Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 517.977

О СУБРИМАНОВОМ ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГУРСА

С. В. Агапов

Аннотация. Рассматривается субриманов геодезический поток для распределения Гурса. Найдены поверхности уровня первых интегралов, находящихся в инволюции. Изучены траектории в фазовом пространстве, проекции которых на горизонтальную плоскость являются замкнутыми кривыми.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.101

Ключевые слова: оптимальное управление, субриманова геометрия, распределение Гурса, геодезический поток.

1. Введение

В работе изучается субриманова задача на группе Гурса. Отвечающая этой задаче гамильтонова система вполне интегрируема. Найдены поверхности уровней первых интегралов, находящихся в инволюции. Кроме того, показано существование экстремальных траекторий, проекции которых на горизонтальную плоскость являются замкнутыми кривыми. Такие траектории интересны тем, что они отвечают движению вдоль «запрещенных» направлений.

Распределение Гурса двумерных плоскостей $\triangle$ в $\mathbb{R}^n$ задается векторными полями $f_1(q) = (1, 0, -x_2, \dots, -x_{n-1})$ и $f_2(q) = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Определим скалярное произведение в $\triangle$ таким образом, чтобы векторы $f_1(q)$, $f_2(q)$ образовывали ортонормированный базис. Так как векторные поля $f_1(q), \dots, f_n(q)$, где $f_k = [f_1, f_{k-1}] = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (1 на k-м месте), $3 \leq k \leq n$, линейно независимы и порождают все $\mathbb{R}^n$, по теореме Рашевского — Чоу (см. [1]) любые две точки $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить кусочно гладкой траекторией системы

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), \quad u \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

при этом $|\dot{q}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Векторные поля $f_1(q), \dots, f_n(q)$ порождают n-мерную нильпотентную алгебру Ли со следующими коммутационными соотношениями:

$$[f_1, f_{k-1}] = f_k, \ 3 \leq k \leq n, \quad [f_1, f_n] = [f_i, f_j] = 0, \ 2 \leq i, j \leq n.$$

Эта алгебра Ли называется *алгеброй Гурса*, а отвечающая ей группа Ли на $\mathbb{R}^n$ — *группой Гурса*. При этом $f_1(q), \dots, f_n(q)$ являются левоинвариантными векторными полями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00124–а).

По теореме Филиппова (см. [1]) любые две точки $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить траекторией системы (1) минимальной длины, т. е. такой траекторией, на которой достигается минимум функционала

$$l = \int\limits_0^T |\dot{q}|\, dt, \tag{2}$$

где $q(0) = q_0$, $q(T) = q_1$. Такие траектории называются *оптимальными.* Легко показать, что задача минимизации функционала (2) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J = \int\limits_0^T \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}\, dt. \tag{3}$$

Рассматриваемая задача оптимального управления (1), (2) играет важную роль в робототехнике; в частности, она описывает движение машины с прицепами на плоскости (см. [2]).

Для исследования оптимальных траекторий для функционала (3) воспользуемся принципом максимума Понтрягина (см. [3]). Он заключается в следующем. Если $q(t)$ — оптимальная траектория, то существует такой ковектор $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$, что для гамильтониана

$$H(p, q, u) = \langle p, u_1 f_1 + u_2 f_2 \rangle - \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}, \tag{4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, выполнено

$$H(p(t), q(t), u(t)) = \max_{\tilde{u} \in \mathbb{R}^2} H(p(t), q(t), \tilde{u}) \tag{5}$$

и, кроме того,

$$\dot{x_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Гамильтоновы системы такого вида, отвечающие субримановой задаче на других группах Ли, изучались, например, в [4–6].

