*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2016. Том 57, № 3*

*УДК 519.17*

# ЛЕГКИЕ И НИЗКИЕ 5–ЗВЕЗДЫ В НОРМАЛЬНЫХ ПЛОСКИХ КАРТАХ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5

**О. В. Бородин, А. О. Иванова**

**Аннотация.** Известно, что существуют нормальные плоские карты (НПМ) с минимальной степенью $\delta$, равной 5, такие, что минимальная сумма степеней $w(S_5)$ 5-звезд с центрами в 5-вершине неограниченно велика. Высота 5-звезды есть максимальная степень ее вершин. Через $h(S_5)$ обозначим минимальную высоту 5-звезд с центром в 5-вершине в данной НПМ с $\delta = 5$.

В 1940 г. Лебег доказал, что если НПМ с $\delta = 5$ не содержит 4-звезд циклического типа $(\overrightarrow{5, 6, 6, 5})$ с центром в 5-вершине, то $w(S_5) \leq 68$ и $h(S_5) \leq 41$. Недавно О. В. Бородин, А. О. Иванова и Йенсен понизили эти оценки до 55 и 28 соответственно и дали конструкцию НПМ с $\delta = 5$ без $(\overrightarrow{5, 6, 6, 5})$-звезд с $w(S_5) = 48$ и $h(S_5) = 20$.

В статье доказано, что $w(S_5) \leq 51$ и $h(S_5) \leq 23$ для каждой НПМ с $\delta = 5$ без $(\overrightarrow{5, 6, 6, 5})$-звезд.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.307

**Ключевые слова:** граф, плоская карта, вес, легкий подграф, высота, низкий подграф.

## 1. Введение

Нормальная плоская карта (НПМ) — это плоский псевдограф, в котором разрешены петли и мультиребра, но степень каждой вершины и грани не менее трех. Степень вершины или грани $x$, т. е. число инцидентных $x$ ребер, обозначим через $d(x)$. $k$-*Вершина* — это вершина $v$ с $d(v) = k$, $k^+$-*вершина* ($k^-$-*вершина*) имеет степень не менее $k$ (не более $k$); аналогичные обозначения используются и для граней. Пусть $\delta(M)$ — минимальная степень вершин в НПМ $M$. Через $\mathbf{M}_l$, где $3 \leq l \leq 5$, обозначим класс нормальных плоских карт $M_l$ с $\delta(M_l) \geq l$.

*Вес* подграфа $S$ данной НПМ есть сумма степеней вершин подграфа $S$ в НПМ. *Высота* подграфа $S$ в НПМ есть максимальная степень вершин подграфа $S$ в НПМ. $k$-Звезда $S_k(v)$ называется *младшей*, если ее центр $v$ имеет степень не более 5. Все рассматриваемые далее звезды младшие. Через $w(S_k)$ и $h(S_5)$ обозначим минимальные вес и высоту соответственно младших $k$-звезд в данной НПМ.

---

Работа первого автора поддержана грантами РФФИ (коды проектов 16–01–00499, 15–01–05867) и Грантом Президента по поддержке ведущих научных школ РФ НШ-1939.2014.1. Работа второго автора выполнена в рамках государственной работы «Организация проведения научных исследований» и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–98510).

В 1904 г. Вернике [1] доказал, что каждая $M_5$ из $\mathbf{M}_5$ содержит 5-вершину, смежную с $6^-$-вершиной. Этот результат был усилен Франклином [2] в 1922 г. до существования 5-вершины, смежной с двумя $6^-$-вершинами. В 1940 г. Лебег [3, с. 36] дал приближенное описание младших 5-звезд в $\mathbf{M}_5$. В частности, его описание включает результаты из [1, 2] и показывает существование 5-вершины с тремя $7^-$-соседями.

Для $\mathbf{M}_5$ известные оценки $w(S_1) \le 11$ (Вернике [1]) и $w(S_2) \le 17$ (Франклин [2]) точные. В [3] доказана оценка $w(S_3) \le 24$, которая в 1996 г. улучшена Йендролем и Мадарашем [4] до точной оценки $w(S_3) \le 23$. Кроме того, в [4] дано точное описание младших 3-звезд в классе $\mathbf{M}_5$.

Оценка $w(S_4) \le 31$ Лебега [3] была усилена О. В. Бородиным и Вудалом [5] до точной оценки $w(S_4) \le 30$. Заметим, что $w(S_3) \le 23$ легко влечет $w(S_2) \le 17$ и, в свою очередь, незамедлительно следует из $w(S_4) \le 30$ (в обоих случаях достаточно удалить вершину максимальной степени из младшей вершины минимального веса). Недавно мы получили точное описание 4-звезд в $\mathbf{M}_5$ [6].

Для произвольных НПМ, т. е. в классе $\mathbf{M}_3$, известны следующие результаты о $(d-2)$-звездах при $d$-вершинах, где $d \le 5$. Ван ден Хойвел и МакГиннесс [7] доказали (в частности), что существует вершина $v$ такая, что либо $w(S_1(v)) \le 14$ при $d(v) = 3$, либо $w(S_2(v)) \le 22$ при $d(v) = 4$, либо $w(S_3(v)) \le 29$ при $d(v) = 5$. Балог и др. [8] доказали, что существует $5^-$-вершина, смежная с не более чем двумя $11^+$-вершинами.

Харант и Йендроль [9] усилили эти результаты, доказав, что либо $w(S_1(v)) \le 13$ при $d(v) = 3$, либо $w(S_2(v)) \le 19$ при $d(v) = 4$, либо $w(S_3(v)) \le 23$ при $d(v) = 5$. Недавно мы получили точное описание $(d-2)$-звезд в $\mathbf{M}_3$ [10].

Для класса $\mathbf{M}_3$ проблема описания $(d-1)$-звезд при $d$-вершинах, $d \le 5$, называемых *предполными звездами*, представляется трудной. Как следует из двойной $n$-пирамиды, минимальный вес $w(S_{d-1})$ предполных звезд в НПМ из класса $\mathbf{M}_4$ может быть неограниченно большим. Даже если $w(S_{d-1})$ ограничен соответствующими условиями, точные верхние оценки на него неизвестны. О. В. Бородин и др. [11, 12] доказали (в частности), что если плоский граф с $\delta \ge 3$ не содержит смежных $4^-$-вершин, то существует звезда $S_{d-1}(v)$ с $w(S_{d-1}(v)) \le 38 + d(v)$, где $d(v) \le 5$ (см. [12, теорема 2.А]). Йендроль и Мадараш [13] показали, что если вес $w(S_1)$ каждого ребра в НПМ из класса $\mathbf{M}_3$ не менее 9, то существует предполная звезда высоты не более 20, причем оценка 20 неулучшаема.

Более общая проблема описания $d$-звезд при $d$-вершинах, $d \le 5$, называемых *полными звездами*, на данный момент кажется неприступной для произвольных НПМ и трудной даже для класса $\mathbf{M}_5$.

Следующая известная конструкция показывает, что $w(S_5)$ не ограничен для НПМ из $\mathbf{M}_5$. Возьмем три концентрических $n$-цикла $C^i = v_1^i \dots v_n^i$, где $n$ не ограничено и $1 \le i \le 3$, и соединим $C^2$ с $C^1$ ребрами $v_j^2 v_j^1$ и $v_j^2 v_{j+1}^1$, где $1 \le j \le n$ (сложение по модулю $n$). То же самое проделаем с $C^2$ и $C^3$. Наконец, соединим все вершины $C^1$ с новой $n$-вершиной и то же сделаем для $C^3$.

5-Вершина $v$, окруженная вершинами $v_1, \dots, v_5$ в циклическом порядке, называется $(\overrightarrow{d_1, d_2, d_3, d_4})$-*вершиной*, или *вершиной типа* $(\overrightarrow{d_1, d_2, d_3, d_4})$, если существует $k$, $0 \le k \le 4$, такое, что $d(v_{i+k}) \le d_i$ при всех $1 \le i \le 4$ (сложение по модулю 5).

