*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2016. Том 57, № 2*

*УДК 517.9+514.7*

# МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ–ГРАФИКИ НА 4–МЕРНЫХ 2–СТУПЕНЧАТЫХ СУБЛОРЕНЦЕВЫХ СТРУКТУРАХ

**М. Б. Карманова**

**Аннотация.** Получены описания классов максимальных поверхностей-графиков на четырехмерных двуступенчатых сублоренцевых структурах. В частности, условия максимальности выведены в терминах сублоренцевой средней кривизны.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.210

**Ключевые слова:** сублоренцева структура, максимальная поверхность, сублоренцева средняя кривизна.

Рассматриваются пространственноподобные поверхности-графики на четырехмерной сублоренцевой структуре глубины 2, описанные в [1, 2], и выводятся уравнения максимальных (относительно нескольких видов сублоренцевых мер) поверхностей в классе графиков функций $\varphi$, определенных на группах Гейзенберга. В частности, доказывается, что если поверхность имеет максимальную «боксовую» сублоренцеву меру, то ее сублоренцева средняя кривизна равна нулю (см. теорему 22):

$$H_{SL}(x) = X\Big\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) + Y\Big\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) = 0.$$

Если поверхность имеет максимальную *горизонтальную* сублоренцеву меру, то ее горизонтальная сублоренцева средняя кривизна равна нулю (см. теорему 35):

$$X\Big\langle X\varphi\frac{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}\Big\rangle(x) + Y\Big\langle Y\varphi\frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}\Big\rangle(x) = 0,$$

где $X$, $Y$ — базисные горизонтальные векторные поля на группе Гейзенберга. Отметим также теоремы 18 и 34 о формулах площади, представляющие независимый интерес.

Сублоренцева геометрия является неголономным обобщением геометрии Минковского (см., например, [3]), новым и малоизученным направлением. Статья [4] — одна из первых работ, в которых исследовались подобные структуры. В [5–10] получены описание и свойства достижимых множеств на классах сублоренцевых структур, а также исследованы геодезические [11] и выведены

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

некоторые глобальные свойства структур [12]. Кроме того, сублоренцевы структуры изучались на группах $\mathbb{H}$-типа, в частности, исследовались геодезические и их связь с описанием движения релятивистской частицы в постоянном равномерном электромагнитном поле [13, 14]. Применение сублоренцевых структур к задачам физики описано в [15, 16].

Напомним основные определения и описание структуры.

Пусть $X$, $Y$, $T$, $Z$ — векторные поля на $\mathbb{R}^4$, причем коммутаторы поля $Z$ со всеми остальными нулевые, а для полей $X$, $Y$ и $T$ справедливы следующие соотношения:

$$[X,Y] = c_{XYZ}Z, \quad [X,T] = c_{XTZ}Z, \quad [Y,T] = c_{YTZ}Z, \tag{1}$$

где $c_{XYZ}$, $c_{XTZ}$ и $c_{YTZ}$ — константы.

Введем сублоренцеву норму на $\mathbb{R}^4$ с данным набором полей по аналогии с [3] следующим образом.

Определение 1. Пусть $p \in \mathbb{R}^4$ и $V(p) = xX(p) + yY(p) + tT(p) + zZ(p)$. Положим

$$\big(\mathbf{d}_\infty^{SL}(V)\big)^2 = \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2.$$

Тогда *сублоренцева норма* вектора $V = V(p)$ равна

$$\mathbf{d}_\infty^{SL}(V) = \begin{cases} \sqrt{\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 > 0,\\ 0, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 = 0,\\ i\sqrt{|\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2|}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 < 0.\end{cases}$$

Определение 2 (см. [3]). Если норма вектора положительна, то он называется *пространственноподобным*, если нулевая, то — *светоподобным*, а если мнимая, то — *времениподобным*.

Определение 3 (см. [3]). Поверхность называется *пространственноподобной*, если ее касательные векторы только пространственноподобные. Если в каждой точке поверхности среди ее касательных векторов есть времениподобные, то поверхность называется *времениподобной*.

В силу результатов из [17] константы из соотношения (1) определяют групповую структуру и, следовательно, групповую операцию на $\mathbb{R}^4$ с данным набором полей такую, что поля $X$, $Y$, $Z$, $T$ левоинвариантны относительно нее.

Определение 4 [1]. Пусть $v = \exp(xX + yY + tT + zZ)(w)$. Положим *сублоренцево расстояние* $d_\infty^{SL}$ равным

$$d_\infty^{SL}(v,w) = \begin{cases} \sqrt{\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 > 0,\\ 0, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 = 0,\\ i\sqrt{|\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2|}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 < 0.\end{cases}$$

Определение 5 [1]. *Шар* относительно $d_\infty^{SL}$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $v$ — это множество

$$\operatorname{Box}^{SL}(v,r) = \big\{w \in {}^s\mathbb{L} : \big(d_\infty^{SL}(w,v)\big)^2 < r^2\big\}.$$

Определение 6. Полученную структуру ($\mathbb{R}^4$ с набором полей $\{X, Y, Z, T\}$, нормой $\mathbf{d}_\infty^{SL}$, расстоянием $d_\infty^{SL}$ и групповой операцией) обозначим символом ${}^s\mathbb{L}$.

Далее в статье будем рассматривать следующие отображения. Пусть $\mathbb{H}$ — интегральное многообразие подрасслоения $\operatorname{span}\{X,Y,Z\}$, проходящее через $\mathbf{0}=(0,0,0,0)$. Из (1) вытекает, что это — группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$. Рассмотрим функцию $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$, где $\Omega\subset\mathbb{H}^1$ — область в $\mathbb{H}^1$, являющуюся липшицевой относительно квазиметрики $d_\infty$ на группе Гейзенберга $\mathbb{H}=\mathbb{H}^1$. Напомним, что для $w=\exp(xX+yY+zZ)(v)$ имеем $d_\infty(w,v)=\max\{|x|,|y|,|z|^{1/2}\}$. Известно [18, 19], что липшицевы функции $hc$-дифференцируемы почти всюду на области определения: для почти всех $v$ существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_v$ такой, что

$$|\varphi(w)-\mathscr{L}_v\langle w\rangle|=o(d_\infty(v,w)),$$

где $o(1)\to 0$ при $w\to v$. Далее в статье $hc$-дифференциал (или горизонтальный градиент) $\mathscr{L}_v$ отображения $\varphi$ в точке $v$ обозначен символом $\widehat{D}\varphi(v)$.

Определим действие отображения-графика $\varphi_\Gamma$ на $v\in\mathbb{H}$ как

$$v\mapsto\exp(\varphi(v)T)(v).$$

Опишем «дифференциальные» свойства графика $\varphi_\Gamma$. Сначала напомним

Определение 7 [20, 21]. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — однородная группа Ли, $E\subset\mathbb{G}$, $\psi:E\to\widetilde{\mathbb{G}}$, а функция $\mathfrak{d}:\psi(E)\times\widetilde{\mathbb{G}}\to\mathbb{R}_+$ является квазиметрикой. Отображение $\psi$ *полиномиально $hc$-дифференцируемо* в точке $x\in E$ относительно $\mathfrak{d}$, если существует отображение $\mathscr{L}_x:\mathbb{G}\to\widetilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\mathfrak{d}(\psi(w),\mathscr{L}_x\langle w\rangle)=o(d_\infty(x,w))$, $E\ni w\to x$;

2) $\mathscr{L}_x(w)=\theta_{\psi(x)}\circ L_x\circ\theta_x^{-1}(w)$; $L_x$ — оператор с полиномиальными по $\{w_j\}_{j=1}^N$ коэффициентами, где $w=\exp\left(\sum\limits_{j=1}^N w_jX_j\right)(x)$, $N$ — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Отображение $\mathscr{L}_x$ называется *полиномиальным $hc$-дифференциалом* отображения $\psi$ в точке $x$ и обозначается символом $\widehat{D}_P\psi(x)$.

Здесь $\theta_v$ — экспоненциальное отображение относительно точки $v$, действующее из окрестности нуля евклидова пространства в окрестность точки $v$ однородной группы Ли:

$$(w_1,\dots,w_N)\mapsto\exp\left(\sum_{j=1}^N w_iX_i\right)(v).$$

**Теорема 8** [20, 21] (см. также [1]). *Отображение-график $\varphi_\Gamma$ липшицева в субримановом смысле отображения $\varphi$ полиномиально $hc$-дифференцируемо почти всюду, а именно в точках $hc$-дифференцируемости $\varphi$. В качестве $\mathfrak{d}$ используется квазиметрика $d_\infty$.*

Определение 9 [1]. Фиксируем $u\in\mathbb{H}$. Заданные в окрестности точки $\varphi_\Gamma(u)$ поля $\widetilde{X}^u=X+2\varphi(u)F_{13}^4Z$ и $\widetilde{Y}^u=Y+2\varphi(u)F_{23}^4Z$ образуют вместе с полями $T$ и $Z$ *адаптированное касательное расслоение на ${}^s\mathbb{L}$ в точке $u$.*

Замечание 10. Полиномиальный $hc$-дифференциал $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(u)$ отображения-графика $\varphi_\Gamma$ в точке $u$, переводящий точку $\exp(v_1X+v_2Y+v_4Z)(u)$ в точку $\exp(\tilde v_1\widetilde{X}^u+\tilde v_2\widetilde{Y}^u+\tilde v_3T+\tilde v_4Z)(\varphi(u))$, в базисе $\{\widetilde{X}^u,\widetilde{Y}^u,T,Z\}$ имеет вид

$$\tilde v_1=v_1,\quad \tilde v_2=v_2,\quad \tilde v_3=\widehat{D}\varphi(v)\langle v_1,v_2\rangle,\quad \tilde v_4=v_4+\widehat{D}\varphi(v)\langle v_1,v_2\rangle\big(F_{13}^4v_1+F_{23}^4v_2\big).$$

В этом случае в качестве $\mathfrak{d}$ используется функция

$$\tilde{d}^u_\infty(q,p) = \max\{|q_1|, |q_2|, |q_3|, |q_4|^{1/2}\} \;\; \text{для } q = \exp(q_1\widetilde{X}^u + q_2\widetilde{Y}^u + q_3T + q_4Z)(p).$$

Расширим понятие пространственноподобной поверхности для случая поверхностей-образов недифференцируемых в классическом смысле отображений, лежащих в ${}^s\mathbb{L}$.

Определение 11 (см. [3]). Пусть $v \in {}^s\mathbb{L}$. Множество $\{\exp(xX + yY + tT + zZ)(v) : \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 = 0\}$ называется *световым конусом* в точке $v$.

Определение 12 [1]. Поверхность $S \subset {}^s\mathbb{L}$ называется *пространственноподобной*, если для любой ее точки $v \in S$ существует $r_0 > 0$ такое, что пересечение пересечение $S_v \cap B(v,r)$, где $S_v$ — полиномиальное приближение $S$ в точке $v$, за исключением точки $v$ лежит строго вне светового конуса с центром в $v$ для любого $r \le r_0$ (т. е. лежит в множестве $\{\exp(xX + yY + tT + zZ)(v) : \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 > 0\}$). Здесь $B$ — шар в (суб)римановой (квази)метрике.

В [1] доказано, что если длина горизонтального градиента $\widehat{D}\varphi$ всюду не превосходит $1-c$, где $c > 0$, то поверхность-график $\varphi_\Gamma(\Omega)$, где $\Omega$ — область в $\mathbb{H}$, пространственноподобна (относительно адаптированного базиса). Это свойство играет ключевую роль в выводе аппроксимативных свойств поверхностей-графиков на сублоренцевых структурах и доказательстве формул площади для сублоренцевых мер.