В [7] показано, что решения системы (6) (экстремальные траектории) при $n = 4$ (случай распределения Энгеля) находятся в терминах эллиптических функций. Кроме того, в [7] установлено существование таких экстремальных траекторий, что их проекции на плоскость Ox_1x_2 являются замкнутыми кривыми либо без самопересечений, либо с одним самопересечением. В [8] доказано, что в общем случае экстремальные траектории распределения Гурса выражаются через гиперэллиптические интегралы.

Гамильтонова система (6) вполне интегрируема (см., например, [8]). Для дальнейшего нам понадобятся ее первые интегралы.

Теорема 1. *Гамильтонова система* (6), *отвечающая задаче* (1), (3), *обладает следующими первыми интегралами:*

$$F_1 = H = \frac{1}{2}\big((p_1 - x_2 p_3 - \dots - x_{n-1} p_n)^2 + p_2^2\big),$$

$$F_2 = p_2 - F_3 x_1 - F_4 \frac{x_1^2}{2!} - \dots - F_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \dots,$$

$$F_{n-2} = p_{n-2} - F_{n-1}x_1 - F_n\frac{x_1^2}{2!}, \quad F_{n-1} = p_{n-1} - F_n x_1, \quad F_n = p_n.$$

Интегралы F_i, $i = 1, \ldots, n$, почти всюду функционально независимы и находятся в инволюции:

$$\{F_k, F_s\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\frac{\partial F_s}{\partial p_i} - \frac{\partial F_k}{\partial p_i}\frac{\partial F_s}{\partial x_i}\right) = 0.$$

Объясним, как устроены поверхности уровней интегралов F_i. Введем отображение $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x,p) = (F_1(x,p), \ldots, F_n(x,p))$.

Теорема 2. *Если $C \in \mathbb{R}^n$ — регулярное значение отображения φ, то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо двум экземплярам $\mathbb{R}^n$, либо s_1 непересекающимся цилиндрам $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, где $0 \le s_1 \le n-2$.*

Если C — критическое значение φ, то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо $\mathbb{R}^n$, либо объединению $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$, $k \le n-2$. Здесь Γ_j гомеоморфны либо $\mathbb{R}^{n-1}$, либо $\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma$, где γ — окружность или замкнутая кривая с s самопересечениями (см. ниже).

Система (6) допускает траектории, для которых $x_1(t)$, $x_2(t)$ — периодические функции, а их проекции на плоскость Ox_1x_2 — замкнутые кривые.

Теорема 3. *Среди решений системы* (6) *найдутся такие, что их проекции на плоскость Ox_1x_2 образуют замкнутые кривые, симметричные относительно оси Ox_1.*

Поиск траекторий такого вида мотивирован тем, что они отвечают движению вдоль запрещенных направлений, эта проблема естественным образом возникает в различных прикладных задачах, о которых сказано выше.

Автор выражает благодарность А. А. Аграчеву за постановку задачи, а также А. А. Аграчеву и А. Е. Миронову за полезные обсуждения.

2. Доказательства теорем 1–3

Из (5) следует, что $H_{u_1} = H_{u_2} = 0$, т. е. $u_1 = \langle p, f_1\rangle, u_2 = \langle p, f_2\rangle$. Поэтому

$$H(q,p) = \frac{\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2}{2} = \frac{\langle p, f_1\rangle^2 + \langle p, f_2\rangle^2}{2} = \frac{1}{2}\big((p_1 - x_2p_3 - \cdots - x_{n-1}p_n)^2 + p_2^2\big).$$

Уравнения (6) имеют вид

$$\dot{x}_1 = p_1 - x_2p_3 - \cdots - x_{n-1}p_n,\ \dot{x}_2 = p_2,\ \dot{x}_3 = -x_2\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n = -x_{n-1}\dot{x}_1,$$

$$\dot{p}_1 = 0,\ \dot{p}_2 = p_3\dot{x}_1, \ldots, \dot{p}_{n-1} = p_n\dot{x}_1,\ \dot{p}_n = 0.$$