Очевидно, каждая 5-вершина $v$ в построенной НПМ является $(\overrightarrow{5, 6, 6, 5})$-вершиной и, более того, смежна с двумя 6-вершинами и $n$-вершиной. В [3] доказано, что если $M_5$ из $\mathbf{M}_5$ не содержит $(\overrightarrow{5,6,6,5})$-вершин, то $w(S_5) \le 68$ и $h(S_5) \le 41$. Недавно О. В. Бородин, А. О. Иванова и Йенсен [14] понизили эти оценки до 55 и 28 и дали конструкцию НПМ из $\mathbf{M}_5$ без $(\overrightarrow{5,6,6,5})$-вершин с $w(S_5) = 48$ и $h(S_5) = 20$.

Цель данной статьи — улучшить оценки 55 и 28 из [14] до 51 и 23 соответственно (теорема 1). Более того, мы находим в любой $M_5$ из класса $\mathbf{M}_5$ такую 5-звезду $S_5$, которая является одновременно и легкой, и низкой в том смысле, что имеет $w(S_5) \le 51$ и $h(S_5) \le 23$.

**Теорема 1.** *Каждая нормальная плоская карта с минимальной степенью* 5, *не содержащая* $(\overrightarrow{5,6,6,5})$*-вершин, содержит младшую 5-звезду веса не более* 51 *и высоты не более* 23.

Для того чтобы достичь уменьшения веса на 4, а высоты на 5, в ходе доказательства основного результата мы должны особо позаботиться о 5-звездах с весом не более 51, а высотой не менее 24, и о звездах с центрами в 5-вершинах типов $(\overrightarrow{5,5,7,5})$ и $(\overrightarrow{6,5,5,5})$.

## 2. Доказательство теоремы 1

Достаточно доказать теорему 1 для триангуляций, поскольку добавление диагоналей в нетреугольную грань нормальной плоской карты с $\delta = 5$ не создает ни новых младших 5-звезд, ни $(\overrightarrow{5,6,6,5})$-вершин и не может понизить высоту или вес имеющихся младших 5-звезд.

Допустим, что триангуляция $T$ с множествами вершин, ребер и граней $V$, $E$ и $F$ соответственно является контрпримером к теореме 1.

По предположению каждая младшая 5-звезда в $T$ либо имеет вес не менее 52, либо содержит $24^+$-вершину.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что центр 5-звезды $S_5$ в $T$ с $w(S_5) \le 51$ имеет один из следующих типов: $(\overrightarrow{7,5,5,5})$, $(\overrightarrow{5,7,5,5})$, $(\overrightarrow{6,5,5,5})$, $(\overrightarrow{6,6,5,5})$, $(\overrightarrow{6,5,6,5})$, или $(\overrightarrow{6,5,5,6})$.

Перепишем формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для $T$ в виде

$$\sum_{v\in V}(d(v) - 6) + \sum_{f\in F}(2d(f) - 6) = -12. \tag{1}$$

Начальный заряд $\mu(v)$ каждой вершины $v \in V(G)$ положим равным $d(v)-6$. Заметим, что только 5-вершины имеют отрицательный заряд. Также положим $\mu(f) = 0$ для $f \in F$. Используя свойства контрпримера $T$ к теореме 1, локально перераспределим заряды, сохраняя их сумму, так что финальный заряд $\mu(x)$ для всех $x \in V \cup F$ останется неотрицательным. Последнее будет противоречить тому, что согласно (1) сумма финальных зарядов равна $-12$.

Прежде чем сформулировать правила перераспределения зарядов, дадим несколько определений (рис. 1) и небольших лемм.

5-Вершина $v$ типа $(\overrightarrow{5,5,k,5})$ называется *бедной*, если $k = 7$, *состоятельной*, если $v$ имеет соседа степени от 8 до 23, и *богатой*-I, если $v$ имеет двух $24^+$-соседей.

5-Вершина называется *богатой*-II, если она является $(\overrightarrow{6^+,5,5,6^+})$-вершиной в точности с двумя 5-соседями, и *богатой*-III, если она является $(\overrightarrow{5,5,5,6^+})$-вершиной.

5-Вершина $v$ называется:

*богатой*-IV, если она имеет в точности двух 5-соседей, которые расположены не последовательно вокруг $v$;

*богатой*-V, если она имеет в точности одного 5-соседа;

*богатой*-VI, если она не имеет 5-соседей.

5-Вершина называется *богатой*, если она принадлежит одной из категорий от богатой-I до богатой-VI. Заметим, что каждая 5-вершина является либо бедной, либо состоятельной, либо богатой.

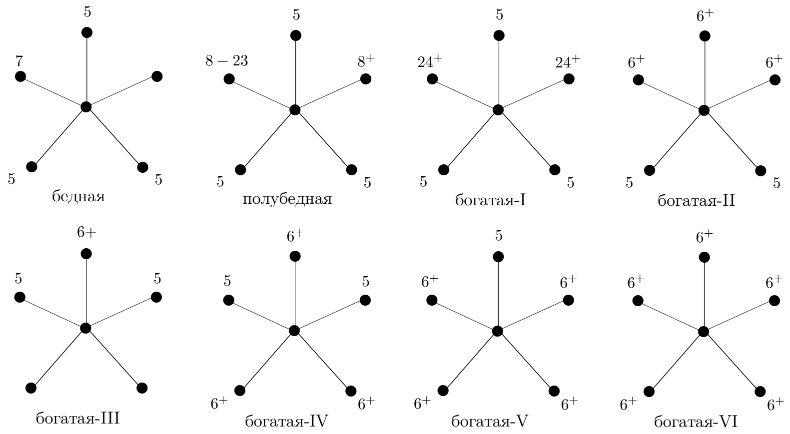


Рис. 1. Типы 5-вершин.

Грань $xyz$ называется $(5,5,5)$-*гранью*, если $d(x) = d(y) = d(z) = 5$.

**Лемма 2.** *Если* $(5,5,5)$-*грань* $xyz$ *имеет бедную вершину* $x$, *то хотя бы одна из* $y$, $z$ *является богатой.*

Доказательство. Действительно, пусть существует 3-грань $xyz'$ с $d(z') = 7$. Если $y$ бедная, то $z$ имеет двух $24^+$-соседей, а значит, $z$ либо богатая-I, либо богатая-II. $\square$

Для натурального числа $n$ положим $\xi(n) = \frac{n-6}{n}$, если $n \geq 8$, и $\xi(n) = 0$ в противном случае. Для каждой $8^+$-вершины $v$ положим $\psi(v) = \xi(d(v))$.

В дальнейшем удобно использовать выпуклость возрастающей функции $\xi(n)$ при натуральных $n \geq 8$, которая легко проверяется.

**Лемма 3.** *Для каждых целых* $p$ *и* $q$, *где* $8 \leq p < q$, *имеет место неравенство*

$$\xi(p) + \xi(q) \leq \xi(p+1) + \xi(q-1).$$

**2.1. Правила перераспределения зарядов.** *Финальный заряд* $\mu'(x)$ для всех $x \in V \cup F$ определяется применением следующих правил R1–R4 (рис. 2).

**R1.** Если 7-вершина $x$ лежит в границе грани $xyz$ с $d(y) = 5$ и $d(z) \geq 6$, то $x$ отдает $\frac{1}{4}$ вершине $y$ вдоль ребра $xy$.

**R2.** Каждая $8^+$-вершина $v$ отдает $\psi(v)$ в каждую инцидентную грань.

**R3.** Пусть грань $f = xyz$ такая, что $d(x) = 5$ и $d(z) \geq 6$. Тогда $x$ получает от $f$ следующий заряд:

$(a)$ $\frac{\psi(z)}{2}$, если $d(y) = 5$

или

$(b)$ $\psi(y)+\psi(z)$, если $d(y)\ge 6$.

**R4.** Пусть $(5,5,5)$-грань $f=xyz$ инцидентна бедной вершине $x$. Если обе вершины $y$ и $z$ богатые, то каждая из них дает $\frac{1}{8}$ вершине $x$ через грань $f$. В противном случае в силу леммы 2 вершина $x$ получает $\frac{1}{4}$ через $f$ только от богатой вершины из множества $\{y,z\}$. Кроме того, если $y$ бедная, то $y$ также получает $\frac{1}{4}$ от $z$ через $f$ по симметрии.

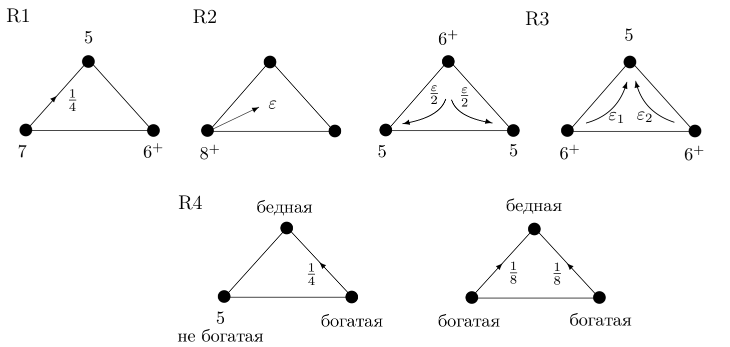


Рис. 2. Правила перераспределения зарядов.

**2.2. Проверка неравенства $\mu'(x)\ge 0$ для всех $x\in V\cup F$.** Каждая грань $f$ удовлетворяет неравенству $\mu'(f)\ge 0$ согласно R2 и R3. Из R2 следует, что $\mu'(v)=0$ для каждой $8^+$-вершины $v$. Поскольку 6-вершины не участвуют в правилах перераспределения зарядов, то $\mu'(v)=\mu(v)=0$ при $d(v)=6$.

Пусть $v$ — 7-вершина. Если $v$ имеет не более четырех 5-соседей, то $\mu'(v)\ge 7-6-4\times\frac{1}{4}=0$ по R1. В противном случае $v$ смежна с не более чем двумя $6^+$-вершинами, поэтому $\mu'(v)\ge 1-4\times\frac{1}{4}=0$ по R1.

Осталось показать, что каждая 5-вершина $v$ имеет $\mu'(v)\ge 0$.

Случай 1: $v$ бедная. Теперь $v$ получает не менее $\xi(24)=\frac{3}{4}$ от двух инцидентных граней вместе с $24^+$-вершиной по R3 и также $\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ через инцидентную $(5,5,5)$-грань по R4, откуда $\mu'(v)\ge 5-6+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=0$.

Случай 2: $v$ — состоятельная вершина с $8\le d(v_2)\le 23$ и $d(v_5)\ge 8$. Заметим, что $v$ не отдает заряда по R4, поэтому для обеспечения $\mu'(v)\ge 0$ достаточно, чтобы $v$ получила в сумме 1 от $v_2$ и $v_5$.

Если $d(v_2)=8$, то $d(v_5)\ge 24$, поскольку иначе 5-звезда при $v$ была бы легкой и низкой, поэтому $v$ получает $\xi(8)=\frac{1}{4}$ от $v_2$ и не менее $\xi(24)=\frac{3}{4}$ от $v_5$, что и требуется.

Более общо, по определению состоятельной вершины всегда имеем $d(v_2)+d(v_5)\ge 32$, тем самым $v$ получает не менее $\xi(8)+\xi(24)=1$ от $v_2$ и $v_5$ благодаря лемме 3, откуда $\mu'(v)\ge 0$.

Случай 3: $v$ богатая-I. Предположим, что $v_2$ и $v_5$ являются $24^+$-соседями вершины $v$. Поскольку $v$ получает не менее $\xi(24)=\frac{3}{4}$ от каждой из $v_2$ и $v_5$ по R2 и R3, а отдает не более $\frac{1}{4}$ каждой из вершин $v_3$ и $v_4$ по R4, получаем $\mu'(v)\ge -1+2\times\frac{3}{4}-2\times\frac{1}{4}=0$.

Случай 4: $v$ богатая-II с $d(v_3)=d(v_4)=5$ (и тремя $6^+$-соседями). Напомним, что $v$ может отдавать не более $2\times\frac{1}{4}$ по R4, и предположим, что $\mu'(v)<0$.

Заметим, что $d(v_1)\le 23$, поскольку в противном случае $v$ получает не менее $2\times\xi(24)=\frac{3}{2}$ от $v_1$; противоречие.

Теперь докажем, что $d(v_1) \le 11$. Действительно, иначе $v$ получает не менее $2 \times \xi(12) = 1$ от $v_1$, и имеем $d(v_2) + d(v_5) \ge 52 - 3 \times 5 - 23 = 14$. Если $d(v_2) \ge 7$ и $d(v_5) \ge 7$, то $v$ получает не менее $\frac{1}{2}$ от $v_2$ и $v_5$; противоречие. Остается предположить, что $d(v_2) = 6$ и $d(v_5) \ge 8$. Однако в этом случае $v_3$ не является бедной, откуда $\mu'(v) \ge -1 + 1 + \frac{3}{2}\xi(8) - \frac{1}{4} > 0$; противоречие.

Последний абзац означает, что фактически $d(v_2)+d(v_5) \ge 52-3\times5-11 = 26$. Согласно лемме 3 вершина $v$ получает не менее $\frac{3}{2}(\xi(6) + \xi(20)) > \frac{3}{2}\xi(18) = 1$ от $v_2$ и $v_5$. Таким образом, нечего доказывать, кроме случая $d(v_1) \le 7$, так как иначе $v$ также получает не менее $2\xi(8) = \frac{1}{2}$ от $v_1$; противоречие.

Если $d(v_1) = 7$, то $d(v_2) + d(v_5) \ge 30$, поэтому $v$ получает $\frac{1}{4}$ от $v_1$ и не менее чем $\frac{3}{2}\xi(24) = \frac{9}{8}$ от $v_2$ и $v_5$. Теперь, чтобы выполнялось предположение $\mu'(v) < 0$, обе вершины $v_3$ и $v_4$ должны быть бедными. Однако это может быть, только если $d(v_2) \ge 24$ и $d(v_5) \ge 24$, но в этом случае $\mu'(v) \ge -1 + 2 \times \frac{3}{2}\xi(24) - 2 \times \frac{1}{4} > 0$; противоречие.

Наконец, пусть $d(v_1) = 6$. Здесь потребуются более тщательные рассуждения. Из предыдущего абзаца знаем, что $v$ получает не менее $\frac{3}{2}\xi(24) = \frac{9}{8}$ от $v_2$ и $v_5$. Также имеем $d(v_2) + d(v_5) \ge 31$.

Если одна из $v_2, v_5$, пусть $v_2$, является 6-вершиной, то соответствующая вершина $v_3$ богатая, откуда $\mu'(v) \ge -1 + \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 0$ по R4; противоречие.

Если $d(v_2) \ge 7$ и $d(v_5) \ge 7$, то согласно лемме 3 вершина $v$ получает не менее $\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\xi(24) = \frac{11}{8}$ от $v_2$ и $v_5$, поскольку

$$\frac{11}{8} < \frac{3}{2}(\xi(8) + \xi(23)) < \frac{3}{2}(\xi(9) + \xi(22)) < \cdots < \frac{3}{2}(\xi(15) + \xi(16)).$$

Это значит, что согласно R4 остается рассмотреть лишь случай, когда обе вершины $v_3$ и $v_4$ бедные. Здесь снова имеем $d(v_2) \ge 24$ и $d(v_5) \ge 24$, и возникает то же противоречие, что и выше в случае $d(v_1) = 7$.

Случай 5: $v$ богатая-III с $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 5$. Заметим, что $v_2$ также является богатой-III вершиной, поэтому наша $v$ дает по R4 только $\frac{1}{8}$ каждой бедной вершине из множества $\{v_1, v_3\}$, если таковые есть.

Если $d(v_4) \le 8$, то $d(v_5) \ge 24$, иначе было бы $w(S_5(v)) \le 51$ и $h(S_5(v)) \le 23$, что невозможно.

Если $d(v_4) = 6$, то $v_3$ не является бедной, поэтому $v$ может давать только $\frac{1}{8}$ вершине $v_1$ по R4, если $v_1$ бедная. Таким образом, $\mu'(v) \ge -1 + \frac{3}{2}\xi(24) - \frac{1}{8} = 0$.

Предположим, что $d(v_4) \ge 7$ и $d(v_5) \ge 7$. Теперь $v$ получает не менее $\frac{11}{8}$ от $v_4$ и $v_5$ согласно лемме 3, поскольку

$$\frac{11}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\xi(24) < \frac{3}{2}(\xi(8) + \xi(24)) < \frac{3}{2}(\xi(9) + \xi(23)) < \cdots < \frac{3}{2}(\xi(15) + \xi(16)).$$

Таким образом, $\mu'(v) \ge \frac{11}{8} - 2 \times \frac{1}{8} > 0$.

Случай 6: $v$ — богатая-IV вершина с $d(v_2) = d(v_5) = 5$. Отметим, что $v$ не участвует в R4, поэтому достаточно, чтобы она получила в сумме 1 от трех $6^+$-соседей.

Если $d(v_3) + d(v_4) = 13$, то $d(v_1) \ge 24$ по свойствам нашего контрпримера $T$, следовательно, $v$ получает $\frac{1}{4}$ от $v_3$ или $v_4$ и не менее $\xi(24) = \frac{3}{4}$ от $v_1$. Таким образом, $\mu'(v) \ge -1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$.

Если $d(v_3) + d(v_4) = 14$, то $d(v_1) \ge 16$, значит, $v$ получает не менее $\frac{3}{8}$ от $v_3$ и $v_4$ и не менее $\xi(16) = \frac{5}{8}$ от $v_1$, поэтому снова $\mu'(v) \ge 0$.

Если $15 \leq d(v_3) + d(v_4) \leq 23$, то $d(v_1) \geq 12$, следовательно, $v$ получает не менее $\frac{1}{2}$ от $v_3$ и $v_4$ согласно лемме 3 и не менее $\xi(12) = \frac{1}{2}$ от $v_1$, поэтому $\mu'(v) \geq 0$.

Наконец, если $d(v_3) + d(v_4) \geq 24$, то $v$ получает не менее $\frac{1}{2}$ от $v_3$ и $v_4$ благодаря лемме 3, что влечет $\mu'(v) \geq 0$.

Случай 7: $v$ — богатая-V или богатая-VI вершина, т. е. она имеет не более одного 5-соседа. Достаточно снова проверить, что $v$ получит не менее 1 от своих $7^+$-соседей.

Предположим противное. Как следует из правила R1, $v$ имеет не более трех $7^+$-соседей. По правилам R2 и R3 вершина $v$ имеет не более двух $8^+$-соседей, не более одного $9^+$-соседа и не имеет $18^+$-соседей (поскольку $2 \times \frac{3}{2}\xi(8) + \xi(8) = 2 \times \frac{3}{2}\xi(9) = \frac{3}{2}\xi(18) = 1$ и $\xi$ возрастающая). Это значит, что $w(S_5(v)) \leq 5 + 2 \times 6 + 7 + 8 + 17 = 49$ и $h(S_5(v)) \leq 17$; противоречие.

Таким образом, $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, что противоречит (1) и завершает доказательство теоремы 1.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Wernicke P.* Über den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.
2. *Franklin Ph.* The four colour problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
3. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
4. *Jendrol' S., Madaras T.* On light subgraphs in plane graphs of minimal degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
5. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.
6. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1710–1714.
7. *Van den Heuvel J., McGuinness S.* Coloring the square of a planar graph // J. Graph Theory. 2003. V. 42. P. 110–124.
8. *Balogh J., Kochol M., Pluhár A., Yu X.* Covering planar graphs with forests // J. Comb. Theory Ser. B. 2005. V. 94. P. 147–158.
9. *Harant J., Jendrol' S.* On the existence of specific stars in planar graphs // Graphs Comb. 2007. V. 23. P. 529–543.
10. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing $(d-2)$-stars at $d$-vertices, $d \leq 5$, in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1700–1709.
11. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-ден-Хойвел Я.* Строение плоских триангуляций в терминах пучков и звезд // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 2. С. 15–39.
12. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-ден-Хойвел Я.* Минимальная степень и хроматическое число квадрата плоского графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 4. С. 9–33.
13. *Jendrol' S., Madaras T.* Note on an existence of small degree vertices with at most one big degree neighbour in planar graphs // Tatra Mt. Math. Publ. 2005. V. 30. P. 149–153.
14. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R.* 5-stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2014. V. 34, N 3. P. 539–546.


*Статья поступила 17 сентября 2015 г.*

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
shmgnanna@mail.ru