Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.5

НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов

Аннотация. Для классов $W^{(r)}_{q,a}(\Phi,\mu)$, $\mu \ge 1$, аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди H_q, $q \ge 1$, усредненные модули непрерывности граничных значений производных по аргументу $f_a^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, которых мажорируются заданной функцией Φ, вычислены точные значения различных n-поперечников. Для вычисления линейных и гельфандовских n-поперечников построены наилучшие линейные методы приближения указанных классов функций.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.219

Ключевые слова: наилучшие линейные методы приближения, модуль непрерывности, пространства Харди, мажоранта, n-поперечник.

1. Пусть X — произвольное банахово пространство, S — единичный шар в X, $\mathfrak{M}$ — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $L_n \subset X$ — n-мерное линейное подпространство, $L^n \subset X$ — подпространство коразмерности n, $\mathscr{L}(X, L_n)$ — множество всех линейных ограниченных операторов $\{\Lambda\}$, отображающих пространство X в подпространство L_n.

Через
$$E_n(f)_X := E(f, L_n)_X = \inf\{\|f - g\|_X : g \in L_n\}$$
обозначим наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами подпространства L_n в метрике пространства X, а через
$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M}, L_n) = \sup\{E_n(f)_X : f \in \mathfrak{M}\} \tag{1}$$
— приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством $L_n \subset X$. Отклонение элемента $f \in X$ от линейного непрерывного оператора $\Lambda(f, L_n)$ в норме X определим равенством
$$\mathscr{E}(f; \Lambda, L_n)_X = \|f - \Lambda(f, L_n)\|_X$$
и через
$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}; \Lambda, L_n)_X = \sup\{\mathscr{E}(f; \Lambda, L_n)_X : f \in \mathfrak{M}\}$$
обозначим максимальное отклонение множества $\mathfrak{M} \subset X$ от фиксированного подпространства $L_n \subset X$. Величина
$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}; L_n)_X = \inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}; \Lambda, L_n)_X : \Lambda \subset \mathscr{L}(X, L_n)\} \tag{2}$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M} \subset X$ элементами подпространства $L_n \subset X$. Линейный оператор $\Lambda^* = \Lambda^*(f, L_n) \subset \mathscr{L}(X, L_n)$, если он существует и реализует точную нижнюю грань в (2), является наилучшим для множества $\mathfrak{M} \subset X$ линейным методом приближения. Очевидно, что для величин (1) и (2) согласно определению выполняется неравенство $E(\mathfrak{M}; L_n)_X \leq \mathscr{E}(\mathfrak{M}; L_n)_X$.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : L_{n+1} \subset X\}, \tag{3}$$

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\{E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X\}, \tag{4}$$

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L^n\} : L^n \subset X\}, \tag{5}$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}; L_n)_X : L_n \subset X\} \tag{6}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *гельфандовским* и *линейным n-поперечниками.*

Если существует подпространство $L^*_{n+1} \subset X$, для которого

$$b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L^*_{n+1} \subset \mathfrak{M}\},$$

то оно экстремально для бернштейновского n-поперечника. Подпространство $L^n_* \subset X$ коразмерности n, если оно существует и такое, что

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L^n_*\},$$

называют экстремальным для $d^n(\mathfrak{M}; X)$.

Подпространство $\widetilde{L}_n \subset X$, для которого $\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \mathscr{E}(\mathfrak{M}; \widetilde{L}_n)_X$, если оно существует, является экстремальным для линейного n-поперечника.

Особый интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $\widehat{L}_n \subset X$, для которых имеют место равенства

$$E(\mathfrak{M}; \widehat{L}_n)_X = \mathscr{E}(\mathfrak{M}; \widehat{L}_n)_X = d_n(\mathfrak{M}; X) = \delta_n(\mathfrak{M}; X).$$

Перечисленные n-поперечники монотонно убывают по n и связаны следующими неравенствами [1, 2]:

$$b_n(\mathfrak{M}; X) \leq \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}; X) \\ d^n(\mathfrak{M}; X) \end{matrix} \leq \delta_n(\mathfrak{M}; X). \tag{7}$$

2. Экстремальной задаче вычисления точных значений n-поперечников (3)–(6) различных классов аналитических в круге функций, принадлежащих пространству H_q, $q \geq 1$, и связанной с ней задачей построения наилучших линейных методов приближения посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [1–24] и приведенную там литературу).

