

О НАСЛЕДСТВЕННЫХ СВЕРХРАДИКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ

С. Йи, С. Ф. Каморников

Аннотация. Формация \mathfrak{F} называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям: 1) \mathfrak{F} — нормально наследственная формация; 2) любая группа $G = AB$, где A и B — \mathfrak{F} -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы из G , принадлежит \mathfrak{F} . Приводится пример наследственной сверхрадикальной формации, которая не является разрешимо насыщенной. Тем самым дается отрицательный ответ на вопрос 14.996) из «Коуровской тетради».

DOI 10.17377/smzh.2016.57.208

Ключевые слова: конечная группа, формация, сверхрадикальная формация, разрешимая насыщенность.

1. Введение

Понятие \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы, введенное в классе конечных разрешимых групп Картером и Хоуксом [1], а в произвольном случае — Л. А. Шеметковым [2], сформировало в теории конечных групп содержательное направление, связанное с изучением сверхрадикальных формаций. Интерес к ним обусловлен следующими обстоятельствами.

Во-первых, сверхрадикальные формации заслуживают внимания своей тесной связью с формациями Шеметкова — формациями, у которых критические группы являются либо группами простого порядка, либо группами Шмидта. По сути, эта связь, открытая в работах [3, 4], инициировала появление сверхрадикальных формаций, а затем на протяжении длительного периода стимулировала их развитие.

Во-вторых, сверхрадикальные формации, которые являются расширением таких объектов, как гиперрадикальные и решеточные формации, а также формации с условием Виландта (см., например, [5]), развивая собственный технический аппарат, позволяют использовать его для исследования последних.

В-третьих, открытие каждой новой сверхрадикальной формации равносильно открытию нового свойства конечных групп, представимых в виде произведения подгрупп с ограничениями на сомножители (важность изучения такой задачи отмечена, в частности, в [6]).

В-четвертых, сверхрадикальные формации интересны как объекты, двойственные радикальным формациям (формациям Фиттинга) — нормально наследственным формациям \mathfrak{F} , замкнутым относительно взятия произведений

Research of the first author is supported by the NNSF grant of China (Grant 11101369; 11471055).

нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Дуализм, проявляющийся уже в определениях объектов, нашел свое отражение в терминологии: рассматриваемая как самостоятельный объект формация \mathfrak{F} , замкнутая относительно взятия произведений \mathfrak{F} -субнормальных \mathfrak{F} -подгрупп, первоначально называлась \mathfrak{F} -радикальной [7], а с 2000 г. с подачи Л. А. Шеметкова [8] за ней закрепился термин «сверхрадикальная формация».

Понимание значимости сверхрадикальных формаций привело к проблеме их описания. В 1999 г. в «Коуровской тетради» [9] под номером 14.99 Л. А. Шеметковым были сформулированы две задачи.

(а) *Найти все сверхрадикальные локальные формации* (в оригинальном изложении [9] сверхрадикальные формации представлены под названием «суперрадикальные формации»).

(б) *Доказать, что всякая наследственная сверхрадикальная формация является разрешимо насыщенной.*

Задача 14.99(а) сегодня весьма далека от своего полного решения. Однако значительные успехи (см., например, [10, 11]), достигнутые в последние два года, позволяют надеяться на определенный прогресс уже в ближайшее время.

Что касается задачи 14.99(б), то в данной работе приводится пример наследственной сверхрадикальной формации, которая не является разрешимо насыщенной. Главная цель работы — доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть G — группа, изоморфная $Sz(2^3)$, и $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$, где $\mathfrak{H} = \text{form}(G)$, то справедливы следующие утверждения.

- (1) Формация \mathfrak{F} наследственная и сверхрадикальная.
- (2) Формация \mathfrak{F} не является разрешимо насыщенной.

Отметим, что пример ненаследственной разрешимо насыщенной сверхрадикальной формации приведен в [12].

2. Определения и используемые результаты

Рассматриваются только конечные группы.

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если \mathfrak{F} — непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется \mathfrak{F} -корадикалом группы G).

Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$$

такая, что $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Формация \mathfrak{F} называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) \mathfrak{F} — нормально наследственная формация;
- 2) любая группа $G = AB$, где A и B — \mathfrak{F} -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы из G , принадлежит \mathfrak{F} .

Формация \mathfrak{F} называется *наследственной* (нормально наследственной), если она замкнута относительно взятия подгрупп (нормальных подгрупп соответственно).

Развивая принадлежащую Гашпоу концепцию локальной формации, Л. А. Шеметков и Бэр (параллельно и независимо) ввели понятие *композиционной* формации. Суть идеи состоит в рассмотрении класса \mathfrak{F} групп с f -центральными рядами, где f — функция, ставящая в соответствие каждой простой (абелевой или неабелевой) группе некоторую формацию. В [13, определение IV.4.9] такие функции называются *формационными функциями Бэра* (Л. А. Шеметков в [14] называет их *композиционными экранами*).

Для характеристики композиционных формаций Бэр ввел следующее понятие. Формация \mathfrak{F} называется *разрешимо насыщенной*, если для любой разрешимой нормальной подгруппы N группы G из $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Вопрос о соотношении композиционных и разрешимо насыщенных формаций решен следующей теоремой Бэра.

Теорема 2.1 [13, теорема IV.4.17]. *Формация является композиционной тогда и только тогда, когда она разрешимо насыщена.*

В дальнейшем G — группа, изоморфная $Sz(2^3)$, $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$ (множество всех простых делителей порядка группы $Sz(2^3)$) и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$, где $\mathfrak{H} = \text{form}(G)$ и \mathfrak{S}_π — формация всех разрешимых π -групп. Отметим, что неразрешимая группа H принадлежит формации \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда \mathfrak{S}_π -корадикал группы H представим в виде прямого произведения групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

Приведем следующий фундаментальный результат о примитивных группах, принадлежащий Бэру [15]. Группа называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром.

Теорема 2.2 [15]. *Пусть R — примитивная группа и U — ее максимальная подгруппа, имеющая единичное ядро. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

- (1) группа R обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N , подгруппа N является абелевой и U — дополнение к N в R ;
- (2) группа R обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N , подгруппа N является неабелевой и U — добавление к N в R ;
- (3) группа R обладает двумя неабелевыми минимальными нормальными подгруппами N и N^* и U является дополнением в группе R к подгруппам N и N^* .

Следуя [14], класс всех примитивных групп будем обозначить через \mathfrak{P} . Если группа R примитивна, то полагаем, что $R \in \mathfrak{P}_i$, если группа R удовлетворяет условию (i) теоремы 2.2 ($i = 1, 2, 3$).

При доказательстве основного результата используется следующая классификация примитивных групп из класса \mathfrak{P}_2 .

Теорема 2.3 (см. [16, теорема 1.1.52]). *Пусть R — примитивная группа из класса \mathfrak{P}_2 и U — ее максимальная подгруппа, имеющая единичное ядро. Пусть*

$$\text{Soc}(R) = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n,$$

где G_i — изоморфные копии некоторой простой неабелевой группы. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- (1) $n = 1$ и R — почти простая группа;
- (2) $n > 1$ и $U \cap \text{Soc}(R)$ — полная диагональная подгруппа в $\text{Soc}(R)$;
- (3) $n > 1$ и $U \cap \text{Soc}(R) = D_1 \times \cdots \times D_l$ — прямое произведение $l > 1$ подгрупп таких, что для каждого $j = 1, 2, \dots, l$ подгруппа D_j является полной

диагональной подгруппой в прямом произведении $\prod_{i \in I_j} G_i$, а $\{I_1, \dots, I_l\}$ — минимальное нетривиальное U -допустимое разбиение множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$ на блоки под действием U на I ;

(4) $n > 1$, проекция подгруппы $U \cap \text{Soc}(R)$ на первую компоненту G_1 группы $\text{Soc}(R)$ является нетривиальной собственной подгруппой группы G_1 и

$$1 \neq U \cap \text{Soc}(R) = (U \cap G_1) \times \dots \times (U \cap G_n);$$

(5) $n > 1$ и $U \cap \text{Soc}(R) = 1$.

Мы будем опираться также на следующий известный факторизационный результат.

Теорема 2.4 [17]. *Если порядок группы R не делится на 3 и $R = AB$, где A и B — разрешимые подгруппы, то группа R также разрешима.*

3. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы проведем в несколько шагов.

Шаг 1. *Формация \mathfrak{F} наследственна.* Предположим, что формация \mathfrak{F} не наследственна. Тогда существует принадлежащая формации \mathfrak{F} группа, у которой имеется собственная подгруппа, не принадлежащая \mathfrak{F} . Выберем среди таких групп группу R наименьшего порядка. Тогда $R \in \mathfrak{F}$ и в группе R имеется такая подгруппа U , что $U \notin \mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что U — максимальная подгруппа группы R .

Пусть R — простая неабелева группа. Тогда $R \simeq Sz(2^3)$. Хорошо известно, что все собственные подгруппы группы $Sz(2^3)$ разрешимы. Значит, U — разрешимая π -группа и $U \in \mathfrak{F}$; противоречие. Поэтому далее полагаем, что R — непростая группа.

Если K — минимальная нормальная подгруппа группы R , то ввиду выбора группы R имеем $UK/K \simeq U/U \cap K \in \mathfrak{F}$. Если K_1 — минимальная нормальная подгруппа группы R , отличная от подгруппы K , то аналогично показывается, что $U/U \cap K_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$U \simeq U/(U \cap K) \cap (U \cap K_1) \in \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие с тем, что $U \notin \mathfrak{F}$. Значит, K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R .

Если группа R разрешима, то утверждение очевидно. Поэтому полагаем далее, что $R^{\mathfrak{S}_\pi} \neq 1$.

Так как $R \in \mathfrak{F}$, то \mathfrak{S}_π -корадикал $R^{\mathfrak{S}_\pi}$ группы R представим в виде прямого произведения групп, изоморфных G . Поскольку K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $R^{\mathfrak{S}_\pi} \in \mathfrak{H} = \text{form}(G)$, то $K = R^{\mathfrak{S}_\pi}$. Очевидно, что R является примитивной группой из класса \mathfrak{P}_2 . Пусть

$$\text{Soc}(R) = K = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n,$$

где $G_i \simeq G$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Если $K \subseteq U$, то из $U/K \in \mathfrak{S}_\pi$ имеем $U \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, подгруппа U не содержит K . Отсюда и из максимальной подгруппы U в R имеем, что $R = UK$ и $\text{Core}_R(U) = 1$. По теореме 2.3 возможны пять различных случаев. Рассмотрим каждый из них.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $n = 1$ и R — почти простая группа. Тогда $U \cap K$ — собственная подгруппа простой группы $K \simeq Sz(2^3)$. Так как все собственные подгруппы группы $Sz(2^3)$ разрешимы, $U \cap K \in \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда и из

$$U/U \cap K \simeq UK/K = R/K \in \mathfrak{S}_\pi$$

имеем $U \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, что невозможно.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $n > 1$ и $U \cap K = D$ — полная диагональная подгруппа в K . В этом случае $U = N_R(D)$. Так как $U/D \simeq R/K \in \mathfrak{S}_\pi$ и $D \simeq Sz(2^3)$, то $U \in \mathfrak{F}$. Приходим к противоречию.

СЛУЧАЙ 3. Пусть $n > 1$ и $U \cap K = D_1 \times \cdots \times D_l$ — прямое произведение $l > 1$ подгрупп таких, что для каждого $j = 1, 2, \dots, l$ подгруппа D_j является полной диагональной подгруппой в прямом произведении $\prod_{i \in I_j} G_i$, а $\{I_1, \dots, I_l\}$ — минимальное нетривиальное U -допустимое разбиение множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$ на блоки под действием U на I . Как в случае 2, имеем

$$U/D_1 \times \cdots \times D_l \simeq R/K \in \mathfrak{S}_\pi,$$

а значит, $U \in \mathfrak{F}$. Снова приходим к противоречию с условием $U \notin \mathfrak{F}$.

СЛУЧАЙ 4. Пусть $n > 1$ и проекция подгруппы $U \cap K$ на первую компоненту G_1 группы $K = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ является нетривиальной собственной подгруппой группы G_1 . В этом случае

$$1 \neq U \cap K = (U \cap G_1) \times \cdots \times (U \cap G_n).$$

Так как по теореме Томпсона все собственные подгруппы группы $Sz(2^3)$ разрешимы, $U \cap K = (U \cap G_1) \times \cdots \times (U \cap G_n) \in \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда и из $U/U \cap K \in \mathfrak{S}_\pi$ имеем $U \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, что также невозможно.

СЛУЧАЙ 5. Пусть $n > 1$ и $U \cap K = 1$. В этом случае $U \simeq R/K \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, формация \mathfrak{F} наследственна.

ШАГ 2. *Формация \mathfrak{F} сверхрадикальна.* Предположим, что формация \mathfrak{F} не сверхрадикальна. Тогда по определению сверхрадикальной формации существуют не принадлежащие \mathfrak{F} группы, факторизуемые \mathfrak{F} -субнормальными \mathfrak{F} -подгруппами. Выберем среди них группу R наименьшего порядка. Тогда R обладает такими \mathfrak{F} -субнормальными \mathfrak{F} -подгруппами A и B , что $R = AB$, но $R \notin \mathfrak{F}$.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что A и B — максимальные подгруппы группы R . Действительно, так как подгруппа A \mathfrak{F} -субнормальна в R , существует максимальная цепь подгрупп

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{k-1} \subset A_k = R$$

такая, что $A_i^{\mathfrak{F}} \subseteq A_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Ввиду тождества Дедекинда имеем $A_{k-1} = A(A_{k-1} \cap B)$. Из наследственности формации \mathfrak{F} следует, что $A_{k-1} \cap B \in \mathfrak{F}$. Кроме того, подгруппы A и $A_{k-1} \cap B$ являются \mathfrak{F} -субнормальными в A_{k-1} . Значит, ввиду выбора группы R подгруппа A_{k-1} принадлежит формации \mathfrak{F} .

Итак, будем считать далее, что A и B — \mathfrak{F} -нормальные максимальные \mathfrak{F} -подгруппы группы R . Тогда из определения \mathfrak{F} -нормальной максимальной подгруппы следует, что $1 \neq R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B$.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы R . Ввиду выбора группы R имеем $R/L \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} — формация, L — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $L = R^{\mathfrak{F}}$.

Из определения формации \mathfrak{F} и условия $L = R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B \in \mathfrak{F}$ вытекает, что L либо p -группа, где $p \in \pi$, либо прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

1. Пусть L — прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$. Так как L — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R , то $C_R(L) = 1$. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то из $C_R(L) = 1$ и $L \subseteq A$ следует, что $A^{\mathfrak{S}_\pi} = L$. Аналогично показывается, что $B^{\mathfrak{S}_\pi} = L$.

Таким образом, $R/L = (A/L)(B/L)$, где A/L и B/L — разрешимые подгруппы. Так как порядок группы R/L не делится на 3, ввиду теоремы 2.4 группа R/L разрешима. Отсюда и из строения подгруппы L следует, что $R \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

2. Пусть L — p -группа для некоторого $p \in \pi$. Тогда из единственности минимальной нормальной подгруппы L , а также включений $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ и строения формации \mathfrak{F} вытекает, что $A \in \mathfrak{S}_\pi$ и $B \in \mathfrak{S}_\pi$. Так как порядок группы R не делится на 3, ввиду теоремы 2.4 R — разрешимая π -группа, т. е. $R \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию.

Таким образом, формация \mathfrak{F} сверхрадикальна.

Шаг 3. Формация \mathfrak{F} не является композиционной. Предположим, что \mathfrak{F} композиционная. Тогда ввиду леммы 1.4 из [18] она обладает таким композиционным экраном f , что

- 1) $f(G) = \mathfrak{S}_\pi$;
- 2) $f(p) = \mathfrak{S}_\pi$ для всех $p \in \pi = \{2, 5, 7, 13\}$;
- 3) $f(p)$ — пустая формация для всех $p \notin \pi$;
- 4) $f(H)$ — пустая формация для всех простых неабелевых групп H , которые не изоморфны G .

Пусть $M(G)$ — мультипликатор Шура группы G . Как отмечено, например, в [19, теорема 4.1], $M(G) \cong Z_2 \times Z_2$. Пусть \widehat{G} — универсальная накрывающая группы G . Очевидно, группа \widehat{G} принадлежит композиционной формации, обладающей экраном f . Но тогда ввиду того, что формация \mathfrak{F} композиционная с экраном f , имеем $\widehat{G} \in \mathfrak{F}$. Однако это не так. Получили противоречие. Следовательно, формация \mathfrak{F} не композиционная.

Шаг 4. Формация \mathfrak{F} не является разрешимо насыщенной. Так как формация \mathfrak{F} не композиционная, ввиду теоремы 2.1 она не является разрешимо насыщенной формацией. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carter R., Hawkes T. The \mathfrak{F} -normalisers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5, N 2. P. 175–202.
2. Шеметков Л. А. Ступенчатые формации групп // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.
3. Ballester-Bolinches A. A note on saturated formations // Arch. Math. 1992. V. 58, N 2. P. 110–113.
4. Семенчук В. Н. Характеризация \check{S} -формаций // Вопросы алгебры. 1992. № 7. С. 103–107.
5. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн.: Беларуская наука, 2003.
6. Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б. Конечные группы с кратными факторизациями // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 4. С. 1251–1263.
7. Семенчук В. Н. Разрешимые \mathfrak{F} -радикальные формации // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 261–266.

8. Семенчук В. Н., Шеметков Л. А. Сверхрадикальные формации // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 5. С. 24–26.
9. *Нерешенные вопросы теории групп*. Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010.
10. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. Об одном классе наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 97–108.
11. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tutyaynov V. N. On a problem of L. A. Shemetkov on superradical formations of finite groups // J. Algebra. 2014. V. 403. P. 69–76.
12. Каморников С. Ф. Об одном примере гиперрадикальной формации // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 3. С. 61–64.
13. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
14. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
15. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Ill. J. Math. 1957. V. 1, N 2. P. 115–187.
16. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
17. Сыскин С. А. Об одном вопросе Р. Бэра // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 3. С. 679–681.
18. Каморников С. Ф., Шеметков Л. А. О корадикалах субнормальных подгрупп // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 5. С. 493–513.
19. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

Статья поступила 31 декабря 2014 г.

Yi Xiaolan (Йи Сяолан)
Department of Mathematics, Zhejiang Sci-Tech University,
Hangzhou 310018, P. R. China
yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович
Международный университет МИТСО,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru