Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 512.554.5

ИЗОТОПЫ АЛЬТЕРНАТИВНОГО МОНСТРА И АЛГЕБРЫ СКОСЫРСКОГО

С. В. Пчелинцев

Аннотация. Доказано, что изотопы альтернативного монстра и алгебры Скосырского удовлетворяют тождеству $\prod_{i=1}^{4}[x_i, y_i] = 0$. Следовательно, в самих алгебрах выполнено тождество $\prod_{i=1}^{4}(c, x_i, y_i) = 0$. Показано также, что ни одно из тождеств $\prod_{i=1}^{n}(c, x_i, y_i) = 0$ не выполнено во всех коммутативных альтернативных ниль-алгебрах индекса 3. Тем самым опровергается одна гипотеза Гришкова — Шестакова, относящаяся к строению свободных конечно порожденных коммутативных альтернативных ниль-алгебр индекса 3.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.409

Ключевые слова: альтернативная алгебра, первичная исключительная алгебра, деформации альтернативных алгебр, альтернативный монстр, алгебра Скосырского, тождество, изотоп.

Введение

Если не оговорено противное, термин «алгебра» означает линейную альтернативную алгебру над бесконечным полем Φ характеристики 3. Напомним [1], что алгебра называется *альтернативной*, если в ней выполнены тождества

$$(x, x, y) = 0, \quad (x, y, y) = 0,$$

где (x, y, z) — ассоциатор элементов x, y, z.

Алгебра называется *первичной*, если для любых ее ненулевых идеалов I_1, I_2 произведение $I_1 I_2$ отлично от нуля. Элемент $a \in A$ называется *абсолютным делителем нуля* (сокращенно, *а. д. н.*) в алгебре A, если $a^2 = aAa = 0$. Алгебра называется *невырожденной*, если она не содержит ненулевых а. д. н. Первичные невырожденные алгебры согласно теореме Слэйтера [1] являются либо ассоциативными алгебрами, либо кольцами Кэли — Диксона (центральные порядки в простых алгебрах Кэли — Диксона).

Первичная алгебра, содержащая ненулевые а. д. н., называется *исключительной*. К настоящему времени известно довольно много примеров исключительных алгебр [2–8]. Алгебра, построенная в [2], называется *монстром* и обозначается через $S[X]$; она относительно свободна над X, коммутативна и удовлетворяет тождеству $x^3 = 0$ (*ниль-алгебра индекса* 3). В [3] построена коммутативная алгебра $J_0(G, D)$, в [4] указаны некоммутативные алгебры

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14–21–00065).

$B_0(G, D, \gamma), \gamma \in G_0$, где G — ассоциативная алгебра Грассмана (с единицей), а D — сдвигающее дифференцирование. Отметим, что $J_0(G, D)$ и $B_0(G, D, \gamma)$ являются четными компонентами подходящих супералгебр.

При изучении тождеств исключительных алгебр важную роль играют изотопы и деформации [5–8]. Напомним [1], что изотоп $S^{(c)} = \langle S; +, \cdot_c\rangle$ алгебры S, где c обратим в S, — это пространство S, на котором задано новое умножение $x \cdot_c y = (xc)y$.

Так, в [5] доказано, что первичные алгебры распознают тождества

$$[x, y] = 0(\mathrm{Comm}), \quad [[x, y], z] = 0(St), \quad [[x, y], y] = 0(\mathrm{Eng}),$$

где $[x, y] = xy - yx$ — коммутатор элементов x, y.

В [6, 7] доказано, что любая исключительная алгебра является 2-энгелевой. Кроме того, там же получена характеризация исключительных алгебр на языке «производных коммутаторов» (σ-операций) на исключительных коммутативных алгебрах. В [8] доказано, что существует бесконечно много неизоморфных исключительных коммутативных алгебр, а также что семейства $St \setminus \mathrm{Comm}$ и $\mathrm{Eng} \setminus St$ содержат бесконечно много подмногообразий, порожденных исключительными алгебрами.

В данной работе изучаются изотопы исключительных коммутативных алгебр $S[X]$ и $J_0(\Gamma, D)$, где Γ — ассоциативная алгебра Грассмана (без единицы), а D — ее четное дифференцирование. Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 доказано, что во всякой 2-энгелевой алгебре элемент Филиппова $h_a(x, y, z)$ является тождеством. Отсюда выводится, что в коммутативной альтернативной алгебре элемент $\Pi_n = \prod_{i=1}^{n}(c, x_i, y_i)$ кососимметричен по линейным переменным. На основании этого результата в § 2 и 3 доказано, что изотопы алгебр $S[X]$ и $J_0(\Gamma, D)$ удовлетворяют тождеству $\prod_{i=1}^{4}[x_i, y_i] = 0$. Следовательно, в алгебрах $S[X]$ и $J_0(\Gamma, D)$ верно тождество $\Pi_4 = 0$. Показано также, что $\Pi_3 \neq 0$ в алгебрах $S[X]$ и $J_0(\Gamma, D)$.

В § 4 доказано, что если D — сдвигающее дифференцирование, то алгебра Скосырского $J_0(\Gamma, D)$ не является относительно свободной. В частности, алгебры $S[X]$ и $J_0(\Gamma, D)$ не изоморфны.

Пусть Γ — ассоциативная алгебра Грассмана над множеством стандартных порождающих $\overline{X} = \{x_{i,j} \mid i, j \geq 0\}$. Отображение D, заданное на $\overline{X}$ правилом $D(x_{i,j}) = x_{i,j+1}$, однозначно продолжается до четного дифференцирования алгебры Γ. Пусть $x_i = x_{i,0}$, $X = \{x_i \mid i \geq 0\}$, $X_n = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\}$ и $C[X]$ — подалгебра в $J_0(\Gamma, D)$, порожденная множеством X; $C_n = C[X_n]$.

В [9] высказана гипотеза: *алгебра C_n при $n \geq 3$ является свободной коммутативной альтернативной ниль-алгеброй индекса* 3.

В § 4 показано, что ни одно из тождеств $\Pi_n = 0$ не является следствием тождеств $[x, y] = x^3 = 0$. Поскольку алгебра $C[X]$ удовлетворяет тождеству $\Pi_4 = 0$, гипотеза Гришкова — Шестакова не имеет места при $n \geq 9$.

§ 1. 2-Энгелевы альтернативные алгебры

Договоримся, что отсутствующие скобки в произведении расставляются правонормированным образом, например, как для элементов $xyzt = ((xy)z)t$, так и для множеств $XYZT = ((XY)Z)T$. Это соглашение относится к любым произведениям, в частности, коммутаторам и йордановым произведениям.

Всюду в этом параграфе через A обозначается 2-энгелева альтернативная алгебра над полем Φ характеристики 3, т. е. A удовлетворяет тождеству

$$[x, y, y] = 0. \tag{1}$$

Напомним [1, 6], что в алгебре A выполнены следующие тождества:

$$[xy, a] = [x, a]y + x[y, a], \tag{2}$$

$$[x, y, z, t] = [x, y, [z, t]] = 0, \tag{3}$$

$$(x, y, z)^+ = (x, y, z) + [x, y, z], \tag{4}$$

где $(x, y, z)^+$ — ассоциатор в алгебре $A^+ = (A; +, \bullet)$ и $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.

Заметим, что присоединенная алгебра A^+ коммутативна и альтернативна.

Как обычно, через R_a и L_a обозначаются *операторы правого и левого умножения* на элемент a, т. е. $xR_a = xa$, $xL_a = ax$. Положим также $T \in \{R, L\}$ и $R^* = L$, $L^* = R$.

Функция $f(x, y)$ называется *муфанговой по x и y*, если она по этим переменным линейна, кососимметрична и удовлетворяет равенству $f(x, yT_x) = f(x, y)T_x^*$. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *муфанговой относительно переменных $x_1, \dots, x_n$*, если она муфангова относительно любых двух переменных из этого списка.

Во всякой альтернативной алгебре ассоциатор (x, y, z) является муфанговой функцией. Легко понять, что в 2-энгелевой алгебре A муфанговыми функциями являются коммутаторы $[x, y]$, $[x, y, z]$ и йорданов ассоциатор $(x, y, z)^+$.