Целью данной работы является получение новых результатов, связанных с вычислением точных значений n-поперечников (3)–(6) классов функций, принадлежащих пространству H_q, $1 \leq q \leq \infty$, усредненные модули непрерывности граничных значений производных которых мажорируются заданной функцией. При этом для вычисления линейных и гельфандовских n-поперечников построены наилучшие линейные методы приближения рассматриваемых классов функций.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$ — множество натуральных, положительных и комплексных чисел соответственно. Множество аналитических в круге $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$ $(0 < \rho \leq 1,\, U_1 = U)$ функций $f(z)$ обозначим через $\mathscr{A}(U_\rho)$.

Говорят, что функция $f(z)\in\mathscr{A}(U)$ *принадлежит банахову пространству Харди* H_q, $1\le q\le\infty$, если

$$\|f\|_q:=\|f\|_{H_q}=\lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^q\,dt\right)^{1/q}<\infty,\quad 1\le q\le\infty.$$

При этом норма реализуется на угловых граничных значениях $f(t):=f(e^{it})$, которые существуют почти для всех $0\le t\le 2\pi$. В случае $q=\infty$ будем дополнительно предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в U. Через $f_a^{(r)}(z)$, $r\in\mathbb{N}$, обозначим производную r-го порядка аналитической функции $f(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z=\rho\exp(it)$:

$$f_a^{(1)}(z):=\frac{\partial f(z)}{\partial t}=\frac{df}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=f'(z)zi\quad\text{и}\quad f_a^{(r)}(z):=\bigl\{f_a^{(r-1)}(z)\bigr\}_a'\quad(r\ge 2).$$

Под $H_{q,a}^{(r)}$ понимаем класс функций $f(z)\in\mathscr{A}(U)$, у которых производная $f_a^{(r)}(z)$ принадлежит пространству H_q. Через $\mathscr{P}_n$ обозначим множество комплексных алгебраических полиномов степени n, а через

$$E_n(f)_q:=E(f,\mathscr{P}_{n-1})_q=\inf\{\|f-p_{n-1}\|_q:p_{n-1}\in\mathscr{P}_{n-1}\}$$

— наилучшее приближение функции $f(z)\in H_q$ элементами множества $\mathscr{P}_{n-1}$. Для функции $f(z)\in H_q$ определим модуль непрерывности равенством

$$\omega(f,t)_q:=\sup\{\|f(\cdot+h/2)-f(\cdot-h/2)\|_q:|h|\le t\}.$$

Структурные свойства функции $f(z)\in H_{q,a}^{(r)}$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности граничных значений r-х производных $f_a^{(r)}(t)$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усредненной с весом величины $\omega\bigl(f_a^{(r)},t\bigr)_q$.

Пусть $\Phi(x)$, $x\ge 0$, — произвольная возрастающая непрерывная функция такая, что $\Phi(0)=0$. Используя функцию $\Phi(x)$ в качестве мажоранты, введем в рассмотрение следующий класс аналитических функций:

$$W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)=\left\{f(z)\in H_{q,a}^{(r)}:\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega\bigl(f_a^{(r)};2t\bigr)_q\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right]dt\le\Phi(h)\right\},$$

где $h\in\mathbb{R}_+$, $r\in\mathbb{N}$, $1\le q\le\infty$ и $\mu\in\mathbb{R}_+$, $\mu\ge 1$, — произвольное фиксированное число. Положим также $(\sin x)_*:=\{\sin x,\ \text{если}\ 0<x\le\pi/2;\ 1,\ \text{если}\ x\ge\pi/2\}$.

3. В этом пункте сформулируем и докажем основные результаты данной статьи. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если при заданном $\mu\ge 1$ и любых $n\in\mathbb{N}$, $h\in\mathbb{R}_+$ мажоранта $\Phi(x)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2\mu n))}\ge\frac{\pi}{2\mu}\int\limits_0^1(\sin nht)_*\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right]dt,\tag{8}$$

то при любых $r\in\mathbb{N}$ справедливы равенства

$$b_n\bigl(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu);H_q\bigr)=d_n\bigl(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu);H_q\bigr)=E_n\bigl(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\bigr)_{H_q}=\frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).\tag{9}$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, *удовлетворяющих ограничению* (8), *непусто.*

Доказательство. В [10] доказано, что для любой функции $f(z)\in H_q$, у которой $f'_a(z)\in H_q$, $1\le q\le\infty$, при любом $u\in(0,\pi/(2n)]$, $n\in\mathbb{N}$, наилучшее приближение функции $f(z)$ элементами $p_{n-1}(z)\in\mathscr{P}_{n-1}$ оценивается точным неравенством

$$E_n(f)_q\le\frac{1}{2}\int\limits_0^u\omega(f'_a,2t)_q\biggl\{1+\biggl[\biggl(\frac{\pi}{2nu}\biggr)^2-1\biggr]\sin\frac{\pi t}{2u}\biggr\}\,dt \tag{10}$$

и равенство в (10) достигается на функции $f_0(z)=az^n$, $a\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$.

Если положить $\pi/(2nu)=\mu$, $1\le\mu<\infty$, то неравенство (10) примет вид

$$E_n(f)_q\le\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)}\omega(f'_a,2t)_q\{1+(\mu^2-1)\sin\mu nt\}\,dt. \tag{11}$$

Воспользовавшись доказанным в [7] неравенством

$$E_n(f)_q\le n^{-r+1}E_n\bigl(f_a^{(r-1)}\bigr)_q,\quad r\in\mathbb{N},\ 1\le q\le\infty,$$

в качестве следствия из (11) для произвольного $f(z)\in H_{q,a}^{(r)}$ имеем

$$E_n(f)_q\le\frac{1}{2n^{r-1}}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)}\omega\bigl(f_a^{(r)},2t\bigr)_q\{1+(\mu^2-1)\sin\mu nt\}\,dt. \tag{12}$$

Учитывая определение класса $W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)$ для произвольной функции $f(z)\in W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)$, из неравенства (12) получаем

$$\begin{aligned}E_n(f)_q&\le\frac{\pi}{4\mu n^r}\left(\frac{2\mu n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)}\omega\bigl(f_a^{(r)},2t\bigr)_q\{1+(\mu^2-1)\sin\mu nt\}\,dt\right)\\&\le\frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\biggl(\frac{\pi}{2\mu n}\biggr),\quad 1\le\mu<\infty,\ n,r\in\mathbb{N},\ 1\le q\le\infty.\end{aligned} \tag{13}$$

Из (13) с учетом (7) для бернштейновских и колмогоровских n-поперечников запишем оценку сверху

$$b_n\bigl(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu);H_q\bigr)\le d_n\bigl(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu);H_q\bigr)\le E_n\bigl(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\bigr)_{H_q}\le\frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\biggl(\frac{\pi}{2\mu n}\biggr). \tag{14}$$

С целью получения оценки снизу, равной правой части (14), в множестве $\mathscr{P}_n\cap H_q$ введем в рассмотрение $(n+1)$-мерную сферу полиномов

$$S_{n+1}:=\biggl\{p_n\in\mathscr{P}_n:\|p_n\|_q=\frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\biggl(\frac{\pi}{2\mu n}\biggr)\biggr\}$$

и докажем включение $S_{n+1}\subset W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)$. В [10] доказано, что для произвольного комплексного алгебраического полинома $p_n\in\mathscr{P}_n$ выполняется неравенство

$$\omega\bigl((p_n)_a^{(r)},2t\bigr)_q\le 2(\sin nt)_*\,n^r\|p_n\|_q. \tag{15}$$

Неравенство (15) умножим на функцию $h^{-1}[1+(\mu^2-1)\sin(\pi t/2h)]$ и проинтегрируем по переменной t в пределах $0 \le t \le h$, затем заменим норму полинома радиусом сферы и положим $t = \tau h$. В итоге после выполнения всех этих преобразований с учетом ограничения (8) приходим к неравенству

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega\big((p_n)_a^{(r)}, 2t\big)_q \left\{1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right\} dt$$

$$\le 2n^r \|p_n\|_q \cdot \frac{1}{h}\int_0^h (\sin nt)_* \left\{1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right\} dt$$

$$= \frac{\pi}{2\mu}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right)\int_0^1 (\sin nht)_* \left\{1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right\} dt \le \Phi(h),$$

откуда и следует включение $S_{n+1} \subset W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)$. Из этого включения и определения бернштейновского n-поперечника получаем оценки снизу

$$d_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_q\big) \ge b_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_q\big) \ge b_n(S_{n+1}; H_q) \ge \frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \quad (16)$$

