Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.51

О СУЩЕСТВОВАНИИ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ КЛАССА $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$

М. Г. Григорян, А. А. Саргсян

Аннотация. Доказано, что для любого числа $p \in (0,1)$ существуют функция $g \in L^1[0,1]$ (универсальная функция) и сходящийся к ней ряд Фурье — Уолша со строго убывающими коэффициентами $c_k(g)$ такие, что для каждой функции $f \in L^p[0,1]$ можно найти числа $\delta_k = \pm 1, 0$ и возрастающую последовательность натуральных чисел N_q такие, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \delta_k c_k(g) W_k$ ($\{W_k\}$ — система Уолша) и подпоследовательность $\sigma_{N_q}^{(\alpha)}$, $\alpha \in (-1,0)$, ее чезаровских средних сходятся к f в метрике $L^p[0,1]$.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.508

Ключевые слова: универсальная функция, коэффициенты Фурье, система Уолша, сходимость в метрике.

1. Введение

Пусть $L^p[0,1]$, $p > 0$, — класс всех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций, для которых

$$\int\limits_0^1 |f(x)|^p \, dx < \infty,$$

и пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система на $[0,1]$.

Определение. Будем говорить, что функция $g \in L^1[0,1]$ *универсальна для класса* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$, *относительно коэффициентов Фурье по системе* $\{\varphi_k\}$, если для каждой функции $f \in L^p[0,1]$ можно найти числа $\delta_k = \pm 1, 0$ такие, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(g) \varphi_k(x), \quad \text{где } c_k(g) = \int\limits_0^1 g(x)\varphi_k(x)\, dx,$$

сходится к f в метрике $L^p[0,1]$.

Замечание. Каковы бы ни были число $p \geq 1$ и полная ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_k\}$, не существует функции $g \in L^1[0,1]$, которая была бы универсальной для класса $L^p[0,1]$ относительно коэффициентов Фурье по этой системе.

Нетрудно убедиться, что, допустив обратное, приходим к противоречию. Действительно, если при некоторых $p \geq 1$ и полной ограниченной ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$ для класса $L^p[0,1]$ существует определенная нами универсальная функция $g \in L^1[0,1]$, то для любого натурального числа $k_0 > 1$

такого, что $c_{k_0}(g) \neq 0$, для функции $k_0 c_{k_0}(g)\varphi_{k_0}(x)$ найдутся числа $\delta_k = \pm 1, 0$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{m}\delta_k c_k(g)\varphi_k - k_0 c_{k_0}(g)\varphi_{k_0}\right\|_{L^p} = 0.$$

Отсюда сразу получим $\delta_{k_0} = k_0$.

Здесь и в дальнейшем $||\cdot||_{L^p} = \left(\int\limits_0^1 (\cdot)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$ — норма пространства $L^p[0,1]$, $p \geq 1$.

Для системы Уолша $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ верна

Теорема 1. *Для любого числа $p \in (0,1)$ существует функция $g \in L^1[0,1]$, универсальная для класса $L^p[0,1]$ относительно ее коэффициентов Фурье по системе Уолша.*

Оказывается, что универсальную функцию $g \in L^1[0,1]$ можно построить со сходящимся к ней по норме $L^1[0,1]$ рядом Фурье — Уолша со строго убывающими коэффициентами. Более того, справедлива

Теорема 2. *Для любого числа $p \in (0,1)$ существуют такие функция $g \in L^1[0,1]$ и сходящийся к ней ряд Фурье — Уолша со строго убывающими коэффициентами $c_k(g)$, что для каждой функции $f \in L^p[0,1]$ можно найти такие числа $\delta_k = \pm 1, 0$ и возрастающую последовательность натуральных чисел N_q, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\delta_k c_k(g)W_k$ и подпоследовательность $\sigma_{N_q}^{(\alpha)}$, $\alpha \in (-1,0)$, ее чезаровских средних сходятся к f в метрике $L^p[0,1]$.*

Отметим, что чезаровский метод суммирования (C,α) (см. [1]) при $\alpha \in (-1,0)$ не является регулярным (см. [2]).

Существование функций, универсальных в том или ином смысле в различных классах функций, изучены, например в [3–6]. По сути, первый тип универсальной функции был рассмотрен Биркхофом [3]:

Теорема (Биркхоф). *Существует целая функция $g(z)$, которая универсальна относительно сдвигов, т. е. для любых целой функции $f(z)$ и числа $r > 0$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что последовательность сдвигов $\{g(z+n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(z)$ на круге $|z| \leq r$.*

В 1952 г. Маклейн [4] доказал аналогичный результат для другого типа универсальности.

Теорема (Маклейн). *Существует целая функция $g(z)$, которая универсальна относительно производных, т. е. для любых целой функции $f(z)$ и числа $r > 0$ можно найти возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что последовательность производных $\{g^{(n_k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(z)$ на круге $|z| \leq R$.*

В 1987 г. Гроссе-Эрдман [5] доказал существование функции с универсальным рядом Тейлора.

Теорема (Гроссе-Эрдман). *Существует функция $g(x) \in C^{\infty}(\mathscr{R})$ с $g(0) = 0$, ряд Тейлора которой в точке $x = 0$ локально равномерно универсален в $C(\mathscr{R})$,* *т. е. для любых функции $f(x) \in C(\mathscr{R})$ с $f(0) = 0$ и числа $r > 0$ существует подпоследовательность*

$$S_{n_k}(g, 0) = \sum_{m=1}^{n_k} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

частичных сумм ряда Тейлора функции $g(x)$, которая равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $|x| \le r$.

Заметим, что ряд Фурье определенной нами универсальной функции является универсальным рядом в соответствующем смысле.

Вопросам существования рядов по разным классическим ортогональным системам, универсальных относительно подпоследовательностей частичных сумм, перестановок, подрядóв, знаков коэффициентов и т. д., посвящено много работ. Наиболее общие результаты были получены Д. Е. Меньшовым, А. А. Талаляном, П. Л. Ульяновым и их учениками (см. [7–20]).

В связи с доказываемыми в работе теоремами возникает следующий вопрос, ответ на который нам неизвестен.

