Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 512.554.36

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВИЧНОГО РАДИКАЛА СЛАБОАРТИНОВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

О. А. Пихтилькова, С. А. Пихтильков

Аннотация. Доказана локальная разрешимость первичного радикала алгебры Ли, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепей идеалов. Отмечено, что справедлив аналог полученного утверждения для градуированных Ω-групп с условием конечности.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.318

Ключевые слова: слабоартинова алгебра Ли, локально разрешимая алгебра Ли, первичный радикал алгебры Ли.

Алгебра Ли L называется *первичной*, если для любых двух ее идеалов U и V из $[U, V] = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$. Говорят, что идеал P алгебры Ли L *первичен*, если фактор-алгебра L/P первична. *Первичным радикалом* $P(L)$ *алгебры Ли* L называется пересечение всех ее первичных идеалов. Подробнее с теорией первичного радикала для алгебр Ли можно ознакомиться, например, в [1].

Назовем алгебру Ли *слабоартиновой*, если она удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей идеалов. В 2001 г. А. В. Михалев на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Кольца и модули» поставил проблему: существует ли слабоартинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым? С. А. Пихтильков показал, что первичный радикал специальной слабоартиновой алгебры разрешим [2]. Разрешимость первичного радикала также доказана для слабоартиновых локально нильпотентных алгебр Ли [3].

Известно, что первичный радикал алгебры Ли слабо разрешим, но может не быть локально разрешимым [1]. Следующая теорема устанавливает локальную разрешимость первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

Теорема 1. *Пусть L — слабоартинова алгебра Ли. Тогда первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L локально разрешим.*

Для доказательства теоремы потребуется представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала, которое рассмотрено в [4].

Пусть $\sigma(L)$ — любой ненулевой абелев идеал алгебры Ли L. Такой идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует согласно конструкции нижнего слабо разрешимого идеала, если $P(L) \neq 0$ [1] (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено). Как известно [5], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.

2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ так:

(а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ это такой идеал алгебры L, что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(L/\tau(\gamma))$;

(б) если β — предельное порядковое число, то $\tau(\beta) = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \tau(\gamma)$.

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β. Тогда $\tau(\beta)$ совпадает с нижним слабо разрешимым радикалом алгебры Ли L, равным первичному радикалу $P(L)$.

Поставим в соответствие каждому $x \in P(L)$ ординальное число $o(x) = \alpha$ такое, что $x \in \tau(\alpha)$ и $x \notin \tau(\beta)$ для всех ординальных чисел $\beta < \alpha$.

Из построенного представления первичного радикала следует, что для любых $x, y \in P(L)$ справедливо

$$o(x), o(y) \leq \alpha \Rightarrow o([x, y]) < \alpha. \tag{1}$$

Пусть Y — ограниченное сверху множество ординальных чисел. Через $\sup(Y)$ обозначим наименьшую из всех верхних граней множества Y.

Если $X \subset P(L)$, то под $\sup(X)$ будем понимать $\sup(X) = \sup(\{o(x) \mid x \in X\})$.

Для доказательства теоремы потребуется

Лемма. *Пусть $X \subset P(L)$ — конечное множество. Обозначим через A алгебру Ли, порожденную множеством X. Тогда* $\sup(A') < \sup(A)$.

Доказательство. Рассмотрим множество $X' = \{[x, y] \mid x, y \in X\}$. Из формулы (1) следует неравенство $\beta = \sup(X') < \sup(X) = \alpha$. Тогда $X' \subset \tau(\beta)$.

Элементами алгебры A являются линейные комбинации лиевых слов в алфавите X с произвольной расстановкой скобок. Лиевы слова в алфавите X длины, большей 1, могут быть трех типов: коммутатор $[x_1, x_2]$ элементов $x_1, x_2 \in X$, коммутатор $[x, u]$ элемента $x \in X$ и слова u длины, большей 1; коммутатор $[u, v]$ двух слов u, v длины, большей 1. В первом случае $[x_1, x_2] \in \tau(\beta)$. Во втором случае $u \in \tau(\beta)$, следовательно, $[x, u] \in \tau(\beta)$. В третьем случае $u, v \in \tau(\beta)$, стало быть, $[u, v] \in \tau(\beta)$.

С помощью математической индукции по длине слова можно доказать, что все лиевы слова в алфавите X длины, большей 1, лежат в идеале $\tau(\beta)$.

Доказали соотношения $\sup(A') \leq \beta < \alpha = \sup(A)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $X \subset P(L)$ — конечное множество. Обозначим через A алгебру Ли, порожденную множеством X. Рассмотрим производный ряд $A_1 = A', A_2 = A^{(2)}, \dots, A_n = A^{n)}, \dots$ алгебры Ли A. Пусть $\alpha_i = \sup(A_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Из леммы вытекает, что последовательность ординальных чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > \dots$ убывающая. Она не может быть бесконечной. Следовательно, $A_n = A^{(n)} = 0$ для некоторого n. Это означает, что алгебра Ли A удовлетворяет тождеству разрешимости ступени n. Теорема доказана.

Изложение доказательства теоремы 1 для алгебр Ли велось для удобства чтения. На самом деле аналог теоремы 1 справедлив в более общей ситуации.

Под *градуированной Ω-группой* [1] будем понимать группу A (возможно, некоммутативную) с аддитивной записью и нейтральным элементом 0, градуированную группой G, в которой задана помимо сложения еще система n-арных алгебраических операций Ω (при некоторых n, удовлетворяющих условию $n \geq 1$), причем для всех $\omega \in \Omega$ должно выполняться условие $(0, 0, \dots, 0)\omega = 0$. Множество операций Ω непустое и содержит хотя бы одну n-арную операцию, у которой $n \geq 2$. Группа A раскладывается в прямую сумму нормальных подгрупп $A_g, g \in G$, называемых *однородными компонентами.*

Для всех $a_1 \in A_{g_1}, a_2 \in A_{g_2}, \dots, a_n \in A_{g_n}$ и любой n-арной операции $\omega \in \Omega$ выполнено условие $(a_1, a_2, \dots, a_n)\omega \in A_{g_1 g_2 \cdots g_n}$. Если в дополнение к указанным свойствам выполнено следующее условие: для любого конечного множества $X \subseteq A$, для всех $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$, $\omega \in \Omega$ множество элементов $(a_1, a_2, \dots, a_n)\omega$ конечно, то говорят, что градуированная Ω-группа A *удовлетворяет условию конечности.*

Элементы множества $h(A) = \bigcup\limits_{g \in G} A_g$ называют *однородными элементами градуированной Ω-группы A*, а отличный от 0 элемент $a_g \in A_g$ — *однородным элементом степени g.*

Любой отличный от 0 элемент $a \in A$ имеет единственное представление в виде конечного произведения ненулевых однородных элементов, т. е. $a = a_{g_1} + a_{g_2} + \dots + a_{g_n}$, где $a_g \in A_g$. Элементы a_{g_i} в таком разложении называются *однородными компонентами элемента a.*

Градуированные Ω-группы могут удовлетворять также условиям, превращающим ее в группу, ассоциативную алгебру, неассоциативную алгебру, супералгебру, конформную или вёртексную алгебры. Ознакомиться с различными примерами градуированных Ω-групп можно в [1].

Для градуированных Ω-групп можно ввести понятия градуированного идеала, градуированного первичного радикала, разрешимой и локально разрешимой градуированных Ω-групп. Точные определения этих понятий можно прочитать в [1].

Для градуированных Ω-групп справедлив аналог теоремы 1, который приводим без доказательства.

Теорема 2. *Пусть A — градуированная Ω-группа с условием конечности, удовлетворяющая условию обрыва цепочек убывающих градуированных идеалов. Тогда градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω-группы A локально разрешим.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балаба И. Н, Михалев А. В., Пихтильков С. А.* Первичный радикал градуированных Ω-групп // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12, № 2. С. 159–174.
2. *Пихтильков С. А.* Артиновые специальные алгебры Ли // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2001. С. 189–194.
3. *Пихтильков С. А., Поляков В. М.* О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли // Чебыш. сб. 2005. Т. 6, № 1. С. 163–169.
4. *Мещерина Е. В., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А.* О проблеме А. В. Михалева для алгебр Ли // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 4, № 2. С. 84–89.
5. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.

Статья поступила 16 апреля 2015 г.

Пихтилькова Ольга Александровна, Пихтильков Сергей Алексеевич
Оренбургский гос. университет,
пр. Победы, 13, Оренбург 460018
OPikhtilkova@mail.ru, pikhtilkov@mail.ru