Прежде чем изучать случай основной горизонтальной сублоренцевой ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меры, изучим характер следующей вспомогательной «боксовой» сублоренцевой меры, являющейся адаптацией лоренцева случая на субримановы структуры.

Определение 13 [19]. Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{H}$, а $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Отображение $\varphi$ *принадлежит классу* $C^1_H$, если горизонтальные производные $X\varphi$ и $Y\varphi$ существуют всюду на $\Omega$ и непрерывны.

Известно [19], что отображения класса $C^1_H$ непрерывно $hc$-дифференцируемы всюду.

**Следствие 14.** *Если $\varphi$ принадлежит классу $C^1_H$, то отображение-график $\varphi_\Gamma$ непрерывно полиномиально $hc$-дифференцируемо всюду.*

Определение 15 [2]. Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{H}$, а $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ — отображение класса $C^1_H$ такое, что $1-(X\varphi(y))^2-(Y\varphi(y))^2 \ge s > 0$ для всех $y \in \Omega$. Определим *функцию множеств для* $S \subset \varphi_\Gamma(\Omega)$ следующим образом:

$$\big({}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}\big)_\delta(S) = 8\inf\Bigg\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{1-(X\varphi(y_j))^2-(Y\varphi(y_j))^2}}{\sqrt{1+(X\varphi(y_j))^2+(Y\varphi(y_j))^2}} r_j^4 : \\ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}(x_j, r_j) \supset S,\ x_j = \varphi_\Gamma(y_j),\ x_j \in S,\ r_j < \delta,\ j \in \mathbb{N}\Bigg\}.$$

Положим ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}(S) = \lim\limits_{\delta\to 0} \big({}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}\big)_\delta(S)$.

Замечание 16 [2]. Мы рассматриваем каждое слагаемое $r_j^4$ с множителем $\frac{\sqrt{1-(X\varphi(y_j))^2-(Y\varphi(y_j))^2}}{\sqrt{1+(X\varphi(y_j))^2+(Y\varphi(y_j))^2}}$, чтобы учесть сублоренцеву структуру меры в субримановых шарах.

Для корректного задания меры ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$ не требуется сужать область определения (в отличие от случаев, когда множество покрывается сублоренцевыми шарами, см. [1]), достаточно потребовать выполнение условия $1-(X\varphi(y))^2-(Y\varphi(y))^2\geq s>0$ для всех $y\in\Omega$.

Далее будем рассматривать такие отображения $\varphi$, длина горизонтального градиента $\widehat{D}\varphi$ которых строго отделена от единицы:

$$|\widehat{D}\varphi(v)\langle\exp(w_1X+w_2Y+w_4Z)(v)\rangle|=|w_1X\varphi+w_2Y\varphi|\leq(1-c)\max\{|w_1|,|w_2|\},\quad c>0.\quad(2)$$

Заметим, что это условие обеспечивает корректное определение меры ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$ (достаточно рассмотреть $w_1=w_2$ и $w_1=-w_2$).

**Свойство 17** [2]. *Функция $\Phi:\Omega\supset A\mapsto{}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}(\varphi_\Gamma(A))$ обладает следующими свойствами:*

1) *абсолютно непрерывна относительно меры $\mathscr{H}^3$ на $\mathbb{H}$,*

2) *аддитивна на отдаленных шарах.*

С помощью определения 15 и рассуждений из [21] (ср. [1]) нетрудно получить следующий результат (см. также обзор в [2]).

**Теорема 18** [2]. *Пусть $\mathbb{H}=\mathbb{H}^1$ — группа Гейзенберга, $\varphi:\mathbb{H}\to\mathbb{R}$ — отображение класса $C^1_H$, причем*

$$|\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1,w_2\rangle|\leq(1-c)\max\{|w_1|,|w_2|\},\quad \mathrm{Lip}_{SR}(\varphi)\leq 1-c,\quad c>0.$$

*Сублоренцева (боксовая) ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-мера образа открытого множества $\varphi_\Gamma(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{H}$, вычисляется по формуле*

$$\int\limits_\Omega\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi(v)|^2}\,d\mathscr{H}^4(v)=\int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)}d\,{}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}(y).\quad(3)$$

Опишем поверхности-графики в ${}^s\mathbb{L}$, имеющие максимальную ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меру. Прежде всего напомним основные определения.

Определение 19 (см. [21]). Пусть $\varphi,\psi\in C^1_H(\mathscr{U},\mathbb{R})$, $\mathscr{U}\subset\mathbb{H}$. *Вариацией* $\varphi$ называется функция $\varphi_{\varepsilon,\psi}=\varphi+\varepsilon\psi$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало.

Отметим, что $\varphi_{\varepsilon,\psi}$ принадлежит классу $C^1_H(\mathscr{U},\mathbb{R})$ и $\widehat{D}\varphi_{\varepsilon,\psi}(x)=\widehat{D}\varphi(x)+\varepsilon\widehat{D}\psi(x)$ всюду.

Для функции $\psi\in C^1_H(\mathbb{H},\mathbb{R})$ введем величину (см. [21])

$$\|\psi\|_m=\Bigg(\int\limits_\Omega(d_\infty(\mathbf{0},\psi(x))^m+|\widehat{D}\psi(x)|^m)\,d\mathscr{H}^4(x)\Bigg)^{\frac{1}{m}},\quad m\in\mathbb{N}.$$

Определение 20 (см. [21]). Область $\Omega\subset\mathbb{H}$ называется *горизонтально достижимой*, если любую ее внутреннюю точку можно соединить с граничной точкой кривой, составленной из конечного числа интегральных линий горизонтальных векторных полей.