Вопрос. *Верна ли теорема* 2 (*или хотя бы теорема* 1) *для других полных ортонормированных систем: тригонометрической системы, системы Франклина и т. д.?*

2. Основные леммы

Напомним определение системы Уолша $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Функции системы Уолша определяются функциями системы Радемахера

$$R_n(x) = \operatorname{sign}(\sin 2^n \pi x), \quad x \in [0,1], \ n = 1, 2, \dots,$$

следующим образом (см. [21]): $W_0(x) \equiv 1$, а для $n \ge 1$

$$W_n(x) = \prod_{i=1}^{p} R_{k_i+1}(x),$$

где $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_p}$ $(k_1 > k_2 > \dots > k_p)$.

Известно (см. [21]), что для любого натурального числа m

$$\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} W_k(x) = \begin{cases} 2^m, & \text{если } x \in [0, 2^{-m-1}), \\ -2^m, & \text{если } x \in (2^{-m-1}, 2^{-m}), \\ 0, & \text{если } x \in (2^{-m}, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\left\| \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} W_k \right\|_{L^1} = 1, \quad \left\| \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} W_k \right\|_{L^2} = 2^{\frac{m}{2}}, \tag{1}$$

$$\left\| \sum_{k=2^m}^{M} a_k W_k \right\|_{L_1} \le \left\| \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k W_k \right\|_{L_2}, \tag{2}$$

где $M \in [2^m, 2^{m+1})$ и $\{a_k\}_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}$ — произвольные числа.

Обозначим через μE меру Лебега измеримого множества $E \subset [0,1]$, а через $\chi_E(x)$ — ее характеристическую функцию.

В дальнейшем будем пользоваться следующей леммой, доказанной в [22].

Лемма 1. *Для любого двоичного промежутка* $\Delta = \left[\frac{i}{2^\sigma}; \frac{i+1}{2^\sigma}\right)$, $0 \le i < 2^\sigma$, *и для любого натурального числа* $m > \sigma$ *такого, что* $\frac{m-\sigma}{2}$ *целое, существует многочлен по системе Уолша*

$$P(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \alpha_k W_k(x)$$

такой, что

1) $|\alpha_k| = 2^{-\frac{m+\sigma}{2}}$ *при* $2^m \le k < 2^{m+1}$,

2) $P(x) = 1$, *если* $x \in E_1$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu\Delta$,

3) $P(x) = -1$, *если* $x \in E_2$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu\Delta$,

4) $P(x) = 0$, *если* $x \notin \Delta$, *где* E_1 *и* E_2 *суть конечные объединения двоичных промежутков.*

Основным средством при доказательстве теоремы 2 является лемма 3, для доказательства которой сначала докажем лемму 2.

Лемма 2. *Пусть* $p \in (0, 1)$. *Каковы бы ни были натуральное число* n_0 *и двоичный интервал* $\Delta \subset [0, 1]$, *для любых чисел* $\varepsilon > 0$, $l \ne 0$ *и натурального числа* q *существуют многочлены по системе Уолша*

$$P_q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_q}-1} a_k W_k(x), \quad H_q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_q}-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1, 0,$$

такие, что $H_q(x) = 0$ *вне* Δ,

1) $0 < a_{k+1} \le a_k < \varepsilon$ *для всех* $k \in [2^{n_0}, 2^{n_q} - 1)$,

2) $\int\limits_0^1 |l\chi_\Delta(x) - H_q(x)|^p \, dx = 2^{q(p-1)}|l|^p \mu\Delta$,

3) $\max\limits_{2^{n_0} \le M < 2^{n_q}} \int\limits_0^1 \left| \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x) \right|^p dx < 2^q |l|^p (\mu\Delta)^{\frac{p}{2}}$,

4) $\max\limits_{2^{n_0} \le M < 2^{n_q}} \int\limits_0^1 \left| \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right| dx < \varepsilon$.

Доказательство проведем по индукции относительно числа q. Пусть $\Delta = \left[\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}\right] \subset [0, 1]$. Выберем натуральное число $\sigma_1 > \sigma$ так, что

$$|l| 2^{-\frac{\sigma_1+1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Интервал Δ представим в виде объединения двоичных промежутков: $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{N_1} \Delta_i^{(1)}$, с мерой $\mu\Delta_i^{(1)} = 2^{-\sigma_1 - 1}$, $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, что $N_1 = 2^{\sigma_1 - \sigma + 1}$.

Полагая $\sigma_0^{(1)} \equiv n_0 - 1$, для каждого натурального числа $i \in [1, N_1]$ выберем натуральное число $\sigma_i^{(1)} > \sigma_{i-1}^{(1)}$ $(\sigma_1^{(1)} > \sigma_1)$ так, чтобы выполнились следующие условия:

(a) $\frac{\sigma_i^{(1)} - \sigma_1 - 1}{2}$ целое,

(b) $\left(\sigma_i^{(1)} - \sigma_{i-1}^{(1)}\right)|l| 2^{-\frac{\sigma_i^{(1)} + \sigma_1 + 1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4N_1}$,

(c) $2|l| 2^{-\frac{\sigma_i^{(1)}+1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Из (3) непосредственно следует, что

$$|l| 2^{-\frac{\sigma_1^{(1)} + \sigma_1 + 1}{2}} < \varepsilon. \tag{4}$$

Последовательно применив лемму 1 для каждого из промежутков $\Delta_i^{(1)}$, $i = \overline{1, N_1}$, и соответствующего числа $\sigma_i^{(1)}$, найдем полиномы по системе Уолша

$$\overline{H}_i^{(1)}(x) = \sum_{k=2^{\sigma_i^{(1)}}}^{2^{\sigma_i^{(1)}+1}-1} \bar{a}_k W_k(x), \quad i = \overline{1, N_1},$$