1.1. Элемент Филиппова в 2-энгелевых алгебрах. Напомним [10, 7] определение элемента Филиппова:

$$h_a(x, y, z) = [([x, a], y, a)^+, z] - [([x, y], a, z)^+, a].$$

Лемма 1. *В алгебре A верно тождество Филиппова $h_a(x, y, z) = 0$.*

Доказательство. Покажем сначала, что в алгебре A справедливы следующие тождества:

$$[(a, x, z)^+, x, a] = 0, \tag{5}$$

$$([z, a, x], a, x) = 0, \tag{6}$$

$$([x, a], a, [x, z]) = 0, \tag{7}$$

$$([x, a], a, [a, z]) = 0. \tag{8}$$

Поскольку в алгебре A элементы $[x, y, z]$, (x, y, z) и $(x, y, z)^+$ муфанговы, из тождеств (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned}[(a, x, z)^+, x, a] = [(a, x, z), x, a] = -[(a, x, [z, x]), a] = (a, x, [z, x, a])\\ = (a, x, [z, x, a])^+ = -(a, [z, x, a], x)^+ = 0.\end{aligned}$$

Тем самым доказано тождество (5), а попутно с ним и тождество (6).

Далее, проверим справедливость тождества (7):

$$\begin{aligned}([x, a], a, [x, z]) = ([x, a], a, [x, z])^+ = -(a, [x, a], [x, z])^+\\ = [(a, x, [x, z])^+, a] = [(a, x, z)^+, x, a] = 0 \quad \text{ввиду (5)}.\end{aligned}$$

Тождество (8) является линеаризацией тождества (7).

Проведем необходимые преобразования, используя тождество (2):

$$
\begin{aligned}
h_a(x,y,z) &= [([x,a],y,a)^+,z] - [([x,y],a,z)^+,a] \\
&= ([x,a,z],y,a)^+ + ([x,a],[y,z],a)^+ + ([x,a],y,[a,z])^+ \\
&\quad - ([x,y,a],a,z)^+ - ([x,y],a,[z,a])^+ \\
&= ([x,a,z],y,a) + ([x,a],[y,z],a) + ([x,a],y,[a,z]) \\
&\quad - ([x,y,a],a,z) - ([x,y],a,[z,a])
\end{aligned}
$$

(в силу (3) и (4))

$$= -([y,a,z],x,a) - ([y,z,a],x,a) + ([x,a],y,[a,z]) - ([x,y,a],a,z) + (z,a,[x,y,a])$$

(в силу линеаризованных (1), (6) и (7))

$$
\begin{aligned}
&= ([x,a],y,[a,z]) + 2(z,a,[x,y,a]) = ([x,a],y,[a,z]) - (z,a,[x,y,a]) \\
&= ([x,a],y,[a,z]) + ([x,y],a,[z,a]) \\
&= -([x,y],a,[a,z]) - ([x,a],a,[y,z]) + ([x,y],a,[z,a])
\end{aligned}
$$

(в силу линеаризованного (8))

$$
\begin{aligned}
&= -2([x,y],a,[a,z]) - ([x,a],a,[y,z]) = ([x,y],a,[a,z]) - ([x,a],a,[y,z]) \\
&= -([z,y],a,[a,x]) - ([x,a],a,[y,z]) = ([y,z],a,[a,x]) + ([a,x],a,[y,z]) = 0.
\end{aligned}
$$

1.2. Два следствия. Следуя [1], напомним понятия коммутативного центра и центра алгебры: $K(A) = \{k \in A \mid [k,A] = 0\}$ — коммутативный центр алгебры A, $Z(A) = \{z \in A \mid [z,A] = (z,A,A) = 0\}$ — центр алгебры A.

Следствие 1. *Элемент* $([a,b],[x,y],z)$ *содержится в коммутативном центре* $K(A)$.

Доказательство. Если $u \in [A,A]$, то в силу леммы 1 и тождеств (3), (4)

$$
\begin{aligned}
0 = [([x,a],u,a),z] - [([x,u],a,z),a] &= [([x,a],u,a),z] + ([x,u,a],a,z) \\
&= [([x,a],u,a),z].
\end{aligned}
$$

Тем самым элемент $([x,a],[y,z],b)$ кососимметричен относительно любых двух переменных по модулю $K(A)$. Используя сравнение по модулю $K(A)$, имеем

$$([a,b],[x,y],z) \equiv -([x,b],[a,y],z) \equiv ([x,y],[a,b],z) = -([a,b],[x,y],z).$$

Отсюда $2([a,b],[x,y],z) \equiv 0$, т. е. $([a,b],[x,y],z) \in K(A)$.

Следствие 2. *Подалгебра* $[A,A]^*$ *в* A*, порожденная множеством* $[A,A]$*, ассоциативна и коммутативна.*

Доказательство. Докажем сначала, что $([A,A],[A,A],[A,A]) = 0$. Рассмотрим $u \in [A,A]$, и поскольку в силу тождества (2) отображение $a \to [a,x]$ является дифференцированием в A, то

$$(u,[x,a],[y,a]) = [x,(u,a,[y,a])] - ([x,u],a,[y,a]) - (u,a,[x,[y,a]]).$$

Используя тождества Муфанг, покажем, что все слагаемые в правой части последнего равенства равны нулю. Первое — в силу следствия 1, второе — ввиду тождества (3) $([x,u],a,[y,a]) = ([x,u,a],a,y) = 0$, третье — ввиду 2-энгелевости и следствия 1:

$$(u,a,[x,[y,a]]) = -(u,x,[a,[y,a]]) + [(u,a,[y,a]),x] + [(u,x,[y,a]),a] = 0.$$

Итак, $(u,[x,a],[y,a])=0$, следовательно, функция $(u,[x,a],[y,b])$ кососимметрична по переменным x,a,y,b, и аналогично предыдущему $(u,[x,a],[y,b])=0$.

Осталось заметить, что в альтернативной алгебре всякое ассоциативно-коммутативное подмножество X, т. е. подмножество, удовлетворяющее равенствам $[X,X]=(X,X,X)=0$, порождает ассоциативно-коммутативную подалгебру X^*.

1.3. Элементы $\Pi_n=\prod\limits_{i=1}^{n}(c,x_i,y_i)$. Функция $f(x_1,\dots,x_n)$ называется *йордановой по переменным* $x_1,\dots,x_n$, если она кососимметрична по этим переменным и $f(x^2,x,x_3,\dots,x_n)=0$.

Отметим, что коммутативная алгебра йорданова, если в ней ассоциатор (x,a,y) является йордановой функцией по переменным x,y.

Предложение 1. *В коммутативной альтернативной алгебре S функция $\prod\limits_{i=1}^{n}(c,x_i,y_i)$ является йордановой по переменным x_i,y_i $(i=\overline{1,n})$.*

Доказательство. На алгебре S рассмотрим С-операцию σ, считая, что $x\sigma y=(x,c,y)$. Напомним [6], что алгебра $A=S^\sigma$ с той же аддитивной структурой, что и S, и новым умножением $x*y=xy+2x\sigma y$, где xy — произведение в S, называется *деформацией* S. Алгебра A является 2-энгелевой. Далее, присоединенная алгебра A^+ совпадает с S, а коммутатор в алгебре A совпадает со значением $x\sigma y$ операции σ. В силу тождества $[x,y]^2=0$ и следствия 2 в алгебре A функции $[x_1,y_1][x_2,y_2]\dots[x_n,y_n]$ и $[x_1,y_1]\bullet[x_2,y_2]\bullet\dots\bullet[x_n,y_n]$ йордановы по переменным x_i,y_i $(i=\overline{1,n})$, значит, в алгебре S функция $\prod\limits_{i=1}^{n}(c,x_i,y_i)$ йорданова по переменным x_i,y_i $(i=\overline{1,n})$.

Замечание. Элемент Π_2 не является йордановым дифференцированием. В частности, в 2-энгелевой алгебре A будет $([a,b],[x,y],y)\neq 0$. В самом деле, полагая $c_1=(c,a,b)$, $c_2=(c,x,y)$, имеем [6]

$$\begin{aligned}c_1(c,x,y^2)-2c_1(c,x,y)\cdot y&=2c_1(c_2y)-2(c_1c_2)y=(c_1,c_2,y)=(c_1,(c,x,y),y)\\&=(x,(c_1,c,y),y)=((c_1,c,y),y,x)=(((a,b,c),c,y),y,x)=f_{c,y}(a,b,x)\neq 0.\end{aligned}$$

§ 2. Изотопы монстра

2.1. Монстр $S[X]$. Следуя [2, § 3], напомним определение монстра.

