Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.546

ЗАМЕЧАНИЕ О КЛАССЕ p–ЛИСТНЫХ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА БЕТА

С. К. Саху, Н. Л. Шарма

Аннотация. Получены точные оценки на коэффициенты для некоторых p-листных звездообразных функций порядка β, $0 \leq \beta < p$. Эта задача была впервые рассмотрена Ауфом в [1]. В данной статье показано, что доказательство Ауфа неверно, и дано правильное доказательство.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.218

Ключевые слова: p-листная аналитическая функция, звездообразная функция, дифференциальное подчинение.

1. Введение

Хорошо известно, что всякая однолистная функция вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

в открытом круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ обладает свойством $|a_2| \leq 2$, причем равенство достигается только для поворотов функции Кебе

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n.$$

Это послужило источником знаменитой гипотезы Бибербаха (см. [2]), впервые предложенной в 1916 г., согласно которой если функция f указанного выше вида однолистна в $\mathbb{D}$, то $|a_n| \leq n$ для всех $n \geq 2$. Эта гипотеза сначала была доказана во многих частных случаях, затем была подтверждена де Бранжем в [3] в 1985 г. Теорию, связанную с гипотезой Бибербаха о числе классов однолистных функций, можно найти в [4, 5]. Однако гипотеза была обобщена на p-листные функции лишь в 1948 г. Первым это сделал Гудмен (см. [6]). Аналогичную задачу для других классов p-валентных функций можно найти, например, в [1, 7, 8]. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые классы p-листных функций в единичном круге и доказываем гипотезу Бибербаха для этих функций.

Для натурального числа p пусть $\mathscr{A}_p$ — класс функций вида

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} z^{n+p}, \tag{1.1}$$

The second author acknowledges the support of National Board for Higher Mathematics, Department of Atomic Energy, India (grant no. 2/39(20)/2010–R&D–II).

которые аналитичны и p-листны в открытом диске.

Пусть функции $g(z)$ и $f(z)$ аналитичны в $\mathbb{D}$. Функция $g(z)$ называется *подчиненной функции* $f(z)$, если существует аналитическая функция $\phi(z)$ в $\mathbb{D}$ со свойствами $\phi(0) = 0$ и $|\phi(z)| < 1\,(z \in \mathbb{D})$ такая, что $g(z) = f(\phi(z))$. Это подчинение обозначаем следующим образом: $g(z) \prec f(z)$ (см. [9]).

Пусть $\mathscr{S}_p(A, B, \beta)$ — класс функций $f(z) \in \mathscr{A}_p$, удовлетворяющих условию

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{p + (pB + (A - B)(p - \beta))z}{1 + Bz}, \quad z \in \mathbb{D},\ 0 \le \beta < p, \tag{1.2}$$

где A и B таковы, что $-1 \le B < A \le 1$. Класс $\mathscr{S}_p(A, B, \beta)$ рассмотрен Ауфом в [1]. В частных случаях $\mathscr{S}_p(1, -1, \beta) = \mathscr{S}_p(\beta)$, $\mathscr{S}_1(\beta) = \mathscr{S}^*(\beta)$, $\mathscr{S}_p(0) = \mathscr{S}_p$ и $\mathscr{S}_1(A, B, 0) = \mathscr{S}^*(A, B)$. Заметим, что $\mathscr{S}_p(\beta)$ — класс p-листных звездообразных функций порядка β — изучался Е. Г. Голузиной в [7]; $\mathscr{S}^*(\beta)$ — класс звездообразных функций порядка β — введен Робертсоном в [10]; $\mathscr{S}_p$ — обычный класс p-листных звездообразных функций, а класс $\mathscr{S}^*(A, B)$ ввел Янковски в [11].

В [1] получены оценки коэффициентов для функций класса $\mathscr{S}_p(A, B, \beta)$. Доказательство, приведенное в работе [1], некорректно. В настоящей работе дано верное доказательство.

2. Основной результат

Следующая лемма получена Гулом и Мероком.