Если область $\Omega$ горизонтально достижима, то для произвольной функции $\psi\in C^1_H(\Omega,\mathbb{R})$ введем величину

$$\|\psi\|_{H,m}=\Bigg(\int\limits_\Omega|\widehat{D}\psi(x)|^m\,d\mathscr{H}^4(x)\Bigg)^{\frac{1}{m}},\quad m\in\mathbb{N}.$$

**Свойство 21** (см. [21]). *Величина $\|\cdot\|_m$ является нормой, кроме того, нормой является и $\|\cdot\|_{H,m}$, если $\Omega$ горизонтально достижима. Неотрицательность, симметричность и неравенство треугольника следуют непосредственно из определения. Также из определения следует, что если $\|\psi\|_m = 0$, то $\psi = 0$ почти всюду.*

*Аналогичное утверждение справедливо и для $\|\cdot\|_{H,m}$ в силу свойств области $\Omega$.*

Далее рассмотрим область с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{H}$. Пусть $\varphi \in C^1_H(\mathscr{U}, \mathbb{R})$, $\mathscr{U} \supset \Omega$, и $\gamma = \varphi_\Gamma(\partial\Omega)$.

**Теорема 22.** (I) *Для того чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ имела максимальную ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(\Omega)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial\Omega} = \gamma$, где $\chi = \varphi + \varepsilon\psi$, $\psi \in C^1_H(\mathscr{V}, \mathbb{R})$, $\mathscr{V} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{V} \supset \Omega$, причем*

$$|\widehat{D}\chi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\} \text{ для всех } v, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\chi) \leq 1-c, \quad c > 0,$$

*необходимо, чтобы*

$$\int\limits_\Omega \frac{\langle \widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\psi(x)\rangle}{\sqrt{1 - |\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\, d\mathscr{H}^4(x) = 0 \tag{4}$$

*для любого отображения $\psi \in C^1_H(\mathscr{T}, \mathbb{R})$, $\mathscr{T} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{T} \supset \Omega$, такого, что $\psi|_{\partial\Omega} = 0$.*

(II) *Пусть $\max\{|X\varphi|, |Y\varphi|\} \leq \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}}$, $c > 0$, всюду на $\mathscr{V}$. Если существует константа $K > 0$ такая, что*

$$\int\limits_\Omega |\widehat{D}\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x) \geq K\|\psi\|_4^2, \tag{5}$$

*и выполнено соотношение (4), то на отображении $\varphi$ функционал площади достигает максимального в классе отображений вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где для $\psi$ справедливо (5), значения в его окрестности.*

(III) *Пусть $\Omega$ — область с гладкой границей, а отображение $\varphi$ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. Тогда для того чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ имела максимальную ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(\Omega)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial\Omega} = \gamma$, где $\chi = \varphi + \varepsilon\psi$, $\psi \in C^1_H(\mathscr{V}, \mathbb{R})$, $\mathscr{V} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{V} \supset \Omega$, и всюду верно*

$$|\widehat{D}\chi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\chi) \leq 1-c, \quad c > 0,$$

*необходимо, чтобы почти всюду выполнялось соотношение*

$$X\left\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1 - |\widehat{D}\varphi|^2}} \right\rangle(x) + Y\left\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1 - |\widehat{D}\varphi|^2}} \right\rangle(x) = 0. \tag{6}$$

(IV) *Пусть область $\Omega$ горизонтально достижима и $\max\{|X\varphi|, |Y\varphi|\} \leq \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}}$, $c > 0$, всюду. Тогда необходимое условие экстремума (4) достаточно для отображений вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где $\|\psi\|_{H,2} \geq L\|\psi\|_{H,4}$, $L > 0$. В частности, в условиях п. (III) условие (6) достаточно.*

Доказательство. Схема доказательства аналогична приведенной в [21].

(I) Для вывода необходимого условия достаточно рассмотреть вариацию $\varphi_{\varepsilon,\psi}$ и ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меру соответствующей поверхности как функцию параметра $\varepsilon$. Разлагая в ряд Тейлора функцию $f(\varepsilon) = \sqrt{1 - (x_1 + \varepsilon z_1)^2 - (x_2 + \varepsilon z_2)^2}$ вблизи точки 0, непосредственно можно проверить, что функционал площади дифференцируем для любого $\varphi$ относительно норм $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_{H,2}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&|f(\varepsilon)-f(0)-f'(0)\varepsilon| \le \frac{\varepsilon^2}{2}|f''(\tilde\varepsilon)|\\
&\le \frac{\varepsilon^2}{2}\left|\frac{-\big(z_1^2+z_2^2\big)(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2)-\big(x_1z_1+\tilde\varepsilon z_1^2+x_2z_2+\tilde\varepsilon z_2^2\big)^2}{(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\varepsilon z_2)^2)^{\frac32}}\right|\\
&\quad\le \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\big|z_1^2+z_2^2\big||1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2|+\big|x_1z_1+\tilde\varepsilon z_1^2+x_2z_2+\tilde\varepsilon z_2^2\big|^2}{(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2)^{\frac32}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\le \varepsilon^2\big|z_1^2+z_2^2\big|\cdot K,
\end{aligned}
$$

где $\tilde\varepsilon\in(0,\varepsilon)$, так как знаменатель строго отделен от нуля. Кроме того, поскольку мера множества $\Omega$ конечна, в силу неравенства Гёльдера функционал площади дифференцируем и относительно норм $\|\cdot\|_3$, $\|\cdot\|_4$ (а также $\|\cdot\|_{H,3}$, $\|\cdot\|_{H,4}$). Поэтому равенство нулю первой вариации, или соотношение (4), является необходимым условием экстремума функционала площади.

(II) Это утверждение — переформулировка следующего условия сильной положительности второй вариации функционала площади: *если у дважды дифференцируемого функционала $F$, определенного на нормированном пространстве, первая вариация в точке $\zeta^*$ равна нулю, а вторая вариация в этой точке сильно положительна, т. е. существует $K>0$ такое, что $|\delta^2F(\zeta^*,\delta\zeta)|\ge K\|\delta\zeta\|^2$, то в точке $\zeta^*$ функционал $F$ имеет минимум.* Непосредственно с помощью разложения в ряд Тейлора функции $f(\varepsilon)=\sqrt{1+\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j+\varepsilon z_j)^2}$ вблизи точки 0 проверяется, что функционал площади дважды дифференцируем для любого $\varphi$ относительно нормы $\|\cdot\|_4$ (и $\|\cdot\|_{H,4}$). Действительно,

$$
\begin{aligned}
&\left|f(\varepsilon)-f(0)-f'(0)\varepsilon-\frac{f''(0)}{2}\varepsilon^2\right| \le \frac{\varepsilon^3}{6}|f'''(\tilde\varepsilon)|\\
&=\frac{\varepsilon^3}{6}\big(-\big(z_1^2+z_2^2\big)(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2)-\big(x_1z_1+\tilde\varepsilon z_1^2+x_2z_2+\tilde\varepsilon z_2^2\big)^2\big)\\
&\qquad\times 3\big(x_1z_1+\tilde\varepsilon z_1^2+x_2z_2+\tilde\varepsilon z_2^2\big)(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2)^{-\frac52}\\
&\qquad\qquad\qquad\le \varepsilon^4K_1\big|z_1^2+z_2^2\big|^2+\varepsilon^3K_2(|z_1|+|z_2|)\big|z_1^2+z_2^2\big|, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

где $\tilde\varepsilon\in(0,\varepsilon)$. Вторая вариация равна

$$
\delta^2S(\varphi,\varepsilon\psi)=\int\limits_{\Omega}\frac{-|\widehat D\varepsilon\psi(x)|^2+\varepsilon^2(X_1\varphi(x)X_2\psi(x)-X_1\psi(x)X_2\varphi(x))^2}{(1-|\widehat D\varphi(x)|^2)^{\frac32}}\,d\mathscr H^4(x),
$$

где

$$
S=S(\varphi)=\int\limits_{\Omega}\sqrt{1-|\widehat D\varphi(v)|^2}\,d\mathscr H^4(v)
$$

— функционал площади поверхности. В силу предположения на длину горизонтального градиента имеем $\max\{|X\varphi|,|Y\varphi|\}\le\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt2}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&(X\varphi(x)Y\psi(x)-X\psi(x)Y\varphi(x))^2\le 2((X\varphi(x)Y\psi(x))^2+(X\psi(x)Y\varphi(x))^2)\\
&\qquad\qquad\qquad\times(1-c)((Y\psi(x))^2+(X\psi(x))^2)=(1-c)|\widehat D\psi(x)|^2.
\end{aligned}
$$

Следовательно, величина $\delta^2 S(\varphi, \varepsilon\psi)$ отрицательна, и

$$\delta^2 S(\varphi, \varepsilon\psi) \le \int\limits_{\Omega} \frac{-c|\widehat{D}\varepsilon\psi(x)|^2}{(1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathscr{H}^4(x).$$

Функционал площади $S$ имеет максимум тогда и только тогда, когда $-S$ имеет минимум. Тогда условие сильной положительности второй вариации функционала $-S$ переписывается как

$$\delta^2(-S(\varphi, \varepsilon\psi)) = -\delta^2 S(\varphi, \varepsilon\psi) \ge \int\limits_{\Omega} \frac{c|\widehat{D}\varepsilon\psi(x)|^2}{(1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathscr{H}^4(x) \ge L\|\varepsilon\psi\|_4^2,$$

или

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\widehat{D}\varepsilon\psi(x)|^2}{(1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathscr{H}^4(x) \ge K\|\varepsilon\psi\|_4^2.$$

Отметим, что здесь рассматриваются норма $\|\cdot\|_4$ (и $\|\cdot\|_{H,4}$) ввиду наличия слагаемого $\varepsilon^4 K_1 \big|z_1^2 + z_2^2\big|^2$ в соотношении для дифференцируемости (7). Для слагаемого $\varepsilon^3 K_2(|z_1| + |z_2|)\big|z_1^2 + z_2^2\big|$ остается применить неравенство Гёльдера.

Кроме того, для сильной положительности второй вариации функционала $-S$ достаточно условия

$$\int\limits_{\Omega} |\widehat{D}\varepsilon\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x) \ge K\|\varepsilon\psi\|_4^2.$$

(III) Учитывая, что $\psi|_{\partial\Omega} = 0$, получаем из результатов п. (I), что

$$0 = \int\limits_{\Omega} \frac{\langle \widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\psi(x)\rangle}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\, d\mathscr{H}^4(x) = \int\limits_{\Omega} \psi(x)\cdot X\Big\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x)\, d\mathscr{H}^\nu(x) + \int\limits_{\Omega} \psi(x)\cdot Y\Big\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x)\, d\mathscr{H}^\nu(x).$$

Отсюда следует, что, в частности, это справедливо и для всех гладких функций $\psi$, поэтому

$$X\Big\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) + Y\Big\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) = 0$$

почти всюду.

(IV) Для отображений, изучаемых в п. (IV), достаточно рассматривать норму $\|\cdot\|_H$. Очевидно, что

$$\int\limits_{\Omega} |\widehat{D}\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x) = \Bigg(\sqrt{\int\limits_{\Omega} |\widehat{D}\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x)}\Bigg)^2 = \|\psi\|_{H,2}^2 \ge L^2\|\psi\|_{H,4}^2.$$

Поэтому условие (4), а, в предположениях п. (III), условие (6), является достаточным. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что полученное условие

$$X\Big\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) + Y\Big\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) = 0$$

аналогично и выведенному в [3] для геометрии Минковского, и установленному в [20, 21] для графиков минимальной площади, а также выражению, полученному в [22] и прочих работах для других классов минимальных поверхностей. Поэтому доказанная теорема позволяет ввести