Пусть $\Delta=\Phi[T]$ — алгебра многочленов от счетного множества переменных $T=\{t_1,t_2,\dots\}$ над полем Φ. Вспомогательная алгебра $A_0:=A(\Delta)$ порождается элементами $z^\alpha(\alpha\in\Delta)$ и $g_i=\overline{e_i}$ $(i=1,2,\dots)$. Пусть $D_{ij}:x\mapsto(x,g_i,g_j)$, тогда

$$g_ig_j=0,\quad z^\alpha z^\beta=z^{\alpha+\beta},\quad (z^\alpha,z^\beta,A_0)=0,$$

$$z^\alpha D_{ij}=\alpha z^{\alpha-1}(zD_{ij}),\quad zD_{ij}\in Z(A_0)\text{ — центр алгебры }A_0.$$

Всюду в этом параграфе $E=\{g_1,g_2,\dots\}$ и $e,g,e_i\in E$; Z_0 — подалгебра в A_0, порожденная центральными элементами вида (z,e,g). Напомним также, что в алгебре A_0 всякое слово от символов z^α и g_i кососимметрично относительно g_i.

Заметим, что

$$z^\alpha e\cdot z^\beta g=(\alpha-\beta)z^{\alpha+\beta-1}(z,e,g).$$

Кроме того, аддитивный базис алгебры A_0 состоит из элементов $z^\alpha(z,e_1,e_2)\dots(z,e_{2n-1},e_{2n})e_{2n+1}$. Элементы вида $z^\alpha z_0$ назовем *четными*, а вида $z^\alpha z_0 e$ — *нечетными*, где $\alpha\in\Delta$, $z_0\in Z_0$, $e\in E$.

Свободная алгебра многообразия, порожденного ассоциаторным идеалом $D(A_0)$, над счетным множеством свободных порождающих X называется *монстром* и обозначается через $S[X]$. Известно, что $S[X]$ — исключительная коммутативная алгебра с тождеством $x^3=0$.

2.2. Вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Пусть $\beta_c(x,y,z)=((x,y,c),c,z)$ — элемент Брака. Тогда*

$$\beta_c(x,y,z)\cdot(c,e_1,e_2)(c,e_3,e_4)\neq 0.$$

Доказательство. Введем отношение эквивалентности на A_0, считая

$$a\approx b,\ \text{если}\ (\exists n)(a-b)Z_0^n=0.$$

Допустим от противного, что $\beta_c(x,y,z)\cdot(c,e_1,e_2)(c,e_3,e_4)=0$. Тогда

$$((c,e_5,e_6),c,e_7)\cdot(c,e_1,e_2)(c,e_3,e_4)=0.$$

Отсюда ввиду равенства $(e_i,e_j,e_k)=0$ линеаризацией $\Delta_c^1(e_8)$ выводим

$$((c,e_5,e_6),e_7,e_8)\cdot(c,e_1,e_2)(c,e_3,e_4)=0.$$

Поскольку $(z,e_5,e_6)\in Z_0$, применяя оператор линеаризации $\Delta_c^2(z)$, имеем

$$((c,e_5,e_6),e_7,e_8)\approx 0.$$

Наконец, подставляя $c=z^2$, получаем $2(z,e_5,e_6)(z,e_7,e_8)\approx 0$, что невозможно.

Лемма 3. *В алгебре A_0 для любого $c\in D(A_0)$ верно равенство*

$$(c,e_4,e_5)(c,e_6,e_7)(c,e_8,e_9)=0.$$

Доказательство. Положим $c=c_1+c_2+c_3$, где

$$c_1=z^pz_1e_1,\quad c_2=z^qz_2e_2,\quad c_3=z^rz_3e_3,\quad z_i\in Z_0,$$

причем в запись каждого c_i входит хотя бы один элемент из множества E.

Докажем, что в алгебре A_0 нулевым является элемент

$$f=\sum_{\sigma\in A_3}(c_{1\sigma},e_4,e_5)(c_{2\sigma},e_6,e_7)\cdot(c_{3\sigma},e_8,e_9),$$

где A_3 — знакопеременная группа степени 3.

Поскольку центральные сомножители из Z_0 можно выносить за знак функции f, достаточно сделать проверку для элементов $c_1=z^pe_1$, $c_2=z^qe_2$, $c_3=z^re_3$, в записи которых, вообще говоря, могут отсутствовать некоторые множители e_i. Договоримся, для сокращения записи, при преобразованиях опускать сомножители из Z_0.

Пусть сначала присутствуют e_1,e_2,e_3, т. е. элементы c_1,c_2,c_3 нечетны; тогда

$$\begin{aligned}(c_1,e_4,e_5)(c_2,e_6,e_7)\cdot(c_3,e_8,e_9)&=(z^pe_1,e_4,e_5)(z^qe_2,e_6,e_7)\cdot(z^re_3,e_8,e_9)\\&\approx pqr(z^{p-1}e_1\cdot z^{q-1}e_2)(z^{r-1}e_3)\approx pq(p-q)rz^me_3,\end{aligned}$$

где $m = p + q + r - 1$.

Далее, поскольку $f = \lambda b$, где b — базисный элемент в $D(A_0)$, $\lambda \in \Delta$, то

$$\lambda = pq(p-q)r + qr(q-r)p + rp(r-p)q$$
$$= p^2qr - pq^2r + q^2rp - qr^2p + r^2pq - rp^2q = 0.$$

Пусть теперь $c_1 = z^p e_1$, $c_2 = z^q e_2$, $c_3 = z^r$, т. е. два элемента из трех c_1, c_2, c_3 нечетны. Тогда аналогично предыдущему при $m = p + q + r - 1$ получаем

$$(c_1, e_4, e_5)(c_2, e_6, e_7) \cdot (c_3, e_8, e_9) \approx pq(p-q)rz^m,$$

$$(c_2, e_4, e_5)(c_3, e_6, e_7) \cdot (c_1, e_8, e_9) = (z^q e_2, e_4, e_5)(z^r, e_6, e_7) \cdot (z^p e_1, e_8, e_9)$$
$$\approx pqr(z^{q+r-2}e_2)(z^{p-1}e_1) \approx -pqr(q + r - p - 1)z^m,$$

$$(c_3, e_4, e_5)(c_1, e_6, e_7) \cdot (c_2, e_8, e_9) = (z^r, e_4, e_5)(z^p e_1, e_6, e_7) \cdot (z^q e_2, e_8, e_9)$$
$$\approx pqr(z^{p+r-2}e_1)(z^{q-1}e_2) \approx pqr(p + r - q - 1)z^m,$$

следовательно,

$$pq(p-q)r - pqr(q + r - p - 1) + pqr(p + r - q - 1) = 3p^2qr - 3pq^2r = 0.$$

Если два или три элемента из трех c_1, c_2, c_3 четны, то аналогично, но проще проверяется равенство $f = 0$.

Наконец, замечая, что в алгебре A_0 идеал, порожденный элементом $e \in E$, имеет нулевое умножение, получаем, что в A_0 выполнено требуемое.

2.3. Изотопы монстра $S[X]$.

Теорема 1. *Монстр $S[X]$ удовлетворяет тождеству $\Pi_4 = 0$.*

Доказательство. Если $\langle x, y\rangle$ — йорданова функция и $\langle x, Z_0\rangle = 0$, то ввиду равенств $E^2 = 0$ и $\langle xy, a\rangle = \langle x, ay\rangle + \langle y, ax\rangle$ можно сделать переработку:

$$\langle z^p e, z^q g\rangle = \langle z^p, (z^q, g, e)\rangle + \langle e, z^{p+q} g\rangle = \langle e, z^{p+q} g\rangle.$$

Следовательно, элемент Π_4 представим в виде линейной комбинации выражений, содержащих множитель $\prod_{i=1}^{3}(c, e_i, g_i)$, который равен 0 по лемме 3. Теорема доказана.

Пусть S — коммутативная алгебра. Если c — обратимый элемент в S, то изотоп $S^{(c)}$ алгебры S — это линейное пространство S, на котором задано новое умножение $x \cdot_c y = (xc)y$. Если S — ниль-алгебра, то присоединим к алгебре S внешним образом единицу $\widehat{S}$ и рассмотрим изотоп $\widehat{S}^{(1+c)}$, где $c \in S$. Обозначим через $S^{(c)}$ подалгебру в $\widehat{S}^{(1+c)}$, порожденную множеством S, которую, следуя [5], также назовем *изотопом* S. В [6] доказано, что изотоп $S^{(c)}$ изоморфен деформации $S^\sigma = (S; +, *)$, где $x * y = xy + 2x\sigma y$ и $x\sigma y = (x, c, y)$. Заметим, что $[x, y]_* = x * y - y * x = 2x\sigma y - 2y\sigma x = 4x\sigma y = x\sigma y$.

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть $w = [x, y, z]$, $v_n = [x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_n, y_n]$. Тогда всякий изотоп монстра $S[X]$ удовлетворяет тождеству $v_4 = 0$. Далее, существует изотоп монстра $S[X]$, различающий тождества: $w \cdot v_2 = 0$ и $w \cdot v_3 = 0$.*

§ 3. Изотопы алгебры Скосырского $J_0(\Gamma, D)$

3.1. Алгебра Скосырского $J_0(\Gamma, D)$**.** Пусть Γ — ассоциативная алгебра Грассмана (без единицы) над множеством $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ стандартных порождающих и стандартной градуировкой $\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$, D — четное дифференцирование алгебры Γ, т. е. $\Gamma_i^D \subseteq \Gamma_i$ $(i = 0, 1)$.

Всюду в этом параграфе $a, a_i, b, b_i \in \Gamma_0$, $x, y, z, p, p_i \in \Gamma_1$, $x_i, y_i, r \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Элементы из Γ_0 назовем *четными*, а из Γ_1 — *нечетными*. Рассмотрим алгебру $J_0(\Gamma, D) = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$, умножение в которой определяется следующими правилами:

$$a \bullet b = ab, \quad a \bullet x = x \bullet a = ax, \quad x \bullet y = xy' - x'y,$$

где pq — произведение элементов p, q в Γ, $x' = x^D$.

Квадрат и куб элемента $p \in \Gamma$ в алгебре $J_0(\Gamma, D)$ обозначаются через $p^{\bullet 2}$ и $p^{\bullet 3}$ соответственно.

Известно, что $J_0(\Gamma, D)$ — коммутативная альтернативная алгебра над полем характеристики 3; и если D — сдвигающее дифференцирование алгебры Γ, т. е. $e_i^D = e_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, то алгебра $J_0(\Gamma, D)$ первична [3].

Заметим, что для нечетного элемента x верно $x^{\bullet 2} = -xx'$, откуда $x^{\bullet 3} = -xx'x = 0$. Поскольку $a^{\bullet 2} = 0$ для любого четного стандартного одночлена $a = e_{i_1} \dots e_{i_{2n}}$, то $J_0(\Gamma, D)$ является *ниль-алгеброй индекса* 3. Отметим также, что справедливы следующие равенства:

$$(x, y, z) = -(xyz)', \quad (a, x, y) = -a'xy, \tag{9}$$

$$(r, a, b) = 0. \tag{10}$$

3.2. Вспомогательные леммы. Пусть $S = J_0(\Gamma, D)$, $a \in \Gamma_0$, $p \in \Gamma_1$. Заметим, что

$$(a, \Gamma_1, \Gamma_1) = \sum_{x, y \in \Gamma_1} (a, x, y) \subseteq \Gamma_0 \quad \text{и} \quad (p, \Gamma_1, \Gamma_1) \subseteq \Gamma_1.$$

Пусть $r\Gamma_0$ — линейная оболочка множества $\{rb \mid b \in \Gamma_0\}$. Так как

$$(r\Gamma_0) \bullet \Gamma_0 = r\Gamma_0\Gamma_0 \subseteq r\Gamma_0,$$

то $r\Gamma_0$ — ассоциативный бимодуль над Γ_0 в алгебре S. Рассмотрим еще два ассоциативных бимодуля над Γ_0:

$$P = p\Gamma_0 + p'\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1, \quad Q = p\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0.$$

Лемма 4. *В алгебре S множество $M = P + Q$ нильпотентно индекса* ≤ 4.

Доказательство представим в виде последовательности пунктов.

1^0. Верно включение $P' \subseteq \sum\limits_{i=0,1,2} p^{(i)}\Gamma_0$, где $p^{(i+1)} = (p^{(i)})'$ и $p^{(0)} = p$.

Достаточно заметить, что D — четное дифференцирование и $P = \sum\limits_{i=0,1} p^{(i)}\Gamma_0$.

2^0. Верно включение $P^{\bullet 2} \subseteq \sum\limits_{i<j\leq 2} p^{(i)}p^{(j)}\Gamma_0$.

Действительно, ввиду п. 1^0 имеем

$$P^{\bullet 2} = P \bullet P \subseteq PP' \subseteq \Big(\sum_{i=0,1} p^{(i)}\Gamma_0\Big)\Big(\sum_{i=0,1,2} p^{(j)}\Gamma_0\Big) \subseteq \sum_{i<j\leq 2} p^{(i)}p^{(j)}\Gamma_0.$$

3^0. Верно включение $P^{\bullet 3} \subseteq T$, где $T = pp'p''\Gamma_0$.

В силу пп. 1^0, 2^0 имеем

$$P^{\bullet 3} = P^{\bullet 2}\bullet P = P^{\bullet 2}P \subseteq \Big(\sum_{i<j\le 2} p^{(i)}p^{(j)}\Gamma_0\Big)\Big(\sum_{i=0,1} p^{(i)}\Gamma_0\Big) \subseteq \sum_{i<j<k\le 2} p^{(i)}p^{(j)}p^{(k)}\Gamma_0 = pp'p''\Gamma_0 = T.$$

4^0. Верно равенство $P^{\bullet 4} = 0$.

Во-первых, справедливы соотношения

$$TP' \subseteq (pp'p''\Gamma_0)(p\Gamma_0 + p'\Gamma_0 + p''\Gamma_0) = 0, \quad T' \subseteq (pp'p''\Gamma_0)' \subseteq pp'p'''\Gamma_0 + pp'p''\Gamma_0,$$
$$T'P \subseteq (pp'p'''\Gamma_0 + pp'p''\Gamma_0)(p\Gamma_0 + p'\Gamma_0) = 0.$$

Заметив, что $T \subseteq \Gamma_1$, ввиду п. 3^0 имеем

$$P^{\bullet 4} = P^{\bullet 3}\bullet P \subseteq T\bullet P \subseteq TP' + T'P = 0.$$

5^0. Докажем, что $Q^{\bullet 2} = 0$, $(S\bullet Q)\bullet Q = 0$.

Поскольку $Q \subseteq \Gamma_0$ и $p^2 = 0$ в Γ, то $Q^{\bullet 2} = Q\bullet Q = QQ = p\Gamma_1 p\Gamma_1 = 0$. Второе равенство вытекает из первого, поскольку $(S, Q, Q) = 0$ в силу (10).

6^0. Верно включение $P\bullet Q \subseteq pp'\Gamma_1$. В самом деле,

$$P\bullet Q = PQ \subseteq (p\Gamma_0 + p'\Gamma_0)p\Gamma_1 \subseteq pp'\Gamma_1.$$

7^0. Верно включение $(P\bullet Q)\bullet P \subseteq pp'p''\Gamma_1$.

В самом деле, поскольку справедливы включения

$$(pp'\Gamma_1)P' \subseteq (pp'\Gamma_1)(p\Gamma_0 + p'\Gamma_0 + p''\Gamma_0) \subseteq pp'p''\Gamma_1,$$
$$(pp'\Gamma_1)'P \subseteq (pp''\Gamma_1 + pp'\Gamma_1)(p\Gamma_0 + p'\Gamma_0) \subseteq pp'p''\Gamma_1,$$

ввиду п. 6^0 имеем

$$(P\bullet Q)\bullet P \subseteq (pp'\Gamma_1)\bullet P \subseteq (pp'\Gamma_1)P' + (pp'\Gamma_1)'P \subseteq pp'p''\Gamma_1.$$

8^0. Верно включение $P\bullet Q\bullet P\bullet(P+Q) = 0$.

Действительно, так как $P\bullet Q\bullet P \subseteq \Gamma_0$, в силу п. 7^0

$$P\bullet Q\bullet P\bullet Q \subseteq (pp'p''\Gamma_1)(p\Gamma_1) = 0,$$
$$P\bullet Q\bullet P\bullet P \subseteq (pp'p''\Gamma_1)(p\Gamma_0 + p'\Gamma_0) = 0.$$

9^0. Покажем, что $P^{\bullet 2}\bullet Q\bullet P = 0$.

В самом деле, учитывая п. 2^0, получаем

$$P^{\bullet 2}\bullet Q\bullet P \subseteq \Big(\sum_{i<j\le 2} p^{(i)}p^{(j)}\Gamma_0\Big)QP \subseteq \Big(\sum_{i<j\le 2} p^{(i)}p^{(j)}\Gamma_0\Big)p\Gamma_1(p\Gamma_0 + p'\Gamma_0) \subseteq (p'p''\Gamma_0)p\Gamma_1(p\Gamma_0 + p'\Gamma_0) = 0.$$

10^0. Заметим, что $P^{\bullet 3}\bullet Q \subseteq TQ \subseteq (pp'p''\Gamma_0)p\Gamma_1 = 0$.

Из пп. 4^0, 5^0, 8^0, 9^0, 10^0 следует, что $M^{\bullet 4} = 0$.

Лемма 5. *Если $b \in \Gamma_0$, то $(b\Gamma_0)^{\bullet 3} = 0$ в алгебре S.*

Доказательство. Поскольку квадрат любого четного одночлена в алгебре S равен нулю и $(b_1 + b_2)^{\bullet 3} = b_1^{\bullet 3} + b_2^{\bullet 3}$, $(bb_1)\bullet(bb_2)\bullet(bb_3) = b^{\bullet 3}(b_1b_2b_3)$, то $b^{\bullet 3} = 0$ и $(b\Gamma_0)^{\bullet 3} = 0$.

Обозначение. Если $r \in \{a, p\}$, то положим $r_i = (r, x_i, y_i)$, $i = 1, 2$.

Лемма 6. *Если $x_i, y_i \in \Gamma_1$, то в алгебре S верно равенство*

$$p_1a_2 + p_2a_1 = -a'p'uv + a'p(uv)', \quad \text{где } u = x_1y_1,\ v = x_2y_2.$$

Доказательство. В самом деле, в силу (9)

$$\begin{aligned}p_1a_2 + p_2a_1 &= (p, x_1, y_1)(a, x_2, y_2) + (p, x_2, y_2)(a, x_1, y_1)\\ &= (pu)'a'v + (pv)'a'u = a'\{2p'uv + pu'v + puv'\} = -a'p'uv + a'p(uv)'.\end{aligned}$$

3.3. Изотопы алгебры $J_0(\Gamma, D)$.

Теорема 2. *Алгебра $S = J_0(\Gamma, D)$ удовлетворяет тождеству $\Pi_4 = 0$.*

Доказательство. Мы должны проверить, что многочлен

$$f = (c, x_1, x_2) \bullet (c, x_3, x_4) \bullet (c, x_5, x_6) \bullet (c, x_7, x_8)$$

является тождеством в алгебре S. Без ограничения общности можно считать, что $x_1, \dots, x_8 \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Поскольку элемент f кососимметричен по линейным переменным согласно предложению 1, в силу равенства (10) можно считать, что не более чем один элемент из $x_1, \dots, x_8$ четный.

Пусть $c = a + p$, где $a \in \Gamma_0$, $p \in \Gamma_1$. Положим

$$t \in \{a, p\}, \quad t_i = (t, x_{2i-1}, x_{2i}) \quad (i = \overline{1,4}).$$

В силу лемм 4 и 5 достаточно понять, что справедливы следующие равенства:

1) $f_1 := a_1 \bullet p_2 \bullet p_3 \bullet p_4 + p_1 \bullet a_2 \bullet p_3 \bullet p_4 + p_1 \bullet p_2 \bullet a_3 \bullet p_4 + p_1 \bullet p_2 \bullet p_3 \bullet a_4 = 0$,

2) $f_2 := (a_1a_2) \bullet p_3 \bullet p_4 + (a_1p_2) \bullet a_3 \bullet p_4 + (a_1p_2) \bullet p_3 \bullet a_4 + (p_1a_2) \bullet a_3 \bullet p_4 + (p_1a_2) \bullet p_3 \bullet a_4 + (p_1 \bullet p_2) \bullet a_3a_4 = 0$.

Заметим, что в силу предложения 1 функции f_1 и f_2 йордановы относительно переменных $x_1, \dots, x_8$. Положим

$$p_{ij} = a_ip_j + p_ia_j, \quad u_1 = x_1x_2, \quad v_1 = x_3x_4, \quad u_2 = x_5x_6, \quad v_2 = x_7x_8.$$

(1a) Пусть сначала $x_1, \dots, x_8 \in \Gamma_1$. Поскольку $p_1 \bullet p_2 \in \Gamma_0$, то

$$f_1 := (a_1p_2 + p_1a_2) \bullet p_3 \bullet p_4 + p_1 \bullet p_2 \bullet (a_3p_4 + p_3a_4) = p_{12} \bullet p_3 \bullet p_4 + p_1 \bullet p_2 \bullet p_{34}.$$

Вычислим каждое из двух слагаемых по отдельности, используя лемму 6:

$$p_{12} = -a'p'u_1v_1 + a'p(u_1v_1)'.$$

Так, первое слагаемое из f_1 имеет вид

$$\begin{aligned}p_{12} \bullet p_3 \bullet p_4 &= (p_{12}p_3' - p_{12}'p_3) \bullet p_4 = (p_{12}p_3' - p_{12}'p_3)p_4\\ &= (-a'p'u_1v_1 + a'p(u_1v_1)')(p''u_2 - p'u_2' + pu_2'')(p'v_2 + pv_2')\\ &\quad + (a'p'u_1v_1 - a'p(u_1v_1)')'(p'u_2 + pu_2')(p'v_2 + pv_2')\\ &= (-a'p'u_1v_1 + a'p(u_1v_1)')p''u_2(p'v_2 + pv_2') + a'p''u_1v_1(p'u_2 + pu_2')(p'v_2 + pv_2')\\ &\qquad \text{(поскольку } (b_1p + b_2p')(b_3p + b_4p')(b_5p + b_6p') = 0 \text{ в алгебре } \Gamma)\\ &= (a'p'u_1v_1 - a'p(u_1v_1)')(p'v_2 + pv_2')p''u_2 + a'u_1v_1(p'u_2 + pu_2')(p'v_2 + pv_2')p''\\ &= (a'p'u_1v_1pv_2' - a'p(u_1v_1)'p'v_2)p''u_2 + a'u_1v_1(p'u_2pv_2' + pu_2'p'v_2)p''\\ &= -a'(u_1v_1u_2v_2' + (u_1v_1)'u_2v_2)pp'p'' + a'u_1v_1(-u_2v_2' + u_2'v_2)pp'p''\\ &= -a'pp'p''(u_1v_1u_2v_2' + (u_1v_1)'u_2v_2 + u_1v_1u_2v_2' - u_1v_1u_2'v_2)\\ &= -a'pp'p''((u_1v_1)'u_2v_2 - u_1v_1u_2v_2' - u_1v_1u_2'v_2)\\ &= -a'pp'p''((u_1v_1)'u_2v_2 - u_1v_1(u_2v_2)').\end{aligned}$$

Теперь аналогичным образом преобразуем второе слагаемое из f_1:

$$\begin{aligned}
p_1 \bullet p_2 \bullet p_{34} &= (p_1p_2' - p_1'p_2) \bullet p_{34} = (p_1p_2' - p_1'p_2)p_{34}\\
&= ((pu_1)'(pv_1)'' - (pu_1)''(pv_1)')(-a'p'u_2v_2 + a'p(u_2v_2)')\\
&= ((pu_1)'p''v_1 - p''u_1(pv_1)')(-a'p'u_2v_2 + a'p(u_2v_2)')\\
&= ((pu_1)'v_1 + u_1(pv_1)')(a'p'u_2v_2 - a'p(u_2v_2)')p''\\
&= a'(p(u_1v_1)'p'u_2v_2 + p'u_1v_1p(u_2v_2)')p'' = a'pp'p''((u_1v_1)'u_2v_2 - u_1v_1(u_2v_2)').
\end{aligned}$$

Складывая полученные значения для двух слагаемых, получаем $f_1 = 0$.

(1б) Среди переменных $x_1, \dots, x_8$ только одна четна, пусть $x_8 \in \Gamma_0$. Тогда $f_1 = (a_1 \bullet p_2 \bullet p_3 + p_1 \bullet a_2 \bullet p_3 + p_1 \bullet p_2 \bullet a_3) \bullet p_4 = (p_{12} \bullet p_3 + p_1 \bullet p_2 \bullet a_3)(-px_7x_8')$. Значит, достаточно доказать, что $g = (p_{12} \bullet p_3 + p_1 \bullet p_2 \bullet a_3)p = 0$. Как и ранее, преобразуем каждое из двух слагаемых по отдельности, используя лемму 6:

$$\begin{aligned}
(p_{12} \bullet p_3)p &= (p_{12}p_3' - p_{12}'p_3)p = -p_{12}(pu_2)''p + p_{12}'(pu_2)'p\\
&= a'p'u_1v_1(pu_2)''p + (-a'p'u_1v_1 + a'p(u_1v_1)')'p'u_2p\\
&= a'p'u_1v_1u_2p''p - a'p''u_1v_1u_2p'p = -2a'p''p'pu_1v_1u_2 = 2a'pp'p''u_1v_1u_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p_1 \bullet p_2)a_3p &= (p_1p_2' - p_1'p_2)a_3p = -\{(pu_1)'(pv_1)'' - (pu_1)''(pv_1)'\}a'u_2p\\
&= \{-p'u_1(pv_1)'' + (pu_1)''p'v_1\}a'u_2p = \{-p'u_1p''v_1 + p''u_1p'v_1\}a'u_2p\\
&= 2p''p'u_1v_1a'u_2p = -2a'pp'p''u_1v_1u_2.
\end{aligned}$$

Складывая полученные значения для двух слагаемых, получаем $f_1 = 0$.

(2а) Пусть вновь $x_1, \dots, x_8 \in \Gamma_1$. Тогда

$$\begin{aligned}
f_2 &= (a_1a_2p_3) \bullet p_4 + (a_1p_2)a_3 \bullet p_4 + p_{12} \bullet p_3 \bullet a_4 + (p_1a_2a_3) \bullet p_4 + (p_1 \bullet p_2)a_3a_4\\
&= (a_1a_2p_3 + p_{12}a_3) \bullet p_4 + (p_{12} \bullet p_3)a_4 + (p_1 \bullet p_2)a_3a_4.
\end{aligned}$$

Преобразуем по отдельности каждое из трех слагаемых. Рассмотрим первое слагаемое $g_1 = (a_1a_2p_3 + p_{12}a_3) \bullet p_4$. Сначала преобразуем выражение в скобках:

$$\begin{aligned}
a_1a_2p_3 + p_{12}a_3 &= -a'^2u_1v_1(pu_2)' + (a'p'u_1v_1 - a'p(u_1v_1)')a'u_2\\
&= -a'^2p(u_1v_1u_2' + (u_1v_1)'u_2) = -a'^2p(u_1v_1u_2)' = pb, \quad \text{где } b = -a'^2(u_1v_1u_2)',
\end{aligned}$$

значит,

$$\begin{aligned}
g_1 = (pb) \bullet p_4 &= -pb(pv_2)'' + (pb)'(pv_2)'\\
&= -pb(p''v_2 - p'v_2' + pv_2'') + (p'b + pb')(p'v_2 + pv_2')\\
&= -pbp''v_2 + pbp'v_2' + p'bpv_2' + pb'p'v_2 = -pp''bv_2 + pp'b'v_2\\
&= a'^2pp''(u_1v_1u_2)'v_2 + a'a''pp'(u_1v_1u_2)'v_2 - a'^2pp'(u_1v_1u_2)''v_2.
\end{aligned}$$

Прежде чем вычислить второе слагаемое $g_2 = (p_{12} \bullet p_3)a_4$, преобразуем выражение в скобках:

$$\begin{aligned}
p_{12} \bullet p_3 &= p_{12}p_3' - p_{12}'p_3\\
&= -(-a'p'u_1v_1 + a'p(u_1v_1)')(pu_2)'' + (-a'p'u_1v_1 + a'p(u_1v_1)')'(pu_2)'\\
&= (a'p'u_1v_1 - a'p(u_1v_1)')(p''u_2 - p'u_2' + pu_2'')\\
&\quad + (-a''p'u_1v_1 - a'p''u_1v_1 + a''p(u_1v_1)' + a'p(u_1v_1)'')(p'u_2 + pu_2')\\
&= a'p'u_1v_1p''u_2 - a'p(u_1v_1)'p''u_2 + a'p(u_1v_1)'p'u_2' + a'p'u_1v_1pu_2''\\
&\quad - a'p''u_1v_1p'u_2 + a''p(u_1v_1)'p'u_2 + a'p(u_1v_1)''p'u_2 - a''p'u_1v_1pu_2' - a'p''u_1v_1pu_2'\\
&= -a'p'p''u_1v_1u_2 + a'pp''\{u_1v_1u_2' - (u_1v_1)'u_2\}\\
&\quad + a'pp'\{(u_1v_1)'u_2' - u_1v_1u_2'' + (u_1v_1)''u_2\} + a''pp'(u_1v_1u_2)'.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$g_2 = (p_{12} \bullet p_3)a_4 = a'^2 p'p'' u_1v_1u_2v_2 + a'^2 pp''\{(u_1v_1)'u_2 - u_1v_1u_2'\}v_2 \\ - a'^2 pp'\{(u_1v_1)'u_2' - u_1v_1u_2'' + (u_1v_1)''u_2\}v_2 - a'a''pp'(u_1v_1u_2)'v_2.$$

Наконец, преобразуем третье слагаемое $g_3 = (p_1 \bullet p_2)a_3a_4$:

$$g_3 = (p_1 \bullet p_2)a_3a_4 = \{(pu_1)'(pv_1)'' - (pu_1)''(pv_1)'\}a'^2u_2v_2 \\ = \{(p'u_1 + pu_1')(p''v_1 - p'v_1' + pv_1'') - (p''u_1 - p'u_1' + pu_1'')(p'v_1 + pv_1')\}a'^2u_2v_2 \\ = \{p'u_1p''v_1 + pu_1'p''v_1 - pu_1'p'v_1' + p'u_1pv_1''\}a'^2u_2v_2 \\ + \{-p''u_1p'v_1 - pu_1''p'v_1 - p''u_1pv_1' + p'u_1'pv_1'\}a'^2u_2v_2 \\ = \{pp''(u_1v_1)' + p''p'u_1v_1 - pp'(u_1v_1)''\}a'^2u_2v_2.$$

Итак, многочлен $f_2 = g_1 + g_2 + g_3$ представим в виде

$$f_2 = a'^2pp''(u_1v_1u_2)'v_2 + a'a''(u_1v_1u_2)'pp'v_2 - a'^2pp'(u_1v_1u_2)''v_2 \\ + a'^2p'p''u_1v_1u_2v_2 + a'^2pp''\{(u_1v_1)'u_2 - u_1v_1u_2'\}v_2 \\ + a'^2pp'\{-(u_1v_1)'u_2' + u_1v_1u_2'' - (u_1v_1)''u_2\}v_2 \\ - a''a'pp'\{(u_1v_1)'u_2 + u_1v_1u_2'\}v_2 \\ + \{pp''(u_1v_1)' - p'p''u_1v_1 - pp'(u_1v_1)''\}a'^2u_2v_2.$$

Теперь приведем подобные члены в этом выражении. Рассмотрим сумму всех одночленов, отвечающих множителям

$$m_1 = a'a''pp', \quad m_2 = a'^2p'p'', \quad m_3 = a'^2pp'', \quad m_4 = a'^2pp'.$$

Имеем

$$m_1 = a'a''pp' : \quad (u_1v_1u_2)'v_2 - (u_1v_1u_2)'v_2 = 0,$$

$$m_2 = a'^2p'p'' : \quad u_1v_1u_2v_2 - u_1v_1u_2v_2 = 0,$$

$$m_3 = a'^2pp'' : \quad (u_1v_1u_2)'v_2 - u_1v_1u_2'v_2 + (u_1v_1)'u_2v_2 + (u_1v_1)'u_2v_2 \\ = (u_1v_1u_2)'v_2 - u_1v_1u_2'v_2 - (u_1v_1)'u_2v_2 \\ = \{(u_1v_1u_2)' - u_1v_1u_2' - (u_1v_1)'u_2\}v_2 = 0,$$

$$m_4 = a'^2pp' : \quad -(u_1v_1u_2)''v_2 - (u_1v_1)''u_2v_2 - (u_1v_1)'u_2'v_2 + u_1v_1u_2''v_2 - (u_1v_1)''u_2v_2 \\ = \{-(u_1v_1u_2)'' - (u_1v_1)''u_2 + (u_1v_1)'u_2' + u_1v_1u_2''\}v_2 = 0.$$

Значит, $f_2 = 0$.

(2б) Среди элементов $x_1, \dots, x_8$ только один четный, пусть $x_8 \in \Gamma_0$. Тогда

$$f_2 = (a_1a_2) \bullet p_3 \bullet p_4 + (a_1p_2) \bullet a_3 \bullet p_4 + (p_1a_2) \bullet a_3 \bullet p_4 \\ = \{a_1a_2p_3 + a_1p_2a_3 + p_1a_2a_3\} \bullet p_4 = 0,$$

поскольку на основании (9) $a_1a_2p_3 + a_1p_2a_3 + p_1a_2a_3 = -3a'^2p'u_1v_1u_2 = 0$.

Следствие 4. *Всякий изотоп $S^{(c)}$ алгебры $S = J_0(\Gamma, D)$ удовлетворяет тождеству $v_4 = 0$, если $v_n = [x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_n, y_n]$. Кроме того, если $a \in \Gamma_0$, то $S^{(a)}$ удовлетворяет тождеству $v_3 = 0$, если $p \in \Gamma_1$, то $S^{(p)}$ удовлетворяет тождеству $v_4 = 0$ (указанные оценки точные).*

Заметим, что теорема 2 и следствие 4 остаются справедливыми и для алгебры $J_0(G, D)$, где G — ассоциативная алгебра Грассмана с единицей, а D — ее четное дифференцирование.

Замечание. Существует исключительная альтернативная алгебра с тождествами $[x, y, z] = x^3 = 0$, в которой $(\forall n \geq 1)[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_n, y_n] \neq 0$.

Пусть $S = J_0(\Gamma, D)$. Определим на S отображение σ, считая, что оно задается ненулевым образом только на парах (a, b), $a, b \in \Gamma_1$, равенством $a\sigma b = ab$, где ab — произведение в Γ. Тогда S^σ — исключительная альтернативная алгебра с тождествами $[x, y, z] = x^3 = 0$ и в ней $[e_1, e_2][e_3, e_4] \dots [e_{2n-1}, e_{2n}] = (-1)^n e_1 \dots e_{2n} \neq 0$, где $e_1, e_2, \dots, e_{2n} \in E$.

§ 4. Об одной гипотезе Гришкова — Шестакова

4.1. Алгебры $Sk(E)$, $S[X]$ и их деформации. Пусть, как и прежде, Γ — ассоциативная алгебра Грассмана (без единицы) со стандартным множеством порождающих E. Если D — сдвигающее дифференцирование, то алгебру Скосырского $Sk(E) = J_0(\Gamma, D)$ назовем *стандартной*.

Лемма 7. *Стандартная алгебра Скосырского $Sk(E)$ порождается множеством E.*

Доказательство. Обозначим через A подалгебру в $Sk(E)$, порожденную множеством E. Для $p, q \in Sk(E)$ будем писать $p \equiv q$, если $p - q \in A$. Докажем индукцией по k, что $e_i e_j \equiv 0$, если $0 < j - i \leq k$. Основание индукции при $k = 1$: $0 \equiv e_i^{\bullet 2} = e_i e_{i+1} - e_{i+1} e_i = 2 e_i e_{i+1}$. Сделав предположение индукции, рассмотрим правильное слово $e_i e_{j+1}$, считая, что $j - i = k$. Поскольку $j - (i+1) = k - 1 < k$, то $e_{i+1} e_j \equiv 0$ и $0 \equiv e_i \bullet e_j = e_i e_{j+1} - e_{i+1} e_j \equiv e_i e_{j+1}$. Итак, все правильные слова длины 2 содержатся в A. Любое правильное слово четной длины представимо в $Sk(E)$ в виде произведения правильных слов длины 2, значит, оно лежит в A. Всякое правильное слово нечетной длины представимо в $Sk(E)$ в виде произведения правильного слова четной длины и элемента из E, значит, оно также лежит в A, т. е. все элементы аддитивного базиса $Sk(E)$ лежат в A, т. е. $Sk(E) = A$.

Предложение 2. *Стандартная алгебра Скосырского $Sk(E)$ не является относительно свободной.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что алгебра $Sk(E)$ обладает некоторой системой свободных порождающих $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$. Тогда $y_i = l_i(e) + f_i(e)$, где $l_i(e)$ — линейные формы от E, $f_i(e)$ — линейная комбинация E — одночленов длины ≥ 2 в алгебре $Sk(E)$. Поскольку элементы из E являются многочленами от Y, то $y_i = l_i(e) + g_i(y)$, где $g_i(y)$ — линейная комбинация Y-одночленов длины ≥ 2. Положим $t = l_1(e)$, тогда имеем следующее представление:

$$t = y_1 + \alpha y_1^{\bullet 2} + \sum_{2 \leq j \leq n} \alpha_{1j} y_1 \bullet y_j + \sum_{2 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} y_i \bullet y_j + \dots \tag{11}$$

для подходящих скаляров $\alpha, \alpha_{1j}, \alpha_{ij}, \dots \in \Phi$.

Во всякой коммутативной альтернативной алгебре характеристики 3 верно тождество $2x(yz) = x(yz + zy) = (xy)z + (xz)y$. Следовательно, всякое произведение $\{y_1 y_2 \dots y_n\}_q$, где q — расстановка скобок, представимо в виде линейной комбинации правонормированных произведений того же состава. Таким образом, из (10) вытекает

$$t^{\bullet 2} = y_1^{\bullet 2} + \sum_{i \le \min(j,k)} \alpha_{ijk}(y_i \bullet y_j) \bullet y_k + \dots, \tag{12}$$

причем в произведениях длины ≥ 3 обязательно участвуют переменные из множества Y с различными индексами.

Считая, что y_N больше всех y_i, т. е. $N > i$, входящих в представление (11), положим

$$p = (y_1^{\bullet 2}, y_N, y_{N+1}) \bullet y_1.$$

Рассмотрим эндоморфизм φ алгебры A, продолжающий отображение свободных порождающих $y_i^{\varphi} = 0$ $(i = 2, \dots, n)$, $y_i^{\varphi} = y_i$ $(i = 1, N, N+1)$.

С одной стороны, имеем $p^{\varphi} = p$. С другой стороны, покажем, что $p^{\varphi} = 0$. Проверим сначала, что для этого достаточно установить справедливость равенства

$$(t^{\bullet 2}, y_N, y_{N+1}) \bullet t = 0. \tag{13}$$

В самом деле, допустим, что равенство (13) верно. Заметим, что в коммутативной альтернативной ниль-алгебре индекса 3 ввиду тождеств Муфанг

$$(y^2, a, b)y^2 = 2(y, a, b)yy^2 = 0. \tag{14}$$

Учитывая равенства (10) и (11), получаем

$$\begin{aligned}
p^{\varphi} &= \Big\{\big(y_1^{\bullet 2}, y_N, y_{N+1}\big) \bullet \Big(t - \alpha y_1^{\bullet 2} - \sum_{2 \le j \le n} \alpha_{1j} y_i \bullet y_j - \sum_{2 \le i \le j \le n} \alpha_{ij} y_i \bullet y_j - \dots\Big)\Big\}^{\varphi} \\
&= \big(y_1^{\bullet 2}, y_N, y_{N+1}\big)^{\varphi} \bullet \big(t^{\varphi} - \alpha y_1^{\bullet 2}\big) = \big(y_1^{\bullet 2}, y_N, y_{N+1}\big)^{\varphi} \bullet t^{\varphi} \qquad \text{(ввиду (14))} \\
&= \Big(t^{\bullet 2} - \sum_{i \le \min(j,k)} \alpha_{ijk}(y_i \bullet y_j) \bullet y_k - \dots, y_N, y_{N+1}\Big)^{\varphi} \bullet t^{\varphi} \\
&= (t^{\bullet 2}, y_N, y_{N+1})^{\varphi} \bullet t^{\varphi} = \{(t^{\bullet 2}, y_N, y_{N+1}) \bullet t\}^{\varphi} = 0 \qquad \text{(ввиду (13))}.
\end{aligned}$$

Таким образом, осталось проверить, что верно (13). Заметим, что в алгебре $Sk(E)$ в силу (9) и (10) справедливы следующие равенства:

$$t^{\bullet 2} = tt' - t't = 2tt',$$

$$(t, y, z) = -(tyz)' = -t'yz - t(yz)', \quad \text{если } y, z \in \Gamma_1,$$

$$(t, y, a) = -tya', \quad \text{если } y \in \Gamma_1, a \in \Gamma_0,$$

$$(t, a, b) = 0, \quad \text{если } a, b \in \Gamma_0.$$

Кроме того, в алгебре Γ элементы из Γ_1 антиперестановочны; тогда $t^2 = t'^2 = 0$, так как $t, t' \in \Gamma_1$. Следовательно, $(t, y, z) \bullet t^{\bullet 2} = 0$.

Поскольку в коммутативной альтернативной ниль-алгебре индекса 3 верно тождество $(x^2, y, z)x = -(x, y, z)x^2$, равенство (13) доказано. Значит, в алгебре $Sk(E)$ выполнено тождество $p = 0$. Однако ни в какой коммутативной исключительной алгебре такого тождества нет [6, лемма 8.1]; противоречие.

Следствие 5. *Монстр $S[X]$ и стандартная алгебра Скосырского $Sk(E)$ не изоморфны. Более того, никакие деформации этих алгебр не изоморфны.*

Доказательство. Из предложения 2 немедленно вытекает, что алгебры $S = S[X]$ и $A = Sk(E)$ не изоморфны. Если их деформации изоморфны $S^\sigma \simeq A^\tau$, то $S = (S^\sigma)^+ \simeq (A^\tau)^+ = A$, что невозможно.

4.2. О гипотезе Гришкова — Шестакова. Пусть Γ — ассоциативная алгебра Грассмана над множеством $\overline{X} = \{x_{i,j} \mid i, j \geq 0\}$ стандартных порождающих. Отображение D, заданное на $\overline{X}$ правилом $D(x_{i,j}) = x_{i,j+1}$, однозначно продолжается до четного дифференцирования алгебры Γ. Пусть $x_i := x_{i,0}$, $X = \{x_i \mid i \geq 0\}$, $X_n = \{x_i \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}$ и $C[X]$ — подалгебра в J_0, порожденная множеством X; $C_n = C[X_n]$.

В [9] была высказана гипотеза: *алгебра C_n при $n \geq 3$ является свободной коммутативной альтернативной ниль-алгеброй индекса* 3.

Покажем, что система X_n не может быть системой свободных порождающих алгебры C_n. Пусть, от противного, это так. Поскольку для нечетных элементов x_i, x_j, x_k справедливо равенство $\left(x_i^{\bullet 2}, x_j, x_k\right) \bullet x_i = 0$ (см. доказательство равенства (13)), в алгебре C_n верно тождество $(x^{\bullet 2}, y, z) \bullet x = 0$, что невозможно при $n \geq 3$; противоречие.

Далее, по теореме 2 алгебра $C[X]$ как подалгебра в $J_0(\Gamma, D)$ удовлетворяет тождеству $\Pi_4 = (z, x_1, y_1)(z, x_2, y_2)(z, x_3, y_3)(z, x_4, y_4) = 0$. Докажем, что тождество $\Pi_n = 0$ не является следствием тождеств $xy = yx$, $x^3 = 0$ (алгебра с этими тождествами альтернативная).

Пусть $\Gamma = \Phi[a, b \mid a^3 = 0]$ — алгебра многочленов с указанным соотношением, т. е. $\Gamma = \Phi[a, b]/I$ и I — идеал алгебры $\Phi[a, b]$, порожденный элементом a^3. На алгебре $\Phi[a, b]$ определим дифференцирование δ, считая $a^\delta = b$, $b^\delta = 0$. Поскольку идеал I инвариантен относительно дифференцирования δ, на алгебре Γ определено дифференцирование δ такое, что $a^\delta = b$, $b^\delta = 0$.

Пусть $F^s = J(\Gamma, \delta)$ — супералгебра четного векторного типа [11]; C — подалгебра, порожденная элементами $a := a \otimes 1$, $x_i := \overline{1} \otimes e_i$ $(i \geq 1)$, в грассмановой оболочке $G(F^s) = F_0 \otimes G_0 \oplus F_1 \otimes G_1$.

Легко понять, что C — коммутативная альтернативная ниль-алгебра индекса 3, а элементы вида $a^\varepsilon (a, e_1, e_2) \dots (a, e_{2n-1}, e_{2n})$, где $\varepsilon = 0, 1, 2$, $n \geq 1$, линейно независимы над полем Φ. Значит, многообразие коммутативных альтернативных ниль-алгебр индекса 3 не порождается алгебрами $C[X]$, $Sk(E)$, $S[X]$. Отсюда, в частности, вытекает, что указанная гипотеза Гришкова — Шестакова [9] неверна.

В заключение отметим некоторые открытые вопросы.

1. Верно ли, что многочлены $xy - yx$, x^3, $(z, x_1, y_1)(z, x_2, y_2)(z, x_3, y_3)(z, x_4, y_4)$ образуют базис тождеств монстра?

2. Можно ли отличить тождествами монстр $S[X]$ от алгебры Скосырского $Sk(E)$?

3. Верно ли, что всякая первичная коммутативная ниль-алгебра индекса 3 является гомоморфным образом монстра?

4. Пусть $w = [x, y, z]$, $v_n = [x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_n, y_n]$. Различаются ли на первичных альтернативных ниль-алгебрах следующие тождества:

а) $w \cdot v_n = 0$ и $w \cdot v_{n+1} = 0$;

б) $v_n = 0$ и $v_{n+1} = 0$ (для строгих алгебр);

в) $\prod_{i=1}^{n}(c, x_i, y_i) = 0$ и $\prod_{i=1}^{n+1}(c, x_i, y_i) = 0$ (для коммутативных алгебр)?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

2. *Пчелинцев С. В.* О нильпотентных элементах и ниль-радикалах альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 6. С. 674–695.

3. *Скосырский В. Г.* Первичные йордановы алгебры и конструкция Кантора // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 3. С. 301–316.

4. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 675–716.

5. *Пчелинцев С. В.* Первичные альтернативные алгебры // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 2. С. 651–657.

6. *Пчелинцев С. В.* Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным // Изв. РАН. Сер. Мат. 2004. Т. 68, № 1. С. 183–206.

7. *Пчелинцев С. В.* Исключительные первичные альтернативные алгебры // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1322–1337.

8. *Пчелинцев С. В.* Вырожденные альтернативные алгебры // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 396–411.

9. *Grishkov A. N., Shestakov I. P.* Commutative Moufang loops and alternative algebras // J. Algebra. 2011. V. 333, N 1. P. 1–13.

10. *Филиппов В. Т.* Первичные алгебры Мальцева // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 669–677.

11. *Pchelintsev S. V., Shestakov I. P.* Prime $(-1, 1)$ and Jordan monsters and superalgebras of vector type // J. Algebra. 2015. V. 453. P. 54–86.

Статья поступила 15 сентября 2015 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва 123468
pchelinzev@mail.ru