Лемма 2.1 [12, теорема 1]. *Пусть $-1 \le B < A \le 1$ и $f \in \mathscr{S}^*(A, B)$. Тогда*

$$|a_2| \le A - B; \tag{2.1}$$

для $A - 2B \le 1$, $n \ge 3$

$$|a_n| \le \frac{A - B}{n - 1}; \tag{2.2}$$

а для $A - (n - 1)B > (n - 2)$, $n \ge 3$

$$|a_n| \le \frac{1}{(n - 1)!} \prod_{j=2}^{n} (A - (j - 1)B). \tag{2.3}$$

Равенства в (2.1) *и* (2.2) *достигаются для функций*

$$k_{n,A,B}(z) = \begin{cases} z(1 + B\delta z^{n-1})^{(A-B)/(n-1)B}, & \text{если } B \ne 0, \\ z \exp\left(\frac{A\delta z^{n-1}}{n-1}\right), & \text{если } B = 0, \end{cases} \quad |\delta| = 1, \tag{2.4}$$

а равенство в (2.3) *— для функций*

$$k_{A,B}(z) = \begin{cases} z(1 + B\delta z)^{(A-B)/B}, & \text{если } B \ne 0, \\ ze^{Az\delta}, & \text{если } B = 0, \end{cases} \quad |\delta| = 1. \tag{2.5}$$

p-Листный аналог леммы 2.1 ошибочно доказан Ауфом в следующем виде.

Теорема A [1, теорема 3]. *Пусть $-1 \le B < A \le 1$ и $p \in \mathbb{N}$. Если*

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{S}_p(A, B, \beta),$$

то

$$|a_n| \le \prod_{j=0}^{n-p-1} \frac{|(B - A)(p - \beta) + Bj|}{j + 1}$$

для $n \ge p + 1$, причем эти оценки точные для всех допустимых A, B, β и каждого n.

Дадим корректную формулировку теоремы A и ее доказательство.

Теорема 2.2. *Пусть* $-1 \le B < A \le 1$ *и* $p \in \mathbb{N}$. *Если функция* $f(z) \in \mathscr{S}_p(A, B, \beta)$ *записана в виде* (1.1), *то*

$$|a_{p+1}| \le (A - B)(p - \beta); \tag{2.6}$$

для $A(p-\beta) - B(p-\beta-1) \le 1$ (*или* $A(p-\beta) - B(n-\beta-1) \le (n-p-1)$), $n \ge p+2$

$$|a_n| \le \frac{(A-B)(p-\beta)}{n-p}, \tag{2.7}$$

а для $A(p-\beta) - B(n-\beta-1) > (n-p-1)$, $n \ge p+2$

$$|a_n| \le \prod_{j=1}^{n-p} \frac{(A(p-\beta) - B(p-\beta+j-1))}{j}. \tag{2.8}$$

Неравенства (2.6)–(2.8) *точные.*

Доказательство. Пусть $f(z) \in \mathscr{S}_p(A, B, \beta)$. В силу соотношения (1.2) найдется аналитическая функция $\phi : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ со свойством $\phi(0) = 0$ такая, что

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{p + (pB + (A-B)(p-\beta))\phi(z)}{1 + B\phi(z)},$$

т. е.

$$zf'(z) - pf(z) = ((pB + (A-B)(p-\beta))f(z) - Bzf'(z))\phi(z).$$

Подставляя разложение в ряд (1.1) для $f(z)$ и сокращая множитель z^p в обеих частях, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_{p+k}z^k = \left((A-B)(p-\beta) - \sum_{k=1}^{\infty}(B(p+k) + (-pB + (B-A)(p-\beta)))a_{p+k}z^k\right)\phi(z).$$

Переписывая последнее равенство, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_{p+k}z^k = \left((A-B)(p-\beta) + \sum_{k=1}^{\infty}(A(p-\beta) - B(k+p-\beta))a_{p+k}z^k\right)\phi(z).$$

Согласно методу Клуни из [13] (см., например, [14, 15]), заметим, что для $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^2|a_{p+k}|^2 \le (A-B)^2(p-\beta)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(A(p-\beta) - B(k+p-\beta))^2|a_{p+k}|^2.$$

Упрощая это неравенство, получим

$$|a_{p+n}|^2 \le \frac{1}{n^2}\left((A-B)^2(p-\beta)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}((A(p-\beta) - B(k+p-\beta))^2 - k^2)|a_{p+k}|^2\right),$$

или

$$|a_{p+n}|^2 \le \frac{1}{n^2}\Bigg((A-B)^2(p-\beta)^2 + \sum_{k=2}^{n}((A(p-\beta) - B(k+p-\beta-1))^2 - (k-1)^2)|a_{p+k-1}|^2\Bigg).$$

После замены $p+n$ на n это неравенство можно переписать в виде

$$|a_n|^2 \le \frac{1}{(n-p)^2}\Bigg((A-B)^2(p-\beta)^2 + \sum_{k=2}^{n-p}((A(p-\beta)-B(k+p-\beta-1))^2-(k-1)^2)|a_{p+k-1}|^2\Bigg) \quad (2.9)$$

для $n \ge p+1$.

Отметим, что слагаемые в сумме в правой части (2.9) могут быть как положительными, так и отрицательными (именно здесь ошибочно доказательство Ауфа). Таким образом, нельзя прямо применить математическую индукцию в (2.9) для нахождения требуемых оценок для $|a_n|$. Поэтому приходится рассматривать различные случаи. Исследуем этот вопрос, рассмотрев значения $W := (A(p-\beta)-B(k+p-\beta-1))^2-(k-1)^2$ при различных A, B, k, β и p:

k	p	**A**	**B**	$\boldsymbol{\beta}$	**W**
2	1	0.8	0.5	0	−0.96
2	1	−0.5	−0.8	0	0.21
3	2	0.5	0.4	0.5	−3.5775
3	2	−0.1	−0.7	0.5	1.29

Во-первых, для $n=p+1$ легко видеть, что (2.9) сводится к неравенству

$$|a_{p+1}| \le (A-B)(p-\beta),$$

тем самым (2.6) доказано. Во-вторых, $A(p-\beta)-B(p-\beta-1) \le 1$ тогда и только тогда, когда $A(p-\beta)-B(n-\beta-1) \le (n-p-1)$ для $n \ge p+2$. Поскольку слагаемые в сумме в (2.9) неотрицательны, все сводится к оценке

$$|a_n| \le \frac{(A-B)(p-\beta)}{n-p}$$

для $A(p-\beta)-B(p-\beta+1) \le 1$, $n \ge p+2$. Это доказывает (2.7). Равенство в (2.6) и (2.7) достигается для функций

$$k_{n,A,B,\beta,p}(z) = \begin{cases} z^p(1+B\delta z^{n-1})^{(A-B)(p-\beta)/(n-1)B}, & B \ne 0, \\ z^p \exp\left(\frac{A(p-\beta)\delta z^{n-1}}{n-1}\right), & B = 0, \end{cases} \qquad |\delta| = 1.$$

Наконец, докажем (2.8), когда $A(p-\beta)-B(n-\beta-1) > (n-p-1)$, $n \ge p+2$. Все слагаемые в сумме в (2.9) положительны. Докажем неравенство обычной индукцией. Зафиксируем $n \ge p+2$ и предположим, что (2.8) выполнено для $k = 3, 4, \dots, n-p$. Тогда из (2.9) получаем

$$|a_n|^2 \le \frac{1}{(n-p)^2}\Bigg((A-B)^2(p-\beta)^2 + \sum_{k=2}^{n-p}((A(p-\beta)-B(k+p-\beta-1))^2-(k-1)^2) \times \prod_{j=1}^{k-1}\frac{(A(p-\beta)-B(p-\beta+j-1))^2}{j^2}\Bigg). \quad (2.10)$$

Достаточно показать, что квадрат правой части (2.8) равен правой части (2.10), т. е.

$$\prod_{j=1}^{m-p}\frac{(A(p-\beta)-B(p-\beta+j-1))^2}{j^2}=\frac{1}{(m-p)^2}\Bigg((A-B)^2(p-\beta)^2$$
$$+\sum_{k=2}^{m-p}((A(p-\beta)-B(k+p-\beta-1))^2-(k-1)^2)\prod_{j=1}^{k-1}\frac{(A(p-\beta)-B(p-\beta+j-1))^2}{j^2}\Bigg) \tag{2.11}$$

для $A(p-\beta)-B(m-\beta-1)>(m-p-1)$, $m\geq p+2$. Используем индукцию также для доказательства равенства (2.11).

Равенство (2.11) выполнено для $m=p+2$. Предположим, что (2.11) верно для всех m, $p+2<m\leq n-p$. Тогда из (2.10) получаем, что

$$|a_n|^2\leq\frac{1}{(n-p)^2}\Bigg((A-B)^2(p-\beta)^2+\sum_{k=2}^{n-p-1}((A(p-\beta)-B(k+p-\beta-1))^2-(k-1)^2)$$
$$\times\prod_{j=1}^{k-1}\frac{(A(p-\beta)-B(p-\beta+j-1))^2}{j^2}+((A(p-\beta)-B(n-\beta-1))^2$$
$$-(n-p-1)^2)\prod_{j=1}^{n-p-1}\frac{(A(p-\beta)-B(p-\beta+j-1))^2}{j^2}\Bigg).$$

По предположению индукции для $m=n-1$ имеем

$$|a_n|^2\leq\frac{1}{(n-p)^2}\Bigg((n-p-1)^2\prod_{j=1}^{n-p-1}\frac{(A(p-\beta)-B(p-\beta+j-1))^2}{j^2}$$
$$+((A(p-\beta)-B(n-\beta-1))^2-(n-p-1)^2)\prod_{j=1}^{n-p-1}\frac{(A(p-\beta)-B(p-\beta+j-1))^2}{j^2}\Bigg).$$

Значит,

$$|a_n|\leq\prod_{j=1}^{n-p}\frac{(A(p-\beta)-B(p-\beta+j-1))}{j}.$$

Легко доказать, что оценки точны для функции

$$k_{A,B,\beta,p}(z)=\begin{cases} z^p(1+B\delta z)^{(A-B)(p-\beta)/B}, & B\neq 0,\\ z^pe^{A(p-\beta)z\delta}, & B=0,\end{cases}\quad |\delta|=1.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.2. $\square$

Отметим, что, взяв в теореме 2.2 $p=1$ и $\beta=0$, получим лемму 2.1 с функциями $k_{n,A,B}=k_{n,A,B,0,1}$ и $k_{A,B}=k_{A,B,0,1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aouf M. K.* On a class of p-valent starlike functions of order α // Inter. J. Math. & Math. Sci. 1987. V. 10, N 4. P. 733–744.
2. *Bieberbach L.* Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln // S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 1916. V. 138. P. 940–955.

3. *De Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. V. 154. P. 137–152.
4. *Duren P. L.* Univalent functions. New York: Springer-Verl., 1983.
5. *Goodman A. W.* Univalent functions.. Tampa, FA: Mariner, 1983. V. 1, 2.
6. *Goodman A. W.* On some determinants related to p-valent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. V. 63. P. 175–192.
7. *Goluzina E. G.* On the coefficients of a class of functions, regular in a disk and having an integral representation in it // J. Soviet Math. 1974. V. 6, N 2. P. 606–617.
8. *Patil D. A., Thakare N. K.* On convex hulls and extreme points of p-valent starlike and convex classes with applications // Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S.). 1983. V. 27, N 75. P. 145–160.
9. *Miller S. S., Mocanu P. T.* Differential subordinations: Theory and applications. New York; Basel: Marcel Dekker, 2000. (Ser. Monogr. Textb. Pure Applied Math.; V. 225).
10. *Robertson M. S.* On the theory of univalent functions // Ann. Math. 1936. V. 37, N 2. P. 374–408.
11. *Janowski W.* Some extremal problem for certain families of analytic functions // Ann. Polon. Math. 1973. V. 28. P. 297–326.
12. *Goel R. M., Mehrok B. S. On the coefficients of a subclass of starlike functions* // Indian J. Pure Appl. Math. 1981. V. 12, N 5. P. 634–647.
13. *Clunie J.* On meromorphic schlicht functions // J. London Math. Soc. 1959. V. 34. P. 215–216.
14. *Rogosinski W.* On the coefficients of subordinate functions // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48, N 2. P. 48–82.
15. *Robertson M. S.* Quasi-subordination and coefficient conjectures // J. Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. P. 1–9.

Статья поступила 23 июля 2014 г.

Swadesh Kumar Sahoo (Саху Свадеш Кумар),
Navneet Lal Sharma (Шарма Навнит Лал)
Indian Institute of Technology Indore,
Simrol, Khandwa Road, Indore 452020, India
swadesh@iiti.ac.in, sharma.navneet23@gmail.com