Определение 23. Пусть $\Omega$ — область с гладкой границей, а отображение $\varphi$ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. *Сублоренцевой средней кривизной* поверхности-графика $\varphi_\Gamma(\Omega)$ в точке $x$ называется

$$H_{SL}(\varphi,x)=X\left\langle\frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\right\rangle(x)+Y\left\langle\frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\right\rangle(x).$$

Из результатов работы выводим

**Предложение 24.** *Пусть $\Omega$ — горизонтально достижимая область с гладкой границей, а отображение $\varphi$ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции и, кроме того, $\max\{|X\varphi|,|Y\varphi|\}\le\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}}$, $c>0$, всюду. Тогда максимальные (в классе поверхностей, определяемых отображениями вида $\varphi+\varepsilon\psi$, где для $\psi$ выполнено условие $\|\psi\|_{H,2}\ge L\|\psi\|_{H,4}$, $L>0$) поверхности — это поверхности нулевой сублоренцевой средней кривизны почти всюду.*

Пример 25. Рассмотрим группу Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ с полями $X$, $Y$, $Z$ (без ограничения общности будем считать, что $\mathbb{H}^1$ как множество точек совпадает с $\mathbb{R}^3$, а единица группы — с точкой $(0,0,0)$) и достроим к ее структуре (в $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$) еще одно горизонтальное векторное поле $T$, линейно независимое с $X$, $Y$, $Z$ (например, как в [21]). Полученную группу обозначим символом $\widetilde{\mathbb{H}}^1$.

Пусть $\ell$ — интегральная линия поля $T$, начинающаяся в единице группы. Построим отображение $\varphi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{H}}^1$, где $\Omega\subset\mathbb{H}^1$ таково, что выполняется $|y|<1$ для любой точки $(x,y,z)\in\Omega$, со значениями на $\ell$ следующим образом:

$$\varphi(x,y,z)=\exp\left(\left(z-\frac{xy}{2}\right)T\right)(\mathbf{0})$$

(здесь $(x,y,t)$ — декартовы координаты точки). Предположим, что на группе Гейзенберга поля имеют вид

$$X=\partial_x-\frac{y}{8}\partial_z,\quad Y=\partial_y+\frac{x}{2}\partial_z,\quad Z=\partial_z.$$

Тогда $X\varphi=-\frac{5}{8}y$, $Y\varphi=0$ и $1-|\widehat{D}\varphi|^2=1-\frac{25}{64}y^2$. Заметим, что на $\Omega$ выполняется $|X\varphi|^2\le\frac{1-7/32}{2}$. Отсюда следует, что сублоренцева средняя кривизна $H_{SL}$ графика

$$\varphi_\Gamma(x,y,z)=\exp\left(\left(z-\frac{xy}{2}\right)T\right)(x,y,z)$$

равна нулю для всех точек $\mathbb{H}^1$:

$$H_{SL}(\varphi,v)=X\left\langle\frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\right\rangle(v)+Y\left\langle\frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\right\rangle(v)$$
$$=\left(\partial_x-\frac{y}{2}\partial_z\right)\left\langle\frac{-y}{\sqrt{1-\frac{25}{64}y^2}}\right\rangle=0$$

при всех $v = (x, y, z) \in \mathbb{H}^1$. Кроме того, так как $|X\varphi| \le \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}}$, $c > 0$, для отображений вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где $\|\psi\|_{H,2} \ge L\|\psi\|_{H,4}$, полученное условие на сублоренцеву среднюю кривизну является достаточным условием максимальности ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меры на поверхности $\varphi_\Gamma(\Omega)$.

Перейдем к основному результату статьи — формуле для вычисления горизонтальной сублоренцевой меры ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$. Введем необходимые определения.

Определение 26 (см. [1]). Пусть $v, w \in {}^s\mathbb{L}$ таковы, что $w = \exp(x\widetilde{X}^v + y\widetilde{Y}^v + tT + zZ)(\varphi_\Gamma(v))$. Положим

$$\tilde{d}^{SLH}_\infty(\varphi_\Gamma(v), w) = \begin{cases} \max\{\sqrt{\max\{x^2,y^2\} - t^2}, \sqrt{|z|}\}, & \max\{x^2,y^2\} - t^2 \ge 0 \text{ или } |z| \ne 0, \\ i\sqrt{|\max\{x^2,y^2\} - t^2|}, & \max\{x^2,y^2\} - t^2 < 0 \text{ и } |z| = 0. \end{cases}$$

*Шар* в $\tilde{d}^{SLH}_\infty$ — это множество

$$\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r) = \bigl\{w \in {}^s\mathbb{L} : \bigl(\tilde{d}^{SLH}_\infty\bigr)^2(\varphi_\Gamma(v), w) < r^2\bigr\},$$

где $\bigl(\tilde{d}^{SLH}_\infty\bigr)^2 = \max\{\max\{x^2,y^2\} - t^2, |z|\}$.

**Предложение 27.** *Если горизонтальный градиент $\varphi$ не превосходит $1-c$ для некоторого $c > 0$, то существует $0 < L < \infty$ такое, что локально справедливо неравенство*

$$\frac{1}{L} d_\infty(v,w) \le \tilde{d}^{SLH}_\infty(\varphi_\Gamma(v), \varphi_\Gamma(w)) \le L d_\infty(v,w).$$

Замечание 28. Прообраз шара $\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)$ при отображении

$$(x,y,t,z) \mapsto \exp(x\widetilde{X}^v + y\widetilde{Y}^v + tT + zZ)(\varphi_\Gamma(v))$$

равен декартову произведению множества $\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : |\max\{x^2,y^2\} - t^2| < r^2\}$ и интервала $(-r^2, r^2)$.