Требуемое равенство (9) следует из сопоставления оценки сверху (14) и оценки снизу (16). Покажем далее, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (8), непусто. Для этого определим те значения $\alpha = \alpha(\mu)$, $1 \le \mu < \infty$, при которых мажоранта $\Phi_*(h) = h^\alpha$ удовлетворяет соотношению (8). Конкретизируя условие (8) для функции Φ_*, получаем

$$\left(\frac{2\mu nh}{\pi}\right)^\alpha \ge \frac{\pi}{2\mu}\int_0^1 (\sin nh\tau)_* \left\{1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi\tau}{2}\right\} d\tau$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{2\mu nh}{\pi}\right)^{\alpha+1} \ge nh\int_0^1 (\sin nh\tau)_* \left\{1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi\tau}{2}\right\} d\tau. \quad (17)$$

Последнее неравенство при всех $\mu \in [1,\infty)$ для значений

$$\alpha(\mu)+1 \overset{\text{def}}{=} \beta(\mu) = 1+\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2\int_0^1 t\cos\frac{\pi t}{2\mu}\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right] dt$$

доказано в [10], а это значит, что в нашем случае неравенство (17) имеет место для

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \alpha(\mu) = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^2\int_0^1 t\cos\frac{\pi t}{2\mu}\left[1+(\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right] dt.$$

В частности, $\alpha(1) = (\pi/2)-1$, $\lim\limits_{\mu\to\infty}\alpha(\mu) = 1$ и для всех $\mu \in [1,\infty)$ имеем $(\pi/2)-1 \le \alpha(\mu) \le 1$, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Символом $H_{q,\rho}$ $(0 < \rho \le 1,\ H_{q,1} \equiv H_q)$ обозначим банахово пространство Харди аналитических в круге $|z| < \rho$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f(z)\|_{q,\rho} \overset{\text{def}}{=} \|f(\rho z)\|_q < \infty.$$

Результат, полученный в теореме 1, распространим на более общее пространство $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$.

Теорема 2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$ и мажоранта $\Phi(h)$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению (8). Тогда при всех $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$, $\mu \ge 1$, имеют место равенства*

$$b_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\big) = d_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\big)$$
$$= E_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\big)_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \quad (18)$$

При этом (а) $L_{n+1}^* = \operatorname{span}\{1, z, \cdots, z^n\}$ *есть оптимальное подпространство для бернштейновского n-поперечника $b_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\big)$;*

(б) L_n^* *является экстремальным подпространством для колмогоровского n-поперечника $d_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\big)$.*

Доказательство. Поскольку для произвольной функции $f(z) \in H_q$, $1 \le q \le \infty$, справедливо неравенство [8]

$$E_n(f)_{H_{q,\rho}} \le \rho^n E_n(f)_{H_q}, \quad 1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1, \quad (19)$$

переходя к верхним граням по всем функциям $f(z) \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)$, из (19) получаем

$$E_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\big)_{H_{q,\rho}} \le \rho^n E_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\big)_{H_q}, \quad 1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1,$$

откуда в силу неравенств (7) и (14) имеем

$$b_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\big) \le d_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\big)$$
$$\le E_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\big)_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \quad (20)$$

С целью получения оценки снизу в множестве $\mathscr{P}_n \cap H_{q,\rho}$ введем в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1}^* = \left\{p_n \in \mathscr{P}_n : \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right)\right\}$$

и докажем включение $S_{n+1}^* \subset W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)$. Используя неравенство из [2, с. 255]

$$\|p_n\|_q \le \rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,\rho}}, \quad 1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1,$$

запишем (15) в виде

$$\omega\big((p_n)_a^{(r)}, 2t\big)_q \le 2(\sin nt)_* n^r \rho^{-n}\|p_n\|_{H_{q,\rho}}. \quad (21)$$

Из (21) для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathscr{P}_n$ и любых $n, r \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ с учетом ограничения (8) получаем

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega\big((p_n)_a^{(r)}, 2t\big)_q \left\{1 + (\mu^2 - 1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right\} dt$$
$$\le 2n^r\rho^{-n}\|p_n\|_{q,\rho}\int_0^1 (\sin nht)_*\left[1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right] dt$$
$$\le \frac{\pi}{2\mu}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right)\int_0^1 (\sin nht)_*\left[1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2}\right] dt \le \Phi(h).$$

Последнее соотношение означает, что $S^*_{n+1} \subset W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$, а потому согласно соотношению (7) и определению бернштейновского n-поперечника имеем

$$d_n\big(W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu);H_{q,\rho}\big) \ge b_n\big(W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu);H_{q,\rho}\big) \ge b_n(S^*_{n+1};H_{q,\rho}) \ge \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{22}$$

Требуемые равенства (18) следуют из сопоставления неравенств (20) и (22).

Теорема 3. *Если при заданном $\mu \ge 1$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет ограничению (8), то и при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \le 1$, $1 \le q \le \infty$ справедливы равенства*

$$\lambda_n\big(W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu);H_{q,\rho}\big) = \mathscr{E}\big(W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu);\Lambda_{n-1,r-1,\rho};\mathscr{P}_n\big)_{H_{q,\rho}}$$
$$:= \sup\big\{\|f-\Lambda_{n-1,r-1,}(f)\|_{H_{q,\rho}} : f \in W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)\big\} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{23}$$

Здесь $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$; линейный полиномиальный оператор $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)$ определяется равенством

$$\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;z) \overset{\text{def}}{=} c_0$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1+\left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,n}\left(1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_k z^k, \tag{24}$$

где

$$\gamma_{k,n} \overset{\text{def}}{=} n\mu\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)}\cos kt\cos(\mu nt)\,dt.$$

При этом (а) *линейный полиномиальный оператор* (24) *является наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$ в метрике пространства $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$;*

(б) $L^n_* = \{f \in H_{q,\rho} : f^{(k)}(0) = 0,\ k = 0,1,\dots,n-1\}$ *является экстремальным подпространством коразмерности n для гельфандовского n-поперечника $d^n\big(W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu);H_{q,\rho}\big)$;*

(в) *подпространство* $L^*_n = \mathrm{span}\{1,\dots,z^{n-1}\}$ *экстремально для линейного n-поперечника $\delta_n\big(W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu);H_{q,\rho}\big)$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы 3 в силу неравенств (7) достаточно построить наилучший линейный метод приближения функций класса $W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$, чтобы оценить линейный n-поперечник сверху. В [17] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in H^{(r)}_{q,a}$ выполняется неравенство

$$\|f-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\rho^n}{2n^{r-1}}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)}\omega\big(f^{(r)}_a,2t\big)_q\big[1+(\mu^2-1)\sin(\mu nt)\big]\,dt. \tag{25}$$

Заметим, что если $f(z) \in W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$, то из правой части (25) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\rho^n}{2n^{r-1}} &\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega\big(f_a^{(r)}, 2t\big)_q [1+(\mu^2-1)\sin(\mu n t)]\,dt \\ &= \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\left(\frac{2\mu n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2\mu n)} \omega\big(f_a^{(r)}, 2t\big)_q [1+(\mu^2-1)\sin(\mu n t)]\,dt\right) \\ &\le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right), \quad n,r\in\mathbb{N},\ \mu\ge 1,\ 0<\rho\le 1. \qquad (26)\end{aligned}$$

Из (25) и (26) следует, что для произвольной функции $f(z) \in W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$ имеет место неравенство

$$\|f-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f)\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \qquad (27)$$

Покажем, что если мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (8), то в классе $W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$ существует функция, для которой неравенство (27) обращается в равенство. С этой целью рассмотрим функцию

$$\mathrm{g}_0(z) = \frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right)z^n$$

и покажем, что $\mathrm{g}_0(z) \in W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$. При доказательстве теоремы 2 установили, что шар S^*_{n+1} принадлежит классу $W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$. Так как в нашем случае

$$\|\mathrm{g}_0\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right),$$

то $\mathrm{g}_0(z) \in S^*_{n+1}$. Следовательно, $\mathrm{g}_0(z) \in W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$. При этом из представления (24) следует, что $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(\mathrm{g}_0) \equiv 0$, а потому

$$\|\mathrm{g}_0-\Lambda_{n-1,r-1,\rho}(\mathrm{g}_0)\|_{H_{q,\rho}} = \|\mathrm{g}_0\|_{H_{q,\rho}} = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \qquad (28)$$

Из неравенств (7) и равенства (28) вытекает, что при выполнении ограничения (8) на мажоранту Φ имеют место соотношения

$$\delta_n\big(W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\big) \le \mathscr{E}_n\big(W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu); \Lambda_{n-1,r-1,\rho}; \mathscr{P}_{n-1}\big)_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \qquad (29)$$

Из (28) и (29) следует, что линейный оператор $\Lambda_{n-1,r-1,\rho}$ есть наилучший линейный метод приближения для класса $W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)$ в пространстве $H_{q,\rho}$, $1\le q\le\infty$, $0<\rho\le 1$.

Оценим сверху гельфандовский n-поперечник. По определению гельфандовского n-поперечника для произвольного элемента $f \in W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)\cap L^n_*$ в силу (24), (27) и соотношений $c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-1$, имеем

$$d^n\big(W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\big) \le \sup\big\{\|f\|_{H_{q,\rho}} : f \in W^{(r)}_{q,a}(\Phi;\mu)\cap L^n_*\big\} \le \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \qquad (30)$$

Сопоставляя неравенства (22), (29) и (30), убеждаемся в том, что подпространство $L_*^n = \{f : f \in H_{q,\rho},\ f^{(k)}(0) = 0,\ k = 0,1,\ldots,n-1\}$ коразмерности n экстремально для гельфандовского n-поперечника $d^n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}\big)$, чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Результат, полученный в теореме 3, обеспечивает возможность вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора $c_n(f)$ на классах функций $W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)$, а именно имеет место

Теорема 4. *Для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$, $\mu \ge 1$, и $1 \le q \le \infty$ при выполнении условия* (8) *справедливо равенство*

$$\mathscr{L}_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\big) = \sup\big\{|c_n(f)| : f \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\big\} = \frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{31}$$

Доказательство. В самом деле, используя линейный оператор (24), коэффициенты Тейлора $c_n(f)$ произвольной функции $f \in \mathscr{A}(U)$ представим в виде

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho} f(\zeta)\zeta^{-n-1}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi\rho^n}\int\limits_0^{2\pi}[f(\rho e^{it}) - \Lambda_{n-1,r-1,\rho}(f;\rho e^{it})]e^{-int}\,dt.$$

Применяя неравенство Гёльдера и соотношение (23), для произвольной функции $f \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)$ получаем

$$|c_n(f)| \le \frac{1}{\rho^n}\mathscr{E}\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); \Lambda_{n-1,r-1,\rho}; \mathscr{P}_n\big) \le \frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right),$$

откуда вытекает, что

$$\mathscr{L}_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\big) \le \frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{32}$$

Для получения соответствующей оценки снизу рассмотрим введенную при доказательстве теоремы 3 функцию

$$\mathrm{g}_0(z) = \frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right)z^n \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu),$$

для которой согласно определению величины $\mathscr{L}_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\big)$ имеем

$$\mathscr{L}_n\big(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu)\big) \ge |c_n(\mathrm{g}_0)| = \frac{\pi}{4\mu n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \tag{33}$$

Требуемое равенство (31) вытекает из сопоставления оценки сверху (32) и оценки снизу (33), что и завершает доказательство теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
2. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verl., 1985.
3. *Бабенко К. И.* О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 5. С. 631–640.
4. *Тайков Л. В.* О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 4. С. 183–189.
5. *Scheick J. T.* Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. P. 1238–1243.
6. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 155–162.
7. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 285–294.

8. *Двейрин М. З.* О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1975. С. 41–54.
9. *Двейрин М. З., Чебаненко И. В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. Киев: Наук. думка, 1983. С. 62–73.
10. *Айнуллоев Н., Тайков Л. В.* Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 341–351.
11. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Мат. заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 30–39.
12. *Вакарчук С. Б.* О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 186–193.
13. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 5. С. 796–800.
14. *Осипенко К. Ю.* Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди — Соболева // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 2. С. 67–86.
15. *Шабозов М. Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Докл. РАН. 2002. Т. 383, № 2. С. 171–174.
16. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 6. С. 747–749.
17. *Вакарчук С. Б.* Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 665–669.
18. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, № 9. С. 1155–1171.
19. *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 23. С. 3–124. (Итоги науки и техники).
20. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ // Докл. РАН. 2007. Т. 412, № 4. С. 466–469.
21. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 323–329.
22. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 8. С. 3–22.
23. *Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р.* О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Докл. РАН. 2013. Т. 450, № 5. С. 518–521.
24. *Юсупов Г. А.* О наилучших линейных методах приближения функций в пространствах Харди $H_{q,R}$, $0 < R < 1$ // Докл. АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56, № 12. С. 946–952.

Статья поступила 31 марта 2015 г.

Шабозов Мирганд Шабозович
Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан,
ул. Айни, 299/4, Душанбе 734063, Таджикистан
shabozov@mail.ru

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич
Таджикский национальный университет,
пр. Рудаки, 17, Душанбе 734025, Таджикистан
G_7777@mail.ru