такие, что

$$\bar{a}_k = \pm l 2^{-\frac{\sigma_i^{(1)}+\sigma_1+1}{2}} \quad \text{при } k \in [2^{\sigma_i^{(1)}}, 2^{\sigma_i^{(1)}+1}), \tag{5}$$

$$\overline{H}_i^{(1)}(x) = \begin{cases} -l & \text{при } x \in \overline{E_i}^{(1)} \subset \Delta_i^{(1)}, \\ l & \text{при } x \in \overline{\overline{E_i}}^{(1)} \subset \Delta_i^{(1)}, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_i^{(1)}, \end{cases} \quad \mu \overline{E_i}^{(1)} = \frac{\mu\Delta_i^{(1)}}{2}, \ \mu \overline{\overline{E_i}}^{(1)} = \frac{\mu\Delta_i^{(1)}}{2}.$$

Отсюда, полагая

$$H_1(x) = \sum_{i=1}^{N_1} \overline{H}_i^{(1)}(x),$$

получим

$$H_1(x) = \begin{cases} -l & \text{при } x \in E_1 \subset \Delta, \\ l & \text{при } x \in \Delta \setminus E_1, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta, \end{cases} \quad \mu E_1 = \frac{\mu\Delta}{2}. \tag{6}$$

Так как полином $\overline{H}_i^{(1)}(x)$ есть линейная комбинация функций $\sigma_i^{(1)}$-й группы системы Уолша, ясно, что множество E_1 можно представить в виде объединения некоторого числа N_2 двоичных интервалов: $E_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{N_2} \Delta_i^{(2)}$, с мерой $\mu\Delta_i^{(2)} = 2^{-\sigma_{N_1}^{(1)}-1}$, $i = \overline{1, N_2}$.

Для каждого натурального числа $i \in [1, N_1]$, полагая

$$\begin{gathered} \bar{a}_k = l 2^{-\frac{\sigma_i^{(1)}+\sigma_1+1}{2}} \quad \text{при } k \in [2^{\sigma_{i-1}^{(1)}+1}, 2^{\sigma_i^{(1)}}), \\ \bar{\delta}_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k \in [2^{\sigma_{i-1}^{(1)}+1}, 2^{\sigma_i^{(1)}}), \\ 1 & \text{при } k \in [2^{\sigma_i^{(1)}}, 2^{\sigma_i^{(1)}+1}), \end{cases} \\ a_k = |\bar{a}_k| \quad \delta_k = \bar{\delta}_k \cdot \frac{\bar{a}_k}{|\bar{a}_k|}, \quad k \in [2^{n_0}, 2^{\sigma_{N_1}^{(1)}+1}), \end{gathered} \tag{7}$$

убедимся, что полиномы

$$P_1(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{\sigma_{N_1}^{(1)}+1}-1} a_k W_k(x), \quad H_1(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{\sigma_{N_1}^{(1)}+1}-1} \delta_k a_k W_k(x)$$

удовлетворяют всем утверждениям леммы 2 при $q = 1$. Действительно, утверждение 1 следует из (4), (5), (7) и монотонности чисел $\sigma_i^{(1)}$, $i = \overline{1, N_1}$. Утверждение 2 сразу вытекает из (6). Утверждение 3 следует из (1), (2), (6) и неравенства

Гёльдера, так как для любого натурального числа $M \in [2^{n_0}, 2^{\sigma^{(1)}_{N_1}+1})$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x)\right|^p dx \le \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\le \left(\int_0^1 |H_1(x)|^2\, dx\right)^{\frac{p}{2}} = (l^2\mu(\Delta\setminus E_1) + l^2\mu E_1)^{\frac{p}{2}} < 2|l|^p(\mu\Delta)^{\frac{p}{2}}.$$

Для доказательства утверждения 4 представим натуральное число $M \in [2^{n_0}, 2^{\sigma^{(1)}_{N_1}+1})$ в виде $M = 2^{\bar n} + j$, $j \in [0, 2^{\bar n})$, где $\bar n \in \left(\sigma^{(1)}_{m-1}, \sigma^{(1)}_m\right]$ для некоторого $m \in [1, N_1]$. Для каждого натурального числа $n \in \left[n_0, \sigma^{(1)}_{N_1}\right]$ обозначим $b_n = a_k$, $k \in [2^n, 2^{n+1})$ (коэффициенты a_k функций n-й группы системы Уолша равны между собой). Учитывая (1)–(3), (5), (7) и условие (b) выбора $\sigma^{(1)}_i$, имеем

$$\sum_{n=n_0}^{\sigma^{(1)}_{N_1}} b_n = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{n=\sigma^{(1)}_{i-1}+1}^{\sigma^{(1)}_i} b_n = \sum_{i=1}^{N_1} (\sigma^{(1)}_i - \sigma^{(1)}_{i-1})|l|2^{-\frac{\sigma^{(1)}_i+\sigma_1+1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4};$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x)\right| dx \le \sum_{n=n_0}^{\bar n-1} b_n + \int_0^1 \left|\sum_{k=2^{\bar n}}^{2^{\bar n}+j} a_k W_k(x)\right| dx$$

$$\le \sum_{n=n_0}^{\sigma^{(1)}_{N_1}} b_n + \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=2^{\bar n}}^{2^{\bar n+1}-1} b_{\bar n} W_k(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4} + |l|2^{-\frac{\sigma^{(1)}_m+\sigma_1+1}{2}} 2^{\frac{\bar n}{2}} < \varepsilon.$$

Допустим, что для $q > 1$ уже выбраны натуральные числа $\sigma^{(1)}_1 < \dots < \sigma^{(1)}_{N_1} < \dots < \sigma^{(q-1)}_1 < \dots < \sigma^{(q-1)}_{N_{q-1}}$, множество $E_{q-1} \subset \Delta$ и полиномы

$$P_{q-1}(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{\sigma^{(q-1)}_{N_{q-1}}+1}-1} a_k W_k(x), \quad H_{q-1}(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{\sigma^{(q-1)}_{N_{q-1}}+1}-1} \delta_k a_k W_k(x),$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

(a′) $\frac{\sigma^{(\nu)}_i - \sigma^{(\nu-1)}_{N_{\nu-1}} - 1}{2}$ целое ($\sigma^{(0)}_{N_0} \equiv \sigma_1$),

(b′) $\left(\sigma^{(\nu)}_i - \sigma^{(\nu)}_{i-1}\right)2^{\nu-1}|l|2^{-\frac{\sigma^{(\nu)}_i+\sigma^{(\nu-1)}_{N_{\nu-1}}+1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}N_\nu}$,

(c′) $2^\nu|l|2^{-\frac{\sigma^{(\nu)}_i+1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$a_k = 2^{\nu-1}|l|2^{-\frac{\sigma^{(\nu)}_i+\sigma^{(\nu-1)}_{N_{\nu-1}}+1}{2}} \quad \text{при } k \in [2^{\sigma^{(\nu)}_{i-1}+1}, 2^{\sigma^{(\nu)}_i+1}), \tag{8}$$

$$\sigma^{(\nu)}_0 \equiv \begin{cases} \sigma^{(\nu-1)}_{N_{\nu-1}} & \text{при } \nu > 1,\\ n_0 - 1 & \text{при } \nu = 1,\end{cases}$$

для любых натуральных чисел $i \in [1, N_\nu]$ и $\nu \in [1, q-1]$. Кроме того,

$$\sum_{n=n_0}^{\sigma^{(q-1)}_{N_{q-1}}} b_n < \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \quad \text{где } b_n \equiv a_k,\ k \in [2^n, 2^{n+1}), \tag{9}$$

$$H_{q-1}(x)=\begin{cases}-(2^{q-1}-1)l & \text{при } x\in E_{q-1},\\ l & \text{при } x\in\Delta\setminus E_{q-1},\\ 0 & \text{при } x\notin\Delta,\end{cases}\quad \mu E_{q-1}=\frac{\mu\Delta}{2^{q-1}},\tag{10}$$

и множество E_{q-1} можно представить как объединение N_q двоичных промежутков

$$E_{q-1}=\bigcup_{i=1}^{N_q}\Delta_i^{(q)}\quad \text{с мерой } \mu\Delta_i^{(q)}=2^{-\sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)}-1},\ i=\overline{1,N_q}.$$

Для каждого натурального числа $i\in[1,N_q]$ выберем натуральное число $\sigma_i^{(q)}>\sigma_{i-1}^{(q)}$ ($\sigma_0^{(q)}\equiv\sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)}$) так, чтобы выполнились следующие условия:

(a$''$) $\frac{\sigma_i^{(q)}-\sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)}-1}{2}$ целое,

(b$''$) $\bigl(\sigma_i^{(q)}-\sigma_{i-1}^{(q)}\bigr)2^{q-1}|l|2^{-\frac{\sigma_i^{(q)}+\sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)}+1}{2}}<\frac{\varepsilon}{2^{q+1}N_q}$,

(c$''$) $2^q|l|2^{-\frac{\sigma_i^{(q)}+1}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Последовательно применив лемму 1 для каждого из $\Delta_i^{(q)}\subset E_{q-1}$, $i=\overline{1,N_q}$, и соответствующего числа $\sigma_i^{(q)}$, найдем полиномы по системе Уолша

$$\overline{H}_i^{(q)}(x)=\sum_{k=2^{\sigma_i^{(q)}}}^{2^{\sigma_i^{(q)}+1}-1}\bar a_kW_k(x),\quad i=\overline{1,N_q},$$

такие, что

$$\bar a_k=\pm2^{q-1}l2^{-\frac{\sigma_i^{(q)}+\sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)}+1}{2}}\quad \text{при } k\in[2^{\sigma_i^{(q)}},2^{\sigma_i^{(q)}+1}),\tag{11}$$

$$\overline{H}_i^{(q)}(x)=\begin{cases}-2^{q-1}l & \text{при } x\in\overline{E}_i^{(q)}\subset\Delta_i^{(q)},\\ 2^{q-1}l & \text{при } x\in\overline{\overline{E}}_i^{(q)}\subset\Delta_i^{(q)},\\ 0 & \text{при } x\notin\Delta_i^{(q)},\end{cases}$$

$$\mu\overline{E}_i^{(q)}=\frac{\mu\Delta_i^{(q)}}{2},\quad \mu\overline{\overline{E}}_i^{(q)}=\frac{\mu\Delta_i^{(q)}}{2}.$$

Отсюда, полагая

$$H_q(x)=H_{q-1}(x)+\sum_{i=1}^{N_q}\overline{H}_i^{(q)}(x)$$

и учитывая (10), получим

$$H_q(x)=\begin{cases}-(2^q-1)l & \text{при } x\in E_q\subset E_{q-1},\\ l & \text{при } x\in\Delta\setminus E_q,\\ 0 & \text{при } x\notin\Delta,\end{cases}\qquad \mu E_q=\frac{\mu\Delta}{2^q}.\tag{12}$$

Для каждого $i\in[1,N_q]$, полагая

$$\begin{gathered}\bar a_k=2^{q-1}l2^{-\frac{\sigma_i^{(q)}+\sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)}+1}{2}},\quad k\in[2^{\sigma_{i-1}^{(q)}+1},2^{\sigma_i^{(q)}}),\\ \bar\delta_k=\begin{cases}0 & \text{при } k\in[2^{\sigma_{i-1}^{(q)}+1},2^{\sigma_i^{(q)}}),\\ 1 & \text{при } k\in[2^{\sigma_i^{(q)}},2^{\sigma_i^{(q)}+1}),\end{cases}\\ a_k=|\bar a_k|,\quad \delta_k=\bar\delta_k\cdot\frac{\bar a_k}{|\bar a_k|},\ k\in[2^{n_0},2^{\sigma_{N_q}^{(q)}+1}),\end{gathered}\tag{13}$$

убедимся, что полиномы

$$P_q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_q}-1} a_k W_k(x), \quad H_q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_q}-1} \delta_k a_k W_k(x),$$

где $n_q \equiv \sigma_{N_q}^{(q)} + 1$, удовлетворяют всем утверждениям леммы 2. Действительно, утверждение 1 следует из (4), (8), (11), (13) и монотонности чисел $\sigma_i^{(\nu)}$, $i \in [1, N_\nu]$, $\nu \in [1, q]$. Утверждение 2 сразу вытекает из (11), утверждение 3 — из (1), (2), (12) и неравенства Гёльдера, так как для любого натурального числа $M \in [2^{n_0}, 2^{n_q})$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x) \right|^p dx \le \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\le \left(\int_0^1 |H_q(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{p}{2}} < (l^2 \mu(\Delta \setminus E_q) + l^2 2^{2q} \mu E_q)^{\frac{p}{2}} < 2^q |l|^p (\mu\Delta)^{\frac{p}{2}}.$$

Для доказательства утверждения 4 представим натуральное число $M \in [2^{n_0}, 2^{n_q})$ в виде $M = 2^{\bar{n}} + j$, $j \in [0, 2^{\bar{n}})$. Рассмотрим только случай $\bar{n} \in \left(\sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)}, \sigma_{N_q}^{(q)}\right]$, так как остальные рассматриваются на предыдущих шагах индукции. Пусть $\bar{n} \in \left(\sigma_{m-1}^{(q)}, \sigma_m^{(q)}\right]$ для некоторого $m \in [1, N_q]$. Для каждого натурального числа $n \in \left[n_0, \sigma_{N_q}^{(q)}\right]$, полагая $b_n \equiv a_k$ при $k \in [2^n, 2^{n+1})$ и учитывая (1), (2), (9), (11), (13), условие (c′) выбора $\sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)}$ и условие (b″) выбора $\sigma_i^{(q)}$, имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right| dx \le \sum_{n=n_0}^{\bar{n}-1} b_n + \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{\bar{n}}}^{2^{\bar{n}}+j} a_k W_k(x) \right| dx$$

$$\le \sum_{n=n_0}^{\sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)}} b_n + \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{n=\sigma_{i-1}^{(q)}+1}^{\sigma_i^{(q)}} b_n + \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=2^{\bar{n}}}^{2^{\bar{n}+1}-1} b_{\bar{n}} W_k(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \sum_{i=1}^{N_q} (\sigma_i^{(q)} - \sigma_{i-1}^{(q)}) 2^{q-1} |l| 2^{-\frac{\sigma_i^{(q)} + \sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)} + 1}{2}} + 2^{q-1} |l| 2^{-\frac{\sigma_m^{(q)} + \sigma_{N_{q-1}}^{(q-1)} + 1}{2}} 2^{\frac{\bar{n}}{2}} < \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть даны числа $p \in (0,1)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$ и полином $f(x)$ по системе Уолша. Тогда можно найти полиномы по системе Уолша вида*

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x), \quad H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1, 0,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

1) $0 < a_{k+1} < a_k < \varepsilon$, $k \in [2^{n_0}, 2^n - 1)$,

2) $\int_0^1 |f(x) - H(x)|^p \, dx < \varepsilon$,

3) $\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x) \right|^p dx \le 4 \int_0^1 |f(x)|^p \, dx$,

4) $\max\limits_{2^{n_0}\le M<2^n}\int\limits_0^1\left|\sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M}a_kW_k(x)\right|dx<\varepsilon.$

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\bar\nu_0}\bar l_m\chi_{\overline{\Delta}_m}(x),$$

где $\bar l_m\ne 0$, $m\in[1,\bar\nu_0]$, и $\{\overline{\Delta}_m\}_{m=1}^{\bar\nu_0}$ — попарно не пересекающиеся двоичные промежутки, содержащиеся в $[0,1]$. Выберем натуральное число q так, что

$$\max_{1\le m\le\bar\nu_0}\{|\bar l_m|2^{q(p-1)}\}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\int\limits_0^1|f(x)|^p\,dx\right\}. \tag{14}$$

Разобьем $\bigcup\limits_{m=1}^{\bar\nu_0}\overline{\Delta}_m$ на более мелкие двоичные промежутки $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\nu_0}$ ($\mu\Delta_j<\min_m\{\mu\overline{\Delta}_m\}$), равные по длине и попарно не пересекающиеся, так, что

$$\max_{1\le j\le\nu_0}\{2^q|l_j|^p(\mu\Delta_j)^{\frac p2}\}<\int\limits_0^1|f(x)|^p\,dx, \tag{15}$$

где $l_j=\bar l_m$ при $\Delta_j\subset\overline{\Delta}_m$, и представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\nu_0}l_j\chi_{\Delta_j}(x).$$

Последовательно применяя лемму 2 для каждого из Δ_j, $j=\overline{1,\nu_0}$, и учитывая (14) и (15), найдем полиномы по системе Уолша

$$\overline{P}_q^{(j)}(x)=\sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{2^{n_j}-1}\bar a_k^{(j)}W_k(x),\quad \overline{H}_q^{(j)}(x)=\sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{2^{n_j}-1}\delta_k^{(j)}\bar a_k^{(j)}W_k(x),\quad \delta_k^{(j)}=\pm1,0,$$

такие, что $\overline{H}_q^{(j)}(x)=0$ вне Δ_j,

$$\begin{gathered}0<\bar a_{k+1}^{(1)}\le\bar a_k^{(1)}<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{для всех } k\in[2^{n_0},2^{n_1}-1),\\ 0<\bar a_{k+1}^{(j)}\le\bar a_k^{(j)}<\bar a_{2^{n_{j-1}}-1}^{(j-1)}\ \text{для всех } k\in[2^{n_{j-1}},2^{n_j}-1)\text{ и } j\in[2,\nu_0];\end{gathered} \tag{16}$$

$$\int\limits_0^1\left|l_j\chi_{\Delta_j}(x)-\overline{H}_q^{(j)}(x)\right|^p dx=2^{q(p-1)}|l_j|^p\mu\Delta_j<\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\int\limits_0^1|f(x)|^p\,dx\right\}\mu\Delta_j; \tag{17}$$

$$\max_{2^{n_{j-1}}\le M<2^{n_j}}\int\limits_0^1\left|\sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{M}\delta_k^{(j)}\bar a_k^{(j)}W_k(x)\right|^p dx<2^q|l_j|^p(\mu\Delta_j)^{\frac p2}<\int\limits_0^1|f(x)|^p\,dx; \tag{18}$$

$$\max_{2^{n_{j-1}}\le M<2^{n_j}}\int\limits_0^1\left|\sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{M}\bar a_k^{(j)}W_k(x)\right|dx<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}. \tag{19}$$