Определение 29 [1]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{H}$ — открытое множество и $\varphi \in C^1_H(\Omega, \mathbb{R})$. Пусть $\mathrm{Lip}(\varphi) \le 1 - c$, $c > 0$. Фиксируем $\delta_0 > 0$ и рассмотрим точку $p \in \Omega$ и ее окрестность $\mathscr{U} \subset \Omega$, на которой величина $o(1)$ из определения $hc$-дифференцируемости не превосходит такого $\varepsilon > 0$, что $\partial\,\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r) \cap \varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ лежит в $\sigma r$-окрестности множества $\partial\,\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r) \cap \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$ для некоторого малого $\sigma > 0$ и всех $v \in \mathscr{U}$ и $r < \delta_0$. Пусть $S \subset \varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ и $\delta \in (0, \delta_0)$. Положим

$$\bigl({}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma\bigr)_\delta(S) = 8\inf\Bigl\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 : \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(x_j, r_j) \supset S,\ x_j \in S,\ r_j < \delta,\ j \in \mathbb{N}\Bigr\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества $S$ и ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma(S) = \lim\limits_{\delta\to 0} \bigl({}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma\bigr)_\delta(S)$.

Определение 30 [1]. Для каждой точки $x \in \varphi_\Gamma(\Omega)$ рассмотрим окрестность $\mathscr{U}\bigl(\varphi_\Gamma^{-1}(x)\bigr) \subset \Omega$, на которой для величины $o(1)$ из определения $hc$-дифференцируемости выполнены условия определения 29. Рассмотрим такое $\delta > 0$, чтобы любой шар в $\mathbb{H}$ радиуса $r < L\delta$ полностью лежал хотя бы в одной такой окрестности, где $L$ — константа из неравенства

$$\frac{1}{L} d_\infty(v,w) \le \tilde{d}^{SLH}_\infty(\varphi_\Gamma(v), \varphi_\Gamma(w)) \le L d_\infty(v,w).$$

Так как можно без ограничения общности рассматривать компактные подмножества $\Omega$, величина $\delta$ строго отделена от нуля. Определим функцию множества на $\varphi_\Gamma(\Omega)$ следующим образом:

$$\big({}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma\big)_\delta(S)=8\inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}r_j^4:\\ \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(x_j,r_j)\cap\varphi_\Gamma\big(\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)\big)\supset S,\ x_j\in S,\ r_j<\delta,\ j\in\mathbb{N}\Big\},$$

где в силу выбора $\delta>0$ окрестность $\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)$ содержит $\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(x_j,r_j)\big)$. Далее определение ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$ на $\varphi_\Gamma(\Omega)$ повторяет определение 29.

Заметим, что в силу свойств выбираемых окрестностей $\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)$, $j\in\mathbb{N}$, а именно аппроксимируемости образа отображения-графика образом его полиномиального дифференциала, определение ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меры на $\varphi_\Gamma(\Omega)$ не зависит от способа выбора окрестностей.

**Свойство 31** [2]. *Мера* ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$ *на* $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$, *где* $\mathscr{U}$ *— достаточно малая окрестность, совпадает с мерой*

$$8\lim_{\delta\to0}\inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2(y_j)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(y_j)}}{\sqrt{1+(X\varphi(y_j))^2+(Y\varphi(y_j))^2}}r_j^4:\\ \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathrm{Box}(x_j,r_j)\supset S,\ x_j=\varphi_\Gamma(y_j),\ x_j\in S,\ r_j<\delta,\ j\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Действительно, достаточно рассмотреть производные обеих мер по $\mathscr{H}^3$ в произвольной точке $v\in\mathscr{U}$ на образе полиномиального $hc$-дифференциала $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$, а затем применить рассуждения для получения выражения из [1], где показано асимптотическое равенство сублоренцевых мер на образе полиномиального $hc$-дифференциала и на $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$.

Определение 32. *Световым конусом* называется множество

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^4 y_jX_j\right)(v):\max\left\{y_1^2,y_2^2\right\}-y_3^2=0\right\}.$$

Подчеркнем, что в этом случае на четвертую координату (как на соответствующую подрасслоению без направлений с отрицательным квадратом длины) нет никаких ограничений.

Определение 33. Поверхность $S$ *пространственноподобна*, если для любой ее точки $v\in S$ существует $r_0>0$ такое, что пересечение $S_v\cap B(v,r)\cap\exp(H_1{}^s\mathbb{L})(v)$, где $S_v$ — полиномиальное приближение $S$ в точке $v$, за исключением точки $v$ лежит строго вне светового конуса с центром в $v$ для любого $r\le r_0$, т. е. является подмножеством

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^3 y_jX_j\right)(v):\max\left\{y_1^2,y_2^2\right\}-y_3^2>0\right\},$$

где

$$\exp(H_1{}^s\mathbb{L})(v)=\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^3 y_jX_j\right)(v):(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3\right\}.$$

Заметим, что в определении 33 также нет ограничений на четвертую координату (как на соответствующую подрасслоению без направлений с отрицательным квадратом длины). Ограничения вводятся только на горизонтальные направления, так как только по одному из них квадрат длины отрицателен.

**Теорема 34** [1]. *Пусть $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ — отображение класса $C^1_H$, причем всюду верно*

$$|\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\varphi) \leq 1-c, \quad c > 0.$$

*Тогда поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{H}$, пространственноподобна в смысле определения 33 (относительно адаптированного базиса) и его горизонтальная сублоренцева ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-мера вычисляется по формуле*

$$\int\limits_{\Omega} \sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}\, d\mathscr{H}^4(v) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\ {}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma(y).$$

Далее рассмотрим область с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{H}$. Пусть $\varphi \in C^1_H(\mathscr{W}, \mathbb{R})$, $\mathscr{W} \supset \Omega$, и $\gamma = \varphi_\Gamma(\partial\Omega)$. Применяя рассуждения, аналогичные представленным в доказательстве теоремы 22, получаем следующий результат.