Введем вдоль траектории новый параметр $s(t)$ такой, что $\dot{s} = u_1$, тогда $s(t) = x_1(t)$. Уравнения на импульсы перепишутся в следующем виде:

$$p_1' = 0,\ p_2' = p_3, \ldots, p_{n-1}' = p_n,\ p_n' = 0,$$

где $p_i' = \frac{dp_i}{ds}$, $i = 1, \ldots, n$. Теперь первые интегралы легко находятся:

$$F_n = p_n, \quad F_{n-1} = p_{n-1} - F_n x_1, \quad F_{n-2} = p_{n-2} - F_{n-1}x_1 - F_n\frac{x_1^2}{2!}, \ldots,$$

$$F_2 = p_2 - F_3x_1 - F_4\frac{x_1^2}{2!} - \cdots - F_n\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$F_1 = H = \frac{1}{2}\big((p_1 - x_2p_3 - \dots - x_{n-1}p_n)^2 + p_2^2\big).$$

Заметим, что $F_j = F_j(x_1, p_j, p_{j+1}, \dots, p_n)$, $1 < j < n$, поэтому все F_j почти всюду функционально независимы и находятся попарно в инволюции. Таким образом, исходная система интегрируема по Лиувиллю. Теорема 1 доказана.

Пусть $(x_1, \dots, x_n, P_1, \dots, P_n)$ — новые координаты в фазовом пространстве, где P_i определяются следующим образом:

$$P_1 = p_1 - x_2p_3 - x_3p_4 - \dots - x_{n-1}p_n, \quad P_n = p_n,$$

$$P_{n-1} = p_{n-1} - P_nx_1, \quad P_{n-2} = p_{n-2} - P_{n-1}x_1 - P_n\frac{x_1^2}{2!}, \dots,$$

$$P_3 = p_3 - P_4x_1 - P_5\frac{x_1^2}{2!} - \dots - P_n\frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!}, \quad P_2 = p_2.$$

Заметим, что новые координаты не канонические. Уравнения (6) в новых координатах имеют вид

$$\dot x_1 = P_1,\ \dot x_2 = P_2,\ \dot x_3 = -x_2P_1, \dots, \dot x_n = -x_{n-1}P_1,$$

$$\dot P_1 = -P_2\left(P_3 + P_4x_1 + \dots + P_n\frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!}\right), \quad \dot P_2 = P_1\left(P_3 + P_4x_1 + \dots + P_n\frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!}\right),$$
$$\dot P_3 = 0, \dots, \dot P_n = 0.$$

В новых координатах первые интегралы принимают вид

$$F_1 = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2),\ F_2 = P_2 - P_3x_1 - \dots - P_n\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!},\ F_3 = P_3, \dots, F_n = P_n.$$

Выпишем матрицу Якоби $J_{n\times 2n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial P}\right)$ отображения φ в новых координатах:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
w_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -x_1 & -\frac{x_1^2}{2!} & \dots & -\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}\\
0 & 0 & \dots & 0 & P_1 & P_2 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}.$$

Здесь $w_0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\big(P_3 + P_4x_1 + \dots + P_n\frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!}\big)$.

Если $P_1 \neq 0$, то ранг матрицы максимален и равен n. Ранг $J_{n\times 2n}$ равняется $n-1$ только в следующих случаях: $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ либо $P_1 = w_0 = 0$, $P_2 \neq 0$.

Зафиксируем значения первых интегралов: $F_k = C_k$, $1 \le k \le n$. Тогда

$$P_1^2 + P_2^2 = 2C_1, \tag{7}$$

$$P_2 = C_2 + C_3x_1 + \dots + C_n\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \tag{8}$$

при этом $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Таким образом, поверхности уровней первых интегралов определяются пересечением двух цилиндров в $\mathbb{R}^3$, заданных уравнениями (7) и (8).

Рассмотрим сначала случай, когда $C_3 = \dots = C_n = 0$. Тогда уравнение (8) принимает вид $P_2 = C_2$. Из (7) получаем $P_1 = \pm\sqrt{2C_1 - C_2^2}$. Если $|C_2| < \sqrt{2C_1}$, то ранг отображения φ равен n и $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно двум экземплярам $\mathbb{R}^n$. Если $|C_2| = \sqrt{2C_1}$, то ранг φ равен $n-1$ и $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Далее предположим, что найдется такое k, $3 \leq k \leq n$, что $C_k \neq 0$. В этом случае пересечение двух цилиндров, заданных в $\mathbb{R}^3$ уравнениями (7) и (8), состоит из замкнутых кривых, симметричных относительно плоскости OP_2x_1, и точек их касания.

В регулярном случае, когда в пересечении цилиндров лежат s_1 непересекающихся кривых, гомеоморфных окружностям, где $1 \leq s_1 \leq n-2$, поверхности уровня устроены как объединение цилиндров $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. На рис. 1 изображены цилиндры, заданные уравнениями (7), (8), которые пересекаются по двум окружностям, т. е. поверхности уровня первых интегралов в этом случае устроены как объединение двух экземпляров $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

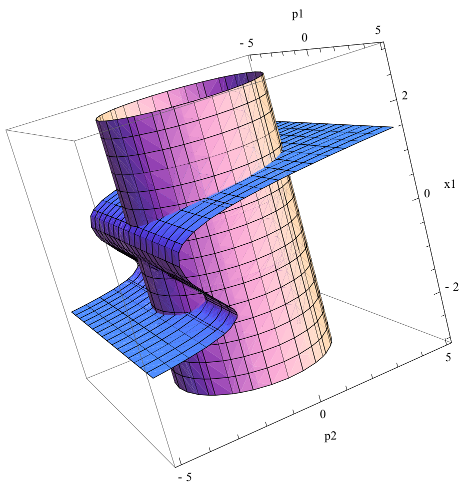

Рис. 1. Пересечение цилиндров, отвечающее регулярному значению интегралов.

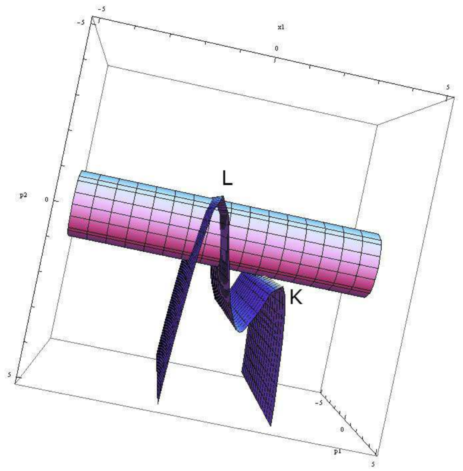

Рис. 2. Пересечение цилиндров, отвечающее критическому значению интегралов.

Критические уровни первых интегралов отвечают точкам касания цилиндров, их число не превосходит $n-3$; в этом случае поверхности устроены как объединение $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_s$, $1 \leq s \leq n-2$, где Γ_j гомеоморфны либо $\mathbb{R}^{n-1}$ (этот случай отвечает изолированной точке касания цилиндров), либо $\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma$, где γ либо окружность, либо замкнутая кривая с s_2 самопересечениями, $1 \leq s_2 \leq n-3$. На рис. 2 изображены два цилиндра, которые касаются в изолированной точке K и пересекаются по двум соприкасающимся в точке L окружностям, т. е. поверхности уровня в этом случае устроены как $\mathbb{R}^{n-1} \cup (\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma)$, где γ — замкнутая кривая с одним самопересечением. Теорема 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Нас интересуют такие траектории, для которых $x_1(t)$, $x_2(t)$ — периодические функции. Если $x_1(t)$ — периодическая функция (см. ниже), то из уравнений $\dot{x}_1 = P_1$, $P_2 = C_2 + C_3x_1 + \cdots + C_n\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}$ следует, что $P_1(t)$ и $P_2(t)$ также периодические. С учетом $\dot{x}_2 = P_2$ и $2H = (\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 = 2C_1$ имеем

$$\dot{x}_2 = C_2 + C_3x_1 + \cdots + C_n\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \tag{9}$$

$$(\dot{x}_1)^2 = 2C_1 - \left(C_2 + C_3 x_1 + \dots + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}\right)^2. \tag{10}$$

Введем обозначения $Q_{n-2}(x_1) = C_2 + C_3 x_1 + \dots + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}$, $f(x_1) = 2C_1 - Q_{n-2}^2(x_1)$, тогда уравнения (9), (10) примут вид

$$(\dot{x}_1)^2 = f(x_1), \quad \dot{x}_2 = Q_{n-2}(x_1). \tag{11}$$

Пусть α_i — вещественные корни уравнения $Q_{n-2}(x_1) = 0$, а β_j — вещественные корни уравнения $f(x_1) = 0$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$. Заметим, что

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} f(x_1) = -\infty.$$

С другой стороны, $f(\alpha_i) = 2C_1 > 0$, $i = 1, \dots, k$. Поэтому каждый корень α_i расположен внутри некоторого отрезка $[\beta_j, \beta_{j+1}]$, на котором $f(x_1) \geq 0$. На рис. 3 дан пример взаимного расположения корней уравнений $f(x_1) = 0$, $Q_{n-2}(x_1) = 0$, на рис. 4 изображена проекция траектории, отвечающей случаю, показанному на рис. 3, на плоскость Ox_1x_2.

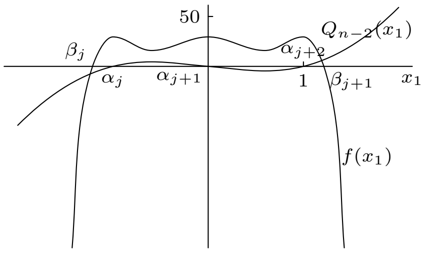

Рис. 3.

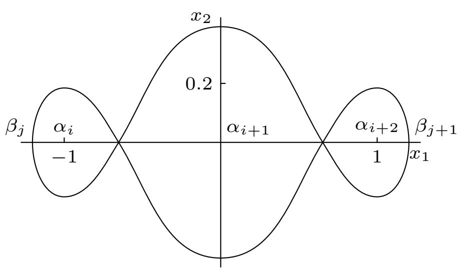

Рис. 4.

Любому такому отрезку $[\beta_j, \beta_{j+1}]$ отвечают периодические решения $x_1(t)$ с некоторым периодом τ. Предположим, что $x_1(0) = \beta_j$. Тогда $x_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = \beta_{j+1}$, $x_1(\tau) = x_1(0) = \beta_j$. В силу (11) имеем

$$dx_1 = \sqrt{f(x_1)}\, dt, \quad dx_2 = Q_{n-2}(x_1)\, dt, \quad t \in [0, \tau/2],$$
$$dx_1 = -\sqrt{f(x_1)}\, dt, \quad dx_2 = Q_{n-2}(x_1)\, dt, \quad t \in [\tau/2, \tau].$$

Следовательно,

$$dx_2 = \pm \frac{Q_{n-2}(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}}\, dx_1. \tag{12}$$

Таким образом, $x_2(t)$ — периодическая функция тогда и только тогда, когда следующий интеграл обращается в нуль:

$$\int_0^\tau Q_{n-2}(x_1)\, dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} Q_{n-2}(x_1)\, dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} Q_{n-2}(x_1)\, dt$$
$$= \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \frac{Q_{n-2}(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}}\, dx_1 + \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{Q_{n-2}(x_1)}{-\sqrt{f(x_1)}}\, dx_1 = 2 \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \frac{Q_{n-2}(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}}\, dx_1 = 0.$$

Выберем константы $C_2, \dots, C_n$ так, чтобы полином $Q_{n-2}(x_1)$ имел вид

$$Q_{n-2}(x_1) = x_1\left(x_1^2 - \alpha_1^2\right) \dots \left(x_1^2 - \alpha_k^2\right).$$

Тогда последнее равенство автоматически выполнено. Положим $x_2(x_1)|_{x_1=\beta_j} = 0$. Тогда траектория будет симметричной относительно оси Ox_1 в плоскости Ox_1x_2. Теорема 3 доказана.

В заключение приведем примеры траекторий, отвечающих различным значениям констант C_j, проекции которых на плоскость Ox_1x_2 образуют замкнутые симметричные кривые с различным числом самопересечений (рис. 5–8). Они были получены численным интегрированием уравнения (12).

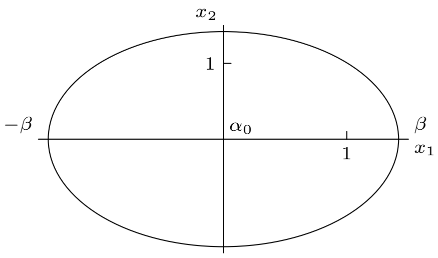

Рис. 5. $Q(x_1)=x_1$, $C_1=1$.

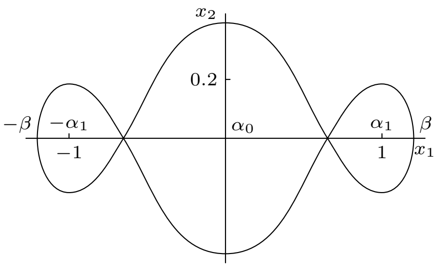

Рис. 6. $Q(x_1)=10x_1(x_1^2-1)$, $C_1=15$.

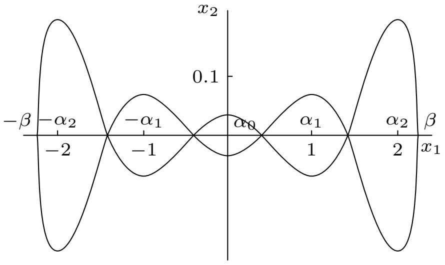

Рис. 7. $Q(x_1)=x_1(x_1^2-1)(x_1^2-4)$, $C_1=42$.

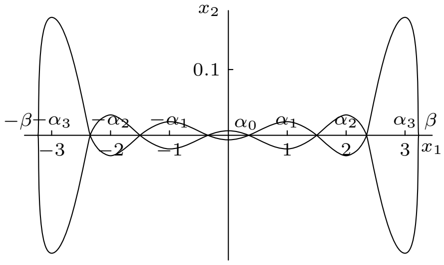

Рис. 8. $Q(x_1)=x_1(x_1^2-1)(x_1^2-4)(x_1^2-9)$, $C_1=40000$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.

2. *Robot motion planning and control* (ed. J. P. Laumond). Springer-Verl.: Berlin; Heidelberg, 1998.

3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.

4. *Taimanov I. A.* Integrable geodesic flows of nonholonomic metrics // J. Dyn. Control Sist. 2003. V. 3, N 1. P. 129–147.

5. *Мажитова А. Д.* Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли // Мат. труды. 2012. Т. 15, № 1. С. 120–128.

6. *Сачков Ю. Л.* Теория управления на группах Ли // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 2007. Т. 26. С. 5–59. (Итоги науки и техники).

7. *Ардентов А. А., Сачков Ю. Л.* Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.

8. *Anzaldo-Meneses A., Monroy-Perez F.* Goursat distribution and sub-Riemannian structures // J. Math. Phys. 2003. V. 44, N 12. P. 6101–6111.

Статья поступила 30 декабря 2014 г.

Агапов Сергей Вадимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
agapov.sergey.v@gmail.com