Положим

$$\overline{P}(x)=\sum_{j=1}^{\nu_0}\overline{P}_q^{(j)}(x)=\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{\nu_0}}-1}\bar{a}_kW_k(x),\quad \overline{H}(x)=\sum_{j=1}^{\nu_0}\overline{H}_q^{(j)}(x)=\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{\nu_0}}-1}\delta_k\bar{a}_kW_k(x),$$

где $\bar{a}_k=\bar{a}_k^{(j)}$ и $\delta_k=\delta_k^{(j)}$ при $k\in[2^{n_{j-1}},2^{n_j})$. Из (16) и (17) следует, что

$$0<\bar{a}_{k+1}\le\bar{a}_k<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{для всех } k\in[2^{n_0},2^{n_{\nu_0}}),\tag{20}$$

$$\int_0^1|f(x)-\overline{H}(x)|^p\,dx=\sum_{k=1}^{\nu_0}\int_0^1\left|l_k\chi_{\Delta_k}(x)-\bar{H}_q^{(k)}(x)\right|^p dx<\frac{\varepsilon}{2}\nu_0\mu\Delta_{\nu_0}\le\frac{\varepsilon}{2}.\tag{21}$$

Далее, пусть $M\in[2^{n_0},2^{n_{\nu_0}})$ — произвольное натуральное число. Тогда $M\in[2^{n_{j-1}},2^{n_j})$ для некоторого $j\in[1,\nu_0]$. Учитывая (17)–(19), имеем

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\sum_{k=2^{n_0}}^{M}\delta_k\bar{a}_kW_k(x)\right|^p dx&\le\int_0^1\left|\sum_{m=1}^{j-1}\overline{H}_q^{(m)}(x)\right|^p dx+\int_0^1\left|\sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{M}\delta_k^{(j)}a_k^{(j)}W_k(x)\right|^p dx\\&\le\sum_{m=1}^{j-1}\int_0^1\left|l_m\chi_{\Delta_m}(x)-\overline{H}_q^{(m)}(x)\right|^p dx+\int_0^1\left|\sum_{m=1}^{j-1}l_m\chi_{\Delta_m}(x)\right|^p dx+\int_0^1|f(x)|^p\,dx\\&<\nu_0\mu\Delta_{\nu_0}\int_0^1|f(x)|^p\,dx+\sum_{m=1}^{j-1}|l_m|^p\mu\Delta_m+\int_0^1|f(x)|^p\,dx<3\int_0^1|f(x)|^p\,dx,\end{aligned}\tag{22}$$

$$\int_0^1\left|\sum_{k=2^{n_0}}^{M}\bar{a}_kW_k(x)\right|dx\le\sum_{j=1}^{\nu_0}\max_{2^{n_{j-1}}\le N<2^{n_j}}\int_0^1\left|\sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{N}\bar{a}_k^{(j)}W_k(x)\right|dx<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{23}$$

Таким образом, полиномы $\overline{P}(x)$ и $\overline{H}(x)$ удовлетворяют всем утверждениям леммы 3, за исключением утверждения 1. Чтобы получить строгие неравенства между коэффициентами, подберем натуральное число N_0 так, что

$$2^{-pN_0}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\int_0^1|f(x)|^p\,dx\right\},\tag{24}$$

и положим

$$P(x)=\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{\nu_0}}-1}a_kW_k(x),\quad H(x)=\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{\nu_0}}-1}\delta_ka_kW_k(x),$$

где

$$a_k=\bar{a}_k+2^{-(N_0+k)}.\tag{25}$$

Нетрудно убедиться, что полиномы $P(x)$ и $H(x)$ удовлетворяют всем утверждениям леммы 3. Действительно, утверждение 1 сразу следует из (20), (24) и (25). Далее, из (21)–(25) вытекает, что

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)-H(x)|^p\,dx&\le\int_0^1|f(x)-\overline{H}(x)|^p\,dx+\int_0^1\left|\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{\nu_0}}-1}\delta_k2^{-(N_0+k)}W_k(x)\right|^p dx\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\int_0^1\left(\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{\nu_0}}-1}2^{-(N_0+k)}\right)^p dx<\frac{\varepsilon}{2}+2^{-pN_0}<\varepsilon;\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x) \right|^p dx \le \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k \bar{a}_k W_k(x) \right|^p dx$$

$$+ \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k 2^{-(N_0+k)} W_k(x) \right|^p dx \le 3 \int_0^1 |f(x)|^p \, dx + \int_0^1 \left(\sum_{k=2^{n_0}}^{M} 2^{-(N_0+k)} \right)^p dx$$

$$< 3 \int_0^1 |f(x)|^p \, dx + 2^{-pN_0} < 4 \int_0^1 |f(x)|^p \, dx;$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right| dx \le \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \bar{a}_k W_k(x) \right| dx$$

$$+ \int_0^1 \left(\sum_{k=2^{n_0}}^{M} 2^{-(N_0+k)} \right) dx < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-N_0} < \varepsilon$$

справедливы для любого натурального числа $M \in [2^{n_0}, 2^{n_{\nu_0}})$.

Лемма 3 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $p \in (0,1)$ и

$$\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1], \tag{26}$$

есть последовательность всевозможных полиномов по системе Уолша с рациональными коэффициентами.

Пусть n_0 — фиксированное натуральное число. Применяя лемму 3, можно найти полиномы по системе Уолша вида

$$P_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{n_m}-1} a_k^{(m)} W_k(x), \quad H_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{n_m}-1} \delta_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k(x), \quad \delta_k^{(m)} = \pm 1, 0,$$

которые для каждого натурального числа m удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} 0 < a_{k+1}^{(1)} < a_k^{(1)} \quad \forall k \in [2^{n_0}, 2^{n_1} - 1), \\ 0 < a_{k+1}^{(m)} < a_k^{(m)} < \min\{2^{-m}, a_{2^{n_{m-1}}-1}^{(m-1)}\} \quad \forall k \in [2^{n_{m-1}}, 2^{n_m} - 1),\ m > 1; \end{gathered} \tag{27}$$

$$\int_0^1 |H_m(x) - f_m(x)|^p \, dx < 2^{-m}; \tag{28}$$

$$\max_{2^{n_{m-1}} \le M < 2^{n_m}} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{M} \delta_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k(x) \right|^p dx < 4 \int_0^1 |f_m(x)|^p \, dx; \tag{29}$$

$$\max_{2^{n_{m-1}} \le M < 2^{n_m}} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{M} a_k^{(m)} W_k(x) \right| dx < 2^{-m}. \tag{30}$$

Из (30) непосредственно следует, что

$$\int_0^1 \left|\sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)\right| dx \leq \sum_{m=1}^{\infty} \in t_0^1 |P_m(x)|\, dx < \infty. \tag{31}$$

Положим

$$g(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x) + \sum_{k=0}^{2^{n_0}-1} a_k W_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x), \tag{32}$$

где

$$a_k = a_k^{(m)}, \quad \text{если } k \in [2^{n_{m-1}}, 2^{n_m}),\ m \geq 1, \tag{33}$$

а для $k \in [0, 2^{n_0})$ числа a_l произвольны, монотонно убывают, положительны и такие, что $a_{2^{n_0}-1} > a_{2^{n_0}}$. Очевидно, $a_k \searrow 0$ (см. (27) и (33)).

Из соотношений (31) и (32) следует, что $g \in L^1[0,1]$, стало быть,

$$a_k = a_k(g) = \int_0^1 g(t) W_k(t)\, dt, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Далее, для каждой функции $f \in L^p[0,1]$ можно выбрать полином $f_{\nu_1}(x)$ из последовательности (26) такой, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)|^p\, dx < 2^{-1}.$$

Отсюда, полагая $N_1 = 2^{n_{\nu_1 - 1}}$, $\widetilde{N}_1 = 2^{n_{\nu_1}}$ и учитывая (28) и (29), имеем

$$\int_0^1 |f(x) - H_{\nu_1}(x)|^p\, dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)|^p\, dx + \int_0^1 |H_{\nu_1}(x) - f_{\nu_1}(x)|^p\, dx < 1,$$

$$\max_{N_1 \leq M < \widetilde{N}_1} \int_0^1 \left|\sum_{k=N_1}^{M} \delta_k^{(\nu_1)} a_k^{(\nu_1)} W_k(x)\right|^p dx < 4 \int_0^1 |f_{\nu_1}(x)|^p\, dx.$$

Допустим, что уже выбраны числа $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{q-1}$ и полиномы $H_{\nu_1}(x), \dots, H_{\nu_{q-1}}(x)$, $q > 1$, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1 \left|f(x) - \sum_{j=1}^{n} H_{\nu_j}(x)\right|^p dx < 2^{-n+1} \quad \forall n \in [1, q-1]; \tag{34}$$

$$\max_{N_j \leq M < \widetilde{N}_j} \int_0^1 \left|\sum_{k=N_j}^{M} \delta_k^{(\nu_j)} a_k^{(\nu_j)} W_k(x)\right|^p dx < 4 \int_0^1 |f_{\nu_j}(x)|^p\, dx \quad \forall j \in [1, q-1], \tag{35}$$

где $N_j = 2^{n_{\nu_j - 1}}$ и $\widetilde{N}_j = 2^{n_{\nu_j}}$.

На основе (27) выберем число $\nu_q > \nu_{q-1}$ и функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (26) так, что

$$N_q = 2^{n_{\nu_q - 1}} > 2^q \widetilde{N}_{q-1} V_q, \quad \text{где } V_q = \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{k=N_j}^{\widetilde{N}_j - 1} a_k^{(\nu_j)}\right); \tag{36}$$

$$\int_0^1 \left| \left[f(x) - \sum_{j=1}^{q-1} H_{\nu_j}(x) \right] - f_{\nu_q}(x) \right|^p dx < 2^{-q}. \tag{37}$$

Учитывая (28), (34), (35) и (37), находим

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{j=1}^{q} H_{\nu_j}(x) \right|^p dx \le \int_0^1 \left| \left[f(x) - \sum_{j=1}^{q-1} H_{\nu_j}(x) \right] - f_{\nu_q}(x) \right|^p dx$$
$$+ \int_0^1 |H_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)|^p \, dx < 2^{-q} + 2^{-\nu_q} < 2^{-q+1};$$

$$\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^p \, dx \le \int_0^1 \left| \left[f(x) - \sum_{j=1}^{q-1} H_{\nu_j}(x) \right] - f_{\nu_q}(x) \right|^p dx$$
$$+ \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{j=1}^{q-1} H_{\nu_j}(x) \right|^p dx < 2^{-q} + 2^{-q+2} < 2^{-q+3};$$

$$\max_{N_q \le M < \widetilde{N}_q} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_q}^{M} \delta_k^{(\nu_q)} a_k^{(\nu_q)} W_k(x) \right|^p dx < 4 \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^p \, dx < 2^{-q+5},$$

откуда следует, что, продолжая этот процесс до бесконечности, получим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k W_k(x), \quad \text{где } \delta_k = \begin{cases} \delta_k^{(\nu_q)} = \pm 1, 0 & \text{при } k \in [N_q, \overline{N}_q), \\ 0 & \text{при } k \notin \bigcup\limits_{j=1}^{q} [N_j, \overline{N}_j), \end{cases} \quad q \in \mathbb{N},$$

который сходится к f в метрике $L^p[0,1]$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 |S_N(x) - f(x)|^p \, dx = 0, \quad \text{где } S_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_k a_k W_k(x). \tag{38}$$

Зафиксируем любое $\alpha \in (-1, 0)$. Так как $S_N(x) = S_{\widetilde{N}_{q-1}}(x)$ для всех $N \in [\widetilde{N}_{q-1}, N_q]$, $q = 1, 2, \dots$, учитывая, что (см. [2])

$$\sigma_n^{(\delta)} = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{(\delta-1)} S_k, \quad \delta \ne -1, -2, \dots, \ n = 0, 1, \dots,$$

где $A_0^{(\delta)} = 1$ и $A_n^{(\delta)} = \frac{(\delta+1)(\delta+2)\dots(\delta+n)}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k^{(\delta-1)}$, $n \ge 1$, — числа Чезаро, имеем

$$\sigma_{N_q}^{(\alpha)}(x) - f(x) = \sigma_{N_q}^{(\alpha)}(x) - S_{\widetilde{N}_{q-1}}(x) + S_{\widetilde{N}_{q-1}}(x) - f(x)$$
$$= \frac{1}{A_{N_q}^{(\alpha)}} \sum_{N=0}^{N_q} A_{N_q-N}^{(\alpha-1)} (S_N(x) - S_{\widetilde{N}_{q-1}}(x)) + (S_{\widetilde{N}_{q-1}}(x) - f(x))$$
$$= \frac{1}{A_{N_q}^{(\alpha)}} \sum_{N=0}^{\widetilde{N}_{q-1}} A_{N_q-N}^{(\alpha-1)} (S_N(x) - S_{\widetilde{N}_{q-1}}(x)) + (S_{\widetilde{N}_{q-1}}(x) - f(x)).$$

Используя оценку $B_1(\delta)n^\delta \le A_n^{(\delta)} \le B_2(\delta)n^\delta,\ \delta > -1,\ n \ge 1$ (см. [1, гл. III, § 1]), где $B_1(\delta)$ и $B_2(\delta)$ — положительные константы, зависящие только от δ, и учитывая тот факт, что отношение $\widetilde{N}_{q-1}/N_q$ стремится к нулю при возрастании q (см. (36)), для достаточно больших q имеем

$$\frac{\left|A^{(\alpha)}_{N_q-\widetilde{N}_{q-1}} - A^{(\alpha)}_{N_q}\right|}{\left|A^{(\alpha)}_{N_q}\right|} < B(\alpha)\frac{\widetilde{N}_{q-1}}{N_q}$$

($B(\alpha)$ — положительная константа, зависящая только от α), следовательно,

$$\left|\sigma^{(\alpha)}_{N_q}(x) - f(x)\right| \le \frac{\left|A^{(\alpha)}_{N_q-\widetilde{N}_{q-1}} - A^{(\alpha)}_{N_q}\right|}{\left|A^{(\alpha)}_{N_q}\right|}V_q + |S_{\widetilde{N}_{q-1}}(x) - f(x)|$$
$$< B(\alpha)\frac{\widetilde{N}_{q-1}}{N_q}V_q + |S_{\widetilde{N}_{q-1}}(x) - f(x)|,$$

откуда, применяя (36) и (38), получаем сходимость $\sigma^{(\alpha)}_{N_q}$ к f в метрике $L^p[0,1]$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
2. *Галоян Л. Н.* О сходимости в метриках L_p, $p > 1$, средних Чезаро отрицательного порядка рядов Фурье — Уолша // Изв. НАН Армении. Сер. мат. 2012. Т. 47, № 3. С. 35–54.
3. *Birkhoff G. D.* Démonstration d'un théoréme élémentaire sur les fonctions entiéres // C. R. Acad. Sci. Paris. 1929. V. 189. P. 473–475.
4. *MacLane G. R.* Sequences of derivatives and normal families // J. Anal. Math. 1952. V. 2. P. 72–87.
5. *Grosse-Erdmann K. G.* Holomorphe Monster und universelle Funktionen // Mitt. Math. Sem. Giessen. 1987. Bd 176. S. 1–84.
6. *Joó I.* On the divergence of eigenfunction expansions // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. 1989. V. 32. P. 3–36.
7. *Меньшов Д. Е.* Об универсальных тригонометрических рядах // Докл. АН СССР. 1945. Т. 49, № 2. С. 79–82.
8. *Меньшов Д. Е.* Об универсальных последовательностях функций // Мат. сб. 1964. Т. 65, № 2. С. 272–312.
9. *Талалян А. А.* Представление измеримых функций рядами // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 5. С. 77–141.
10. *Талалян А. А.* О рядах, универсальных относительно перестановок // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1960. Т. 24, № 4. С. 567–604.
11. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 2. С. 3–52.
12. *Олевский А. М.* О некоторых особенностях рядов Фурье в пространствах L^p $(p < 2)$ // Мат. сб. 1968. Т. 77, № 2. С. 251–258.
13. *Иванов В. И.* Представление функций рядами в метрических симметричных пространствах без линейных функционалов // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 34–77.
14. *Кротов В. Г.* Об универсальных рядах Фурье по системе Фабера — Шаудера // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1975. № 4. С. 53–57.
15. *Grigorian M. G.* On the representation of functions by orthogonal series in weighted spaces // Stud. Math. 1999. V. 134, N 3. P. 207–216.
16. *Григорян М. Г.* Об ортогональных рядах, универсальных в $L^p[0,1]$, $p > 0$ // Изв. НАН Армении. Сер. мат. 2002. Т. 37, № 2. С. 3–18.
17. *Геворгян Г. Г., Навасардян К. А.* О рядах Уолша с монотонными коэффициентами // Изв. АН. Сер. мат. 1999. Т. 63, № 1. С. 41–60.
18. *Grigorian M. G., Episkoposian S. A.* On universal trigonometric series in weighted spaces $L^p_\mu[0,2\pi]$ // East J. Approx. 1999. V. 5, N 4. P. 483–492.

19. *Епископосян С. А.* О существовании универсальных рядов по системе Уолша // Изв. НАН Армении. Сер. мат. 2003. Т. 38, № 4. С. 16–32.

20. *Episkoposian S. A.* On the existence of universal series by trigonometric system // J. Funct. Anal. 2006. V. 230, N 1. P. 169–189.

21. *Голубов Б. И., Ефимов А. Ф., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

22. *Навасардян К. А.* О нуль-рядах по двойной системе Уолша // Изв. НАН Армении. Сер. мат. 1994. Т. 29, № 1. С. 50–68.

Статья поступила 21 апреля 2015 г.

Григорян Мартин Геворгович
Ереванский гос. университет,
ул. А. Манукяна, 1, Ереван 0025, Армения
`gmarting@ysu.am`

Саргсян Арцрун Аршалуйсович
Институт синхротронных исследований «КЕНДЛ»,
ул. Ачаряна, 31, Ереван 0040, Армения
`asargsyan@ysu.am`, `asargsyan@asls.candle.am`