-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, -1\big)$;
3) *ее область значений есть интервал* $(2m, \pi m)$.

Доказательство. Четность функции $t_2 = t_2(\beta)$ очевидна.

Пусть
$$z_2 = m\sqrt{\beta^2-1}, \quad z_2 \in (0,1). \tag{27}$$

Нетрудно показать, что

$$t_2'(\beta) = \frac{2\beta}{(\sqrt{\beta^2-1})^3} \frac{z_2 - \sqrt{1-z_2^2}\arcsin z_2}{\sqrt{1-z_2^2}}. \tag{28}$$

Рассмотрим функцию

$$f_2(z_2) = z_2 - \sqrt{1-z_2^2}\arcsin z_2, \quad z_2 \in (0,1). \tag{29}$$

Так как
$$f_2(0) = 0, \quad f_2'(z_2) = \frac{z_2 \arcsin z_2}{\sqrt{1-z_2^2}} > 0 \text{ при } z_2 \in (0,1),$$

то $f_2(z_2) > 0$ для любого $z_2 \in (0,1)$. Отсюда и из (28) вытекает утверждение п. 2 леммы 3.

На основании (24)

$$\lim_{\beta\to 1} t_2(\beta) = 2m, \qquad \lim_{\beta \to \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}} t_2(\beta) = \pi m.$$

Отсюда и из пп. 1, 2 леммы 3 вытекает утверждение п. 3 леммы 3. $\square$

**Лемма 4.** *Определим на* $\big(-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, -1\big) \cup \big(1, \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\big)$ *функцию* $F_2(\beta)$ *формулой*

$$F_2(\beta) = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} \arcsin(m\sqrt{\beta^2-1}) - \arcsin\frac{\beta m}{\sqrt{1+m^2}} \tag{30}$$

*при фиксированном* $m > 0$. *Тогда*

1) $F_2(\beta)$ *— нечетная функция;*
2) $F_2(\beta)$ *возрастает на всей области определения;*

3) *ее область значений есть объединение интервалов*

$$\left(\frac{\pi}{2}(1-\sqrt{1+m^2}), \operatorname{arctg} m - m\right) \cup \left(m - \operatorname{arctg} m, \frac{\pi}{2}(\sqrt{1+m^2}-1)\right).$$

Доказательство. Нечетность функции $F_2(\beta)$ очевидна.

Нетрудно показать, что

$$F_2'(\beta) = \frac{f_2(z_2)}{(\sqrt{\beta^2-1})^3\sqrt{1-z_2^2}},$$

где $z_2$ определено формулой (27), $f_2(z_2)$ — формулой (29). Утверждение п. 2 леммы 4 следует из того факта, что $f_2(z_2) > 0$ для любого $z_2 \in (0,1)$.

На основании (30)

$$\lim_{\beta\to 1} F_2(\beta) = m - \arcsin\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = m - \operatorname{arctg} m, \quad \lim_{\beta\to\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}} F_2(\beta) = \frac{\pi}{2}(\sqrt{1+m^2}-1).$$

Отсюда и из пп. 1, 2 леммы 4 вытекает утверждение п. 3 леммы 4. $\square$

Рассмотрим случай $\frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}} < t < \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$. Из (6), (9) следует, что тогда $n < 0$, $m = m(c) > 0$ и

$$t = \frac{2}{\sqrt{\beta^2-1}}(\pi - \arcsin(m\sqrt{\beta^2-1})), \tag{31}$$

$$n = -\sqrt{1-(\beta^2-1)m^2}, \quad \sqrt{n^2+(\beta m)^2} = \sqrt{1+m^2}. \tag{32}$$

На основании (8), (9), (31), (32) имеем

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}(\pi - \arcsin(m(c)\sqrt{\beta^2-1})) + \arcsin\frac{\beta m(c)}{\sqrt{1+m^2(c)}}\right) = -\frac{\operatorname{trace}(c)}{2\sqrt{1+m^2(c)}}, \\ \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}(\pi - \arcsin(m(c)\sqrt{\beta^2-1})) + \arcsin\frac{\beta m(c)}{\sqrt{1+m^2(c)}}\right) = \frac{c_{12}-c_{21}}{2\sqrt{1+m^2(c)}}. \end{cases} \tag{33}$$

**Лемма 5.** *Определим на* $\left(-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, -1\right) \cup \left(1, \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\right)$ *функцию* $t_3 = t_3(\beta)$ *формулой* (31) *при фиксированном* $m > 0$. *Тогда*

1) $t_3(\beta)$ — *четная функция;*

2) $t_3(\beta)$ *убывает на* $\left(1, \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\right)$ *и возрастает на* $\left(-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, -1\right)$;

3) *ее область значений есть интервал* $(\pi m, +\infty)$.

Доказательство. Вследствие (24) и (31)

$$t_3(\beta) = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}} - t_2(\beta).$$

Лемма 5 вытекает из леммы 3 и того факта, что

$$\lim_{\beta\to 1} t_3(\beta) = +\infty, \quad \lim_{\beta\to\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}} t_3(\beta) = \pi m. \quad \square$$

**Лемма 6.** *Определим на* $\big(-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m},-1\big)\cup\big(1,\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\big)$ *функцию* $F_3(\beta)$ *формулой*

$$F_3(\beta)=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}(\pi-\arcsin(m\sqrt{\beta^2-1}))+\arcsin\frac{\beta m}{\sqrt{1+m^2}} \tag{34}$$

*при фиксированном* $m>0$. *Тогда*

1) $F_3(\beta)$ *— нечетная функция;*
2) $F_3(\beta)$ *убывает на всей области определения;*
3) *ее область значений есть объединение интервалов*

$$\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{1+m^2})\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{1+m^2}),+\infty\right).$$

Доказательство. Нечетность функции $F_3(\beta)$ очевидна.

Из (30), (34) следует, что

$$F_3(\beta)=\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}-F_2(\beta).$$

Лемма 6 вытекает из леммы 4 и того факта, что

$$\lim_{\beta\to1}F_3(\beta)=+\infty,\qquad\lim_{\beta\to\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}}F_3(\beta)=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{1+m^2}).\quad\square$$

## 3. Кратчайшие и $m(c)$

**Предложение 3.** *Если* $|\beta|>0$ *и*

$$\mu(\beta):=\max\{m(\beta,t):=m(\gamma(\beta,\phi;t)),\ 0\le t\le T=T(|\beta|)\},$$

*то* $\mu=\mu(|\beta|)$ *— непрерывная убывающая функция переменного* $|\beta|>0$.

Доказательство. Вследствие (4)–(6) $m(\gamma(\beta,\phi;t))=m(\gamma(-\beta,\phi;t))$. Поэтому $\mu(\beta)=\mu(-\beta)$, т. е. $\mu=\mu(|\beta|)$.

Без ограничения общности можно считать, что $\beta>0$.

Если $1<\beta<\frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $\pi<\frac{\beta T}{2}=kx<\frac{3\pi}{2}$ в силу п. 6 теоремы 4 и $k>3$, поэтому $0<x<\frac{\pi}{2}$, т. е. $0<T<\frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$. Если $\frac{3}{2\sqrt{2}}<\beta<\frac{2}{\sqrt{3}}$, то $\frac{3\pi}{2}<\frac{\beta T}{2}=kx<2\pi$ вследствие п. 5 теоремы 4 и $2<k<3$, тем самым $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, т. е. $\frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}<T<\frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$. По непрерывности $x=\frac{\pi}{2}$, если $\beta=\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Кроме того, $x=\pi$, если $\beta\ge\frac{2}{\sqrt{3}}$. Поэтому если $0<\beta\le\frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $\mu(\beta)=m(\beta):=m(\beta,T(\beta))$, а если $\beta\ge\frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $\mu(\beta)=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}$. Тогда $\mu(\beta)$ — непрерывная убывающая функция при $\beta\ge\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Пусть $0<\beta<1$. Тогда на основании теоремы 3, (19), (23) и следствия 3 $F_1(\beta,m(\beta))\equiv\mathrm{const}$ и

$$\frac{dF_1(\beta,m(\beta))}{d\beta}=(F_1)'_\beta(\beta,m(\beta))+(F_1)'_m(\beta,m(\beta))\cdot\frac{dm}{d\beta}=0, \tag{35}$$

$$(F_1)'_m(\beta,m)=\frac{\beta}{\sqrt{1+(1-\beta^2)m^2}}-\frac{\beta\sqrt{1+m^2}-\beta m^2/\sqrt{1+m^2}}{(1+m^2)\sqrt{1-\beta^2m^2/(1+m^2)}}$$
$$=\frac{\beta}{\sqrt{1+(1-\beta^2)m^2}}\left(1-\frac{1}{1+m^2}\right)>0.$$

Отсюда и из (35) следует, что $\mu'(\beta) = m'(\beta) < 0$, так как $(F_1)'_\beta > 0$ по лемме 2.

Пусть $1 < \beta < \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Тогда на основании теоремы 3, (26), (30) и следствия 3 $F_2(\beta, m(\beta)) \equiv \mathrm{const}$ и

$$\frac{dF_2(\beta, m(\beta))}{d\beta} = (F_2)'_\beta(\beta, m(\beta)) + (F_2)'_m(\beta, m(\beta)) \cdot \frac{dm}{d\beta} = 0, \tag{36}$$

$$(F_2)'_m(\beta, m) = \frac{\beta}{\sqrt{1 + (1-\beta^2)m^2}} - \frac{\beta\sqrt{1+m^2} - \beta m^2/\sqrt{1+m^2}}{(1+m^2)\sqrt{1 - \beta^2 m^2/(1+m^2)}}$$
$$= \frac{\beta}{\sqrt{1+(1-\beta^2)m^2}}\left(1 - \frac{1}{1+m^2}\right) > 0.$$

Отсюда, из изложенного выше и (36) следует, что $\mu'(\beta) = m'(\beta) < 0$, так как $(F_2)'_\beta > 0$ по лемме 4. Отметим, что в этом случае $m(\beta) < \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}$, поэтому $1 + (1-\beta^2)m^2 > 0$. $\square$

Замечание 2. Из доказательства предложения 3 и п. 3 теоремы 4 следует, что функция $\mu(|\beta|)$, $|\beta| > 1$, имеет интервал значений $(0, +\infty)$.

**Предложение 4.** *Функция $m(\gamma(\beta, \phi; T(|\beta|)))$ непрерывная и убывающая.*

Доказательство. Вследствие доказательства предложения 3 достаточно рассмотреть $|\beta| \in \left[\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta > 0$. Если $\frac{3}{2\sqrt{2}} < \beta < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то на основании доказательства предложения 3

$$\frac{\pi}{2} < x = \frac{T(\beta)\sqrt{\beta^2-1}}{2} < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}} < T(\beta) < \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}.$$

Тогда в силу теоремы 3, (26), (30) и следствия 3 $F_3(\beta, m(\beta)) \equiv \mathrm{const}$ и

$$\frac{dF_3(\beta, m(\beta))}{d\beta} = (F_3)'_\beta(\beta, m(\beta)) + (F_3)'_m(\beta, m(\beta)) \cdot \frac{dm}{d\beta} = 0, \tag{37}$$

$$(F_3)'_m(\beta, m) = -(F_2)'_m(\beta, m) = \frac{\beta}{\sqrt{1+(1-\beta^2)m^2}}\left(\frac{1}{1+m^2} - 1\right) < 0.$$

Отсюда и из (37) следует, что $\mu'(\beta) = m'(\beta) < 0$, так как $(F_3)'_\beta < 0$ по лемме 6. $\square$

## 4. Субриманово расстояние

Из следствия 2 и предложения 2 непосредственно вытекает

**Следствие 6.** *Если матрица $c \in \mathrm{SL}(2) - \{e\}$ симметрична и $\mathrm{trace}(c) > 0$, то*

$$\delta(c, e) = 2 \operatorname{arcsh} m(c). \tag{38}$$

Из теорем 3, 4 и следствия 5 получаем

**Предложение 5.** *Если $c \in \mathrm{SO}(2) - \{e\}$, то*

$$\delta(c, e) = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}},$$

*причем*

$$\cos\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} = -\frac{\mathrm{trace}(c)}{2}, \quad \sin\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} = -\frac{c_{12} - c_{21}}{2}, \quad |\beta| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

**Предложение 6.** 1. *Если* $m(c) = 0$ *и* $c \in \mathrm{Sim}^-$, *то* $\delta(e,c) = 2\sqrt{3}\pi$.

2. *Если* $m(c) = m_0$ *и* $c \in \mathrm{Sim}^-$, *то* $\delta(e,c) = T = 2m_0$.

3. *Если* $m(c) = 2\sqrt{2}$ *и* $c \in \mathrm{Sim}^-$, *то* $\delta(e,c) = 2\sqrt{2}\pi$.

4. *Если* $m_0 < m(c)$ *и* $c \in \mathrm{Sim}^-$, *то* $\delta(e,c) = T$ *— единственное число, определяемое условиями*

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1-\beta^2}} = m(c), \quad 0 < |\beta| < 1.$$

5. *Если* $2\sqrt{2} < m(c) < m_0$ *и* $c \in \mathrm{Sim}^-$, *то* $\delta(e,c) = T$ *— единственное число, определяемое условиями*

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\beta^2-1}} = m(c), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 1 < |\beta| < \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

6. *Если* $0 < m(c) < 2\sqrt{2}$ *и* $c \in \mathrm{Sim}^-$, *то* $\delta(e,c) = T$ *— единственное число, определяемое условиями*

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\beta^2-1}} = m(c), \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi, \quad \frac{3}{2\sqrt{2}} < |\beta| < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Доказательство. При доказательстве всех утверждений предложения 6 будем использовать теоремы 3, 4 и обозначения из доказательства предложения 3. Дополнительные обоснования указаны ниже.

Утверждение 1 следует из предложений 1 и 5, утверждение 2 вытекает из следствия 4, утверждение 3 — из п. 4 теоремы 4 и равенств

$$m\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{(3/2\sqrt{2})^2 - 1}} = 2\sqrt{2},$$

утверждение 4 вытекает из второго и предложения 3, утверждения 5 и 6 следуют из теоремы 4, доказательств п. 3 и предложений 3 и 4. $\square$

На основании следствия 6 и предложений 5, 6 остается рассмотреть случай, когда $c \notin \mathrm{SO}(2)$ и $c$ — несимметричная матрица.

**Теорема 5.** *Пусть* $c \in \mathrm{SL}(2)$, $c \notin \mathrm{SO}(2)$ *и* $c_{12} \neq c_{21}$. *Тогда*

1. *Если* $m(c) \geq m_0$ *или одновременно* $0 < m(c) < m_0$ *и*

$$\cos m(c) + m(c)\sin m(c) < \frac{c_{11}+c_{22}}{2}, \tag{39}$$

*то* $t = \delta(e,c)$ *можно найти по формуле* (17), *где* $m = m(c)$, $\beta$ *— единственный корень уравнения*

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{arcsh}(m(c)\sqrt{1-\beta^2}) - \arcsin\frac{\beta m(c)}{\sqrt{1+m^2(c)}} = \operatorname{sgn}(c_{12}-c_{21}) \arccos\frac{\operatorname{trace}(c)}{2\sqrt{1+m^2(c)}}. \tag{40}$$

2. *Если* $0 < m(c) < m_0$ *и*

$$\cos m(c) + m(c)\sin m(c) = \frac{c_{11}+c_{22}}{2}, \tag{41}$$

*то* $\delta(e,c)=2m(c)$.

3. *Пусть*

$$\frac{c_{11}+c_{22}}{2}<\cos m(c)+m(c)\sin m(c). \tag{42}$$

*Тогда*

(a) *если* $2\sqrt{2}\le m(c)<m_0$ *или одновременно* $0<m(c)<2\sqrt{2}$ *и*

$$\sqrt{1+m^2(c)}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+m^2(c)}\right)<\frac{c_{11}+c_{22}}{2},$$

*то* $t=\delta(e,c)$ *можно найти по формуле* (24)*, где* $m=m(c)$*,* $\beta$ — *единственный корень уравнения*

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}\arcsin(m(c)\sqrt{\beta^2-1})-\arcsin\frac{\beta m(c)}{\sqrt{1+m^2(c)}} =\operatorname{sgn}(c_{12}-c_{21})\arccos\frac{\operatorname{trace}(c)}{2\sqrt{1+m^2(c)}}; \tag{43}$$

(b) *если* $0<m(c)<2\sqrt{2}$ *и*

$$\frac{c_{11}+c_{22}}{2}=\sqrt{1+m^2(c)}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+m^2(c)}\right),$$

*то* $\delta(e,c)=\pi m(c)$;

(c) *если* $0<m(c)<2\sqrt{2}$ *и*

$$\frac{c_{11}+c_{22}}{2}<\sqrt{1+m^2(c)}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+m^2(c)}\right),$$

*то* $t=\delta(e,c)$ *можно найти по формуле* (31)*, где* $m=m(c)$*,* $\beta$ — *единственный корень уравнения*

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}(\pi-\arcsin(m(c)\sqrt{\beta^2-1}))+\arcsin\frac{\beta m(c)}{\sqrt{1+m^2(c)}} =\operatorname{sgn}(c_{21}-c_{12})\cdot\left(\pi+\arccos\frac{\operatorname{trace}(c)}{2\sqrt{1+m^2(c)}}\right). \tag{44}$$

Доказательство. 1. Пусть $m(c)\ge m_0$ и $c_{12}\ne c_{21}$. Из предложения 3 и следствия 4 вытекает, что если $m(c)=m(\beta,t)$ и $t=\delta(e,c)$, то выполнено неравенство $0<|\beta|<1$. Из (5) следует, что $t$ можно вычислить по формуле (17).

Если $m(c)=m_0$, то $m(c)-\operatorname{arctg} m(c)=\pi$. Тогда на основании лемм 1, 2 система (19) имеет единственное решение $\beta$ и это решение есть единственный корень уравнения (40).

Условие $m(c)>m_0$ равносильно неравенству $m(c)-\operatorname{arctg} m(c)>\pi$. В этом случае в силу лемм 1, 2 система (19) имеет по меньшей мере одно решение $\beta$. Нам необходимо взять наименьшее по модулю решение этой системы, которое также есть единственный корень уравнения (40).

Пусть $0<m(c)<m_0$ и $c_{12}\ne c_{21}$. Предположим сначала, что найдется $\beta$ такое, что $0<|\beta|<1$ и $m(c)=m(\beta,t)$ для некоторого $t>0$. Тогда $t$ можно вычислить по формуле (17) и имеет место система (19). Условие $m(c)<m_0$ равносильно неравенству $m(c)-\operatorname{arctg} m(c)<\pi$. В этом случае в силу лемм 1, 2 система (19) имеет решение $\beta$, и притом единственное (которое является единственным корнем уравнения (40)), тогда и только тогда, когда

$$\cos(m(c) - \operatorname{arctg} m(c)) < \cos F_1(\beta).$$

Легко проверить, что ввиду (23) последнее неравенство равносильно (39).

Предположим теперь, что выполнено (39) и помимо $\beta$ найдется $\beta_2$ такое, что $|\beta_2| \geq 1$ и $m(c) = m(\beta_2, t_2)$ для некоторого $t_2 > 0$. Тогда на основании п. 3 лемм 1, 3, 5 и формулы (4) получаем, что $t < t_2$, т. е. $\delta(e, c) = t$. Это завершает доказательство п. 1 теоремы 5.

2. Пусть $0 < m(c) < m_0$, $c_{12} \neq c_{21}$, и предположим, что $m(c) = m(\beta, t)$ для $\beta = \pm 1$ и некоторого $t > 0$. Из (4), (8) следует, что тогда выполнено равенство (41) и $t = 2m(c)$.

Предположим теперь, что выполнено (41) и найдется $\beta_2 \neq \beta$ такое, что $m(c) = m(\beta_2, t_2)$ для некоторого $t_2 > 0$. Из доказательства п. 1 теоремы 5 следует, что $|\beta_2| > 1$. Тогда на основании п. 3 лемм 3, 5 получаем, что $t = 2m(c) < t_2$, т. е. $\delta(e, c) = 2m(c)$. Это завершает доказательство п. 2 теоремы 5.

3. Пусть $0 < m(c) < m_0$, $c_{12} \neq c_{21}$ и выполнено неравенство (42). Из доказательств пп. 1, 2 теоремы 5 следует существование $\beta$ такого, что $|\beta| > 1$, $m(c) = m(\beta, t)$ и $t = \delta(e, c)$.

(a) Пусть $2\sqrt{2} \leq m(c) < m_0$ и $c_{12} \neq c_{21}$. Тогда $1 < |\beta| < \frac{3}{2\sqrt{2}}$ на основании предложения 3 и доказательства п. 3 предложения 6; $t < \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$ вследствие доказательства предложения 3.

Условие $2\sqrt{2} \leq m(c) < m_0$ равносильно неравенствам

$$\pi \leq \frac{\pi}{2}(\sqrt{1 + m^2(c)} - 1) < 2\pi, \quad 0 < m(c) - \operatorname{arctg} m(c) < \pi. \tag{45}$$

Рассмотрим неравенство

$$\cos(m(c) - \operatorname{arctg} m(c)) < \cos\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{1 + m^2(c)} - 1)\right). \tag{46}$$

Заметим, что (46) с учетом (45) равносильно неравенству

$$\pi - m(c) + \operatorname{arctg} m(c) < \frac{\pi}{2}(\sqrt{1 + m^2(c)} - 1) - \pi,$$

которое можно переписать в виде

$$m(c) - \operatorname{arctg} m(c) + \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + m^2(c)} > \frac{5\pi}{2}.$$

Легко видеть, что

$$\left(m + \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + m^2} - \operatorname{arctg} m\right)'_m = 1 + \frac{\pi m}{2\sqrt{1 + m^2}} - \frac{1}{1 + m^2} = \frac{m(2m + \pi\sqrt{1 + m^2})}{2(1 + m^2)} > 0,$$

причем

$$m_0 + \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + m_0^2} - \operatorname{arctg} m_0 = \pi + \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + m_0^2} > \frac{5\pi}{2}, \quad 2\sqrt{2} + \frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} < \frac{5\pi}{2}.$$

Поэтому на интервале $(2\sqrt{2}, m_0)$ существует, и притом единственный, корень уравнения

$$m + \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + m^2} - \operatorname{arctg} m = \frac{5\pi}{2},$$

который обозначим через $m^*$.

Таким образом, неравенство (46) выполнено при $m(c) \in (m^*, m_0)$, а противоположное неравенство — при $m(c) \in [2\sqrt{2}, m^*]$.

Пусть $m(c) = 2\sqrt{2}$. Тогда в силу (42) и п. 3 леммы 4 система (26) имеет единственное решение $\beta$, которое есть (единственный) корень уравнения (43).

Пусть $2\sqrt{2} < m(c) < m^*$. Тогда в предположении, что выполнено (42), на основании п. 3 леммы 4 система (26) имеет единственное решение $\beta$ тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{1+m^2(s)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{1+m^2(c)}-1)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+m^2(c)}\right)\right] \leq \frac{c_{11}+c_{22}}{2},$$

и имеет два различных решения $\beta_1$, $\beta_2$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{c_{11}+c_{22}}{2} < \sqrt{1+m(c)^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+m(c)^2}\right),$$

причем в силу лемм 3, 4 необходимо взять наименьшее по модулю решение этой системы. В обоих случаях это решение есть единственный корень уравнения (43).

Пусть $m = m^*$. Тогда на основании п. 3 леммы 4 и (42) система (26) имеет два различных решения $\beta_1$, $\beta_2$, причем в силу лемм 3, 4 необходимо взять наименьшее по модулю решение этой системы, именно единственный корень уравнения (43).

Пусть $m^* < m < m_0$. В этом случае с учетом (42), (46) и п. 3 леммы 4 система (26) имеет два различных решения $\beta_1$, $\beta_2$, причем необходимо взять наименьшее по модулю решение этой системы, именно единственный корень уравнения (43).

Пусть $0 < m(c) < 2\sqrt{2}$, $c_{12} \neq c_{21}$ и $|\beta| > 1$. Тогда $0 < \frac{\pi}{2}(\sqrt{1+m^2(c)}-1) < \pi$.

Заметим прежде всего, что если найдутся такие $\beta_i$, $|\beta_i| > 1$, $i = 1, 2$, что $m(c) = m(\beta_i, t_i)$ для некоторых $t_i > 0$, $i = 1, 2$, причем $t_1 < \frac{\pi}{\sqrt{\beta_1^2-1}}$ и $t_2 \geq \frac{\pi}{\sqrt{\beta_2^2-1}}$, то вследствие п. 3 лемм 3, 5 выполнено $t_1 < t_2$.

Предположим, что $t < \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$. Тогда $t = \delta(e, c)$ можно вычислить по формуле (24) и имеет место система (26). Предполагая выполненным (42), получим, что на основании п. 3 леммы 4 эта система имеет единственное решение (которое есть единственный корень уравнения (43)) тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{1+m^2(c)}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+m^2(c)}\right) < \frac{c_{11}+c_{22}}{2},$$

и не имеет решений тогда и только тогда, когда

$$\frac{c_{11}+c_{22}}{2} \leq \sqrt{1+m^2(c)}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+m^2(c)}\right). \tag{47}$$

Таким образом, п. 3(a) теоремы 5 доказан.

(b) Предположим, что $t = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$. Тогда

$$n = 0, \quad m(c) = \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}, \quad t = \delta(e, c) = \pi m(c)$$

в силу (6). Из (8) следует, что в этом случае выполнено равенство в (47).

Предположим теперь, что равенство в (47) помимо $t = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$ выполнено для некоторого $t_2$, $\frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}} < t_2 < \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$. Тогда на основании п. 3 леммы 5 получаем, что $t_2 > \pi m(c)$, т. е. $\delta(e,c) = \pi m(c)$. Это завершает доказательство п. 3(b) теоремы 5.

(c) Предположим, наконец, что $\frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}} < t < \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$ и выполнено строгое неравенство (47), которое можно переписать в виде

$$-\frac{c_{11}+c_{22}}{2\sqrt{1+m^2(c)}} > \cos\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{1+m^2(c)}+1)\right). \tag{48}$$

Из (6) следует, что тогда $m = m(c) > 0$, $n < 0$, $t = \delta(e,c)$ можно вычислить по формуле (31). На основании леммы 6 система (33) имеет бесконечное множество решений, и в силу лемм 5, 6 необходимо взять наименьшее по модулю решение этой системы. Так как $0 < m(c) < 2\sqrt{2}$, то $\pi < \frac{\pi}{2}(\sqrt{1+m^2(c)}+1) < 2\pi$. Поэтому искомое решение системы (33) — единственное решение уравнения (44).

Теорема 5 доказана. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Субриманово расстояние в группах Ли SU(2) и SO(3) // Мат. тр. 2015. Т. 18, № 2. С. 3–21.
2. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot–Carathéodory metrics on $S^3$, SO(3), SL(2), and lens spaces // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47, N 4. P. 1851–1878.
3. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли SL(2) // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 527–542.
4. *Зельберг А.* Гармонический анализ и дискретные группы в слабо симметрических пространствах; приложения к теории рядов Дирихле // Математика. 1957. Т. 1, № 4. С. 3–28.


*Статья поступила 25 июня 2015 г.*

Берестовский Валерий Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru

Зубарева Ирина Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
i_gribanova@mail.ru