**Теорема 35.** (I) *Для того чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ имела максимальную ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(\Omega)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial\Omega} = \gamma$, где $\chi = \varphi + \varepsilon\psi$, $\psi \in C^1_H(\mathscr{V}, \mathbb{R})$, $\mathscr{V} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{V} \supset \Omega$, причем всюду выполняется*

$$|\widehat{D}\chi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\chi) \leq 1-c, \quad c > 0,$$

*необходимо, чтобы*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{X\varphi(x)X\psi(x)(1-(Y\varphi)^2(x)) + Y\varphi(x)Y\psi(x)(1-(X\varphi)^2(x))}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(x)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(x)}}\, d\mathscr{H}^4(x) = 0 \tag{8}$$

*для любого отображения $\psi \in C^1_H(\mathscr{T}, \mathbb{R})$, $\mathscr{T} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{T} \supset \Omega$, такого, что $\psi|_{\partial\Omega} = 0$.*

(II) *Если существует константа $K > 0$ такая, что*

$$\int\limits_{\Omega} |\widehat{D}\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x) \geq K\|\psi\|_6^2, \tag{9}$$

*и выполнено соотношение (8), то на отображении $\varphi$ функционал площади $\varphi \mapsto {}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(\Omega))$ достигает максимального в классе отображений вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где для $\psi$ справедливо (9), значения в его окрестности.*

(III) *Пусть $\Omega$ — область с гладкой границей, а отображение $\varphi$ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. Тогда для того, чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ имела максимальную ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(\Omega)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial\Omega} = \gamma$, где $\chi = \varphi + \varepsilon\psi$, $\psi \in C^1_H(\mathscr{V}, \mathbb{R})$, $\mathscr{V} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{V} \supset \Omega$, $\|\chi - \varphi\| \leq \kappa$, $\kappa > 0$, причем всюду*

$$|\widehat{D}\chi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\chi) \leq 1-c, \quad c > 0,$$

*необходимо, чтобы*

$$X\left\langle X\varphi\frac{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}\right\rangle(x) + Y\left\langle Y\varphi\frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}\right\rangle(x) = 0. \tag{10}$$

(IV) *Пусть область $\Omega$ горизонтально достижима. Тогда необходимое условие экстремума* (8) *достаточно для отображений вида $\varphi+\varepsilon\psi$, где $\|\psi\|_{H,2}\geq L\|\psi\|_{H,6}$, $L>0$. В частности, в условиях п.* (III) *условие* (10) *достаточно.*

Подчеркнем, что в п. (II) рассматривается норма $\|\cdot\|_6$ (вместо $\|\cdot\|_4$), так как функционал площади дважды дифференцируем относительно $\|\cdot\|_6$ (что нетрудно проверить с помощью непосредственных вычислений и оценки максимальной степени слагаемых $\varepsilon X\psi$ и $\varepsilon Y\psi$).

По аналогии с определением 23 введем понятие горизонтальной сублоренцевой средней кривизны.

Определение 36. Пусть $\Omega$ — область с гладкой границей, а отображение $\varphi$ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. *Горизонтальной сублоренцевой средней кривизной* поверхности-графика $\varphi_\Gamma(\Omega)$ в точке $x$ называется

$$H_{SLH}(\varphi,x)=X\left\langle X\varphi\frac{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}\right\rangle(x)+Y\left\langle Y\varphi\frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}\right\rangle(x).$$

Отображение, описанное в примере 25, также является примером поверхности нулевой горизонтальной сублоренцевой средней кривизны.

**Предложение 37.** *Пусть $\Omega$ — горизонтально достижимая область с гладкой границей, а отображение $\varphi$ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции, и, кроме того, всюду $|\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1,w_2\rangle|\leq(1-c)\max\{|w_1|,|w_2|\}$, $\mathrm{Lip}_{SR}(\varphi)\leq 1-c$, $c>0$. Тогда максимальные* (*в классе поверхностей, определяемых отображениями вида $\varphi+\varepsilon\psi$, где для $\psi$ выполнено условие $\|\psi\|_{H,2}\geq L\|\psi\|_{H,6}$, $L>0$*) *поверхности — это поверхности нулевой горизонтальной сублоренцевой средней кривизны почти всюду.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Карманова М. Б.* Формула площади графиков на 4-мерных 2-ступенчатых сублоренцевых структурах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 1068–1091.
2. *Карманова М. Б.* Площадь графиков на четырехмерных двуступенчатых сублоренцевых структурах // Докл. АН. 2015. Т. 463, № 4. С. 387–390.
3. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского // http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf.
4. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 1–34.
5. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12, N 2. P. 145–160.
6. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. N 7. P. 885–900.
7. *Grochowski M.* Normal forms and reachable sets for analytic Martinet sub-Lorentzian structures of Hamiltonian type // J. Dyn. Control Syst. 2011. N 1. P. 49–75.
8. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. 2011. V. 177, N 3. P. 383–394.
9. *Grochowski M.* The structure of reachable sets for affine control systems induced by generalized Martinet sub-Lorentzian metrics // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2012. N 4. P. 1150–1177.
10. *Grochowski M.* The structure of reachable sets and geometric optimality of singular trajectories for certain affine control systems in $\mathbb{R}^3$. The sub-Lorentzian approach // J. Dyn. Control Syst. (to appear).
11. *Grochowski M.* Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 2002. N 2. P. 161–178.

**12.** *Grochowski M.* Some remarks on the global sub-Lorentzian geometry // Anal. Math. Phys. (to appear).
**13.** *Korolko A., Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19, N 4. P. 864–889.
**14.** *Korolko A., Markina I.* Geodesics on H-type quaternion groups with sub-Lorentzian metric and their physical interpretation // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4, N 3. P. 589–618.
**15.** *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. № 1. С. 62–70.
**16.** *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. № 3. С. 68–80.
**17.** *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Anal. Math. Phys. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.
**18.** *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
**19.** *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry: Contemp. Math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
**20.** *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 3. С. 259–264.
**21.** *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
**22.** *Garofalo N., Pauls S. D.* The Bernstein problem in the Heisenberg group // http://arxiv.org/pdf/math/0209065v2.pdf.

*Статья поступила 25 января 2015 г.*

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru