Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 517.9

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШИМЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

М. В. Плеханова

Аннотация. Представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения, разрешенного относительно старшей производной, с помощью функции Миттаг-Леффлера используется при изучении вырожденных линейных и квазилинейных эволюционных уравнений в случае выполнения некоторых специальных ограничений на нелинейную часть уравнения. Условия разрешимости, полученные для задачи Коши, упрощаются в ситуации, когда в качестве начального рассматривается обобщенное условие Шоуолтера — Сидорова. Полученные результаты использованы при исследовании начально-краевой задачи для уравнения движения жидкости Кельвина — Фойгта.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.414

Ключевые слова: уравнение высокого порядка, квазилинейное уравнение, вырожденное эволюционное уравнение, задача Коши, обобщенная задача Шоуолтера — Сидорова, начально-краевая задача.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, заданы операторы $L \in \mathscr{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (линейный и непрерывный из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$), $M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ (линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{X}$, действует в $\mathfrak{Y}$) и нелинейный, вообще говоря, оператор $N : Y \to \mathfrak{Y}$, Y — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Предметом исследования является квазилинейное дифференциальное уравнение высокого порядка

$$\frac{d^m}{dt^m}Lx(t) = Mx(t) + N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \tag{1.1}$$

с вырожденным оператором L при производной, т. е. в случае $\ker L \neq \{0\}$. Такие уравнения далее будем называть *вырожденными* или, следуя сложившейся традиции, *уравнениями соболевского типа* [1–3]. В класс уравнений вида (1.1) попадают многие уравнения и системы уравнений в частных производных, не разрешимые относительно старшей производной по выделенной переменной, которые встречаются при математическом моделировании различных процессов и явлений (см. [1, 3]).

Среди близких по тематике работ отметим монографию [4], касающуюся, в частности, вырожденных нелинейных эволюционных уравнений, монографию

Работа выполнена при поддержке лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020) и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–31125 мол_а).

[3], посвященную исследованию вопросов существования и разрушения решений уравнений в частных производных вида (1.1) с, вообще говоря, нелинейным оператором L, работы А. И. Кожанова (например, [5, 6]), И. А. Шишмарева с соавторами (см. [7] и др.).

В данном случае изучение разрешимости задач Коши и Шоултера — Сидорова для уравнения (1.1) проводится методами вырожденных полугрупп операторов, развитыми в работах Г. А. Свиридюка и В. Е. Федорова при исследовании вырожденных эволюционных уравнений первого порядка [2]. А именно, для линейных операторов в уравнении используется условие (L, p)-ограниченности оператора M. Это позволяет редуцировать (1.1) к системе двух уравнений, одно из которых является разрешенным относительно старшей производной, второе имеет при этой производной нильпотентный оператор, что упрощает его исследование. Близкий подход к изучению вырожденных полулинейных уравнений первого порядка использован в [8–11], а также в [12] при рассмотрении неполного вырожденного полулинейного уравнения второго порядка в случае $p = 0$.

Представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения, разрешенного относительно старшей производной, с помощью функции Миттаг-Леффлера используется при изучении вырожденных линейных и квазилинейных эволюционных уравнений в случае выполнения некоторых специальных ограничений на нелинейный оператор N. Условия разрешимости, полученные для задачи Коши, упрощаются в ситуации, когда в качестве начального рассматривается обобщенное условие Шоуолтера — Сидорова. Полученные результаты использованы при исследовании начально-краевой задачи для уравнения движения жидкости Кельвина — Фойгта порядка $L = 1$ (в обозначениях [13]).

2. Задача Коши для невырожденного уравнения

Для дальнейших рассмотрений определим функцию Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2.2}$$

для неоднородного дифференциального уравнения

$$z^{(m)}(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \tag{2.3}$$

где $m \in \mathbb{N}$, A — ограниченный оператор на банаховом пространстве $\mathfrak{Z}$ (т. е. $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{Z})$), $f : [0, T] \to \mathfrak{Z}$ при заданном $T \in (0, +\infty]$. Решением задачи (2.2), (2.3) назовем функцию $z \in C^m([0, T]; \mathfrak{Z})$, для которой выполняются равенства (2.2) и (2.3).

С использованием свойств функции Миттаг-Леффлера и ее производных нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{Z})$, $f \in C([0, T]; \mathfrak{Z})$. Тогда при любом $z_0, \dots, z_k \in \mathfrak{Z}$ существует единственное решение задачи (2.2), (2.3), при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{m,k+1}(At^m) z_k + \int_0^t (t-s)^{m-1} E_{m,m}(A(t-s)^m) f(s)\, ds. \tag{2.4}$$

Пусть Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^m$, оператор $B : Z \to \mathfrak{Z}$, вообще говоря, нелинейный, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2.5}$$

для квазилинейного уравнения

$$z^{(m)}(t) = Az(t) + B(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(m-1)}(t)). \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. Более естественным было бы рассматривать уравнение (2.6) с оператором $A = 0$, поскольку оператор B зависит в том числе и от самой искомой функции z. Однако для использования полученных результатов при рассмотрении квазилинейного вырожденного уравнения понадобится именно такая постановка задачи.

Решением задачи (2.5), (2.6) *на промежутке* $[t_0, t_1]$ называется функция $z \in C^m([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$, для которой выполняются условия (2.5), $(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(m-1)}(t)) \in Z$ для $t \in [t_0, t_1]$ и верно равенство (2.6).

Стандартным образом доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{Z})$, $B \in C(Z; \mathfrak{Z})$, $(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in Z$. Тогда функция $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$ является решением задачи* (2.5), (2.6) в том и только в том случае, когда при $t \in [t_0, t_1]$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t-t_0)^k E_{m,k+1}(A(t-t_0)^m) z_k + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{m-1} E_{m,m}(A(t-s)^m) B(s, z(s), z^{(1)}(s), \dots, z^{(m-1)}(s))\, ds. \tag{2.7}$$

Здесь и далее черта над символом означает, что речь идет о наборе m элементов с индексами от нуля до $m-1$, например $\bar{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$. Пусть Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^m$, $S_\delta(\bar{z}) = \{\bar{y} \in \mathfrak{Z}^m : \|y_k - z_k\|_{\mathfrak{Z}} \le \delta, k = 0, \dots, m-1\}$. Отображение $B : Z \to \mathfrak{Z}$ будем называть *локально липшицевым по* z, если для любой точки $(t_0, \bar{z}) \in Z$ найдутся такие $\delta > 0$, $l > 0$, при которых $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times S_\delta(\bar{z}) \subset Z$ и при всех $(t, \bar{y}), (t, \bar{v})$ из множества $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times S_\delta(\bar{z})$ выполняется неравенство

$$\|B(t, \bar{y}) - B(t, \bar{v})\|_{\mathfrak{Z}} \le l \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - v_k\|_{\mathfrak{Z}}.$$

Теорема 2.2. *Пусть $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{Z})$, $m \in \mathbb{N}$, Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^m$, отображение $B \in C(Z; \mathfrak{Z})$ локально липшицево по z. Тогда для любых $(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in Z$ существует такое $t_1 > t_0$, что задача* (2.5), (2.6) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Согласно утверждению леммы 2.1 достаточно показать, что уравнение (2.7) имеет единственное решение $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$ для некоторого $t_1 > t_0$.

В силу открытости множества Z можно выбрать $\tau > 0$ и $\delta > 0$ так, что $V = [t_0, t_0 + \tau] \times S_\delta(\bar{z}) \subset Z$, где вектор $\bar{z}$ составлен из заданных в (2.5) элементов $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$. Обозначим через S множество всех функций $y \in C^{m-1}([t_0, t_0 + \tau]; \mathfrak{Z})$ таких, что выполняются неравенства $\|y^{(k)}(t) - z_k\|_{\mathfrak{Z}} \le \delta$

при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Зададим на S метрику $d(y, v) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \sup\limits_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \|y^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)\|_{\mathfrak{Z}}$ и получим полное метрическое пространство S. Используя стандартную технику, можно показать, что оператор G, определенный в S правой частью уравнения (2.7), при достаточно малом $\tau > 0$ отображает S в себя и является в нем строгим сжатием. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть* $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{Z})$, $m \in \mathbb{N}$, Z *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^m$, $n \in \mathbb{N}$, *отображение* $B \in C^n(Z; \mathfrak{Z})$ *локально липшицево по* z. *Тогда для любых* $(t_0, z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}) \in Z$ *существует решение* $z \in C^{m+n}([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$ *задачи* (2.5), (2.6) *при некотором* $t_1 > t_0$.

Доказательство. Имея возможность дифференцирования правой части уравнения (2.6), получаем дополнительную дифференцируемость его левой части, т. е. дополнительную гладкость решения. Это, в свою очередь, дает право дифференцировать правую часть еще раз на следующем шаге рассуждений. Цепочка рассуждений оборвется, когда справа старшая производная от B будет иметь порядок n. При этом в левой части равенства будет получена производная от функции z порядка $m + n$. $\square$

3. Вырожденное линейное неоднородное уравнение

Для исследования вырожденного уравнения будем использовать результаты теории вырожденных полугрупп операторов, доказательства которых можно найти в [2, с. 89–91, 95].

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $\mathscr{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{X}$, действующих в $\mathfrak{Y}$, обозначим через $\mathscr{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Если $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$, то обозначения будут иметь вид $\mathscr{L}(\mathfrak{X})$ и $\mathscr{C}l(\mathfrak{X})$ соответственно. Через D_M будем обозначать область определения оператора M, снабженную нормой его графика $\|\cdot\|_{D_M} = \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|M\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$.

Пусть $L \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$ оператора M и его L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \backslash \rho^L(M)$, а также положим $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$, $L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор M называется (L, σ)-*ограниченным*, если его L-спектр $\sigma^L(M)$ является ограниченным множеством, т. е.

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Лемма 3.1 [2, с. 89, 90]. *Пусть оператор* M (L, σ)*-ограничен,* $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. *Тогда проекторами являются операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R^L_\mu(M)\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma L^L_\mu(M)\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathfrak{Y}). \tag{3.1}$$

Положим $\mathfrak{X}^0 = \ker P$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Q$; $\mathfrak{X}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{X}^k$ $(D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{X}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 3.1 [2, с. 90, 91]. *Пусть оператор* M (L, σ)*-ограничен. Тогда*
(i) $M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}^1; \mathfrak{Y}^1)$, $M_0 \in \mathscr{C}l(\mathfrak{X}^0; \mathfrak{Y}^0)$, $L_k \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $H = M_0^{-1} L_0$. При $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L, p)-*ограниченным*, если он (L, σ)-ограничен, $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} = \mathbb{O}$.

Лемма 3.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, *оператор* M (L,σ)*-ограничен,* $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$,
$$X_{m,n}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)E_{m,n}(\mu t^m)\,d\mu, \quad t \geq 0.$$
Тогда для любого $t \geq 0$
$$X_{m,n}(t)P = PX_{m,n}(t) = X_{m,n}(t).$$

Доказательство. Возьмем контуры $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, $\gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r + 1\}$, тогда
$$X_{m,n}(t)P = PX_{m,n}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{\gamma_1} R^L_\lambda(M)R^L_\mu(M)E_{m,n}(\mu t^m)\,d\mu d\lambda$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma} R^L_\mu(M)E_{m,n}(\mu t^m)\,d\mu\int\limits_{\gamma_1}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu}$$
$$-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1} R^L_\lambda(M)\,d\lambda\int\limits_{\gamma}\frac{E_{m,n}(\mu t^m)\,d\mu}{\lambda-\mu} = X_{m,n}(t). \quad \square$$

Отсюда очевидным образом получаем

Следствие 3.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, *оператор* M (L,σ)*-ограничен. Тогда* $\mathfrak{X}^0 \subset \ker X_{m,n}(t)$, $\operatorname{im} X_{m,n}(t) \subset \mathfrak{X}^1$ *для любого* $t \geq 0$.

Лемма 3.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, *оператор* M (L,σ)*-ограничен. Тогда* $X_{m,n}(t) = E_{m,n}(L_1^{-1}M_1 t^m)P$ *при любом* $t \geq 0$.

Доказательство. По теореме 3.1 $S_1 \equiv L_1^{-1}M_1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}^1)$. Для $t \geq 0$ в силу леммы 3.2 и интегральной формулы Коши имеем
$$X_{m,n}(t) = X_{m,n}(t)P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\mu I - S_1)^{-1}PE_{m,n}(\mu t^m)\,d\mu$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}S_1^kP\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l t^{ml}}{(ml+n-1)!}\,d\mu = E_{m,n}(S_1t^m)P. \quad \square$$

Решением задачи Коши
$$\frac{d^m}{dt^m}Lx(t) = Mx(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.2}$$
$$x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{3.3}$$
называется функция $x \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{X}) \cap C([0,T];D_M)$, для которой $Lx \in C^m([0,T];\mathfrak{Y})$, при этом для всех $t \in [0,T]$ выполняются равенство (3.2) и условия (3.3).

Следующее утверждение доказывается непосредственно.

Лемма 3.4. *Пусть оператор* $H \in \mathscr{L}(\mathfrak{X})$ *нильпотентен степени* $p \in \mathbb{N}_0$, $H^kg \in C^{mk}([0,T];\mathfrak{X})$, $k = 0, 1, \dots, p$. *Тогда существует единственное решение уравнения*
$$\frac{d^m}{dt^m}Hx(t) = x(t) + g(t), \tag{3.4}$$
при этом оно имеет вид
$$x(t) = -\sum_{k=0}^{p}\frac{d^{mk}}{dt^{mk}}H^kg(t). \tag{3.5}$$

Теорема 3.2. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $Qf \in C([0,T];\mathfrak{Y})$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in C^{mk}([0,T];\mathfrak{X})$ *при* $k=0,1,\dots,p$,

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{d^{mk+l}}{dt^{mk+l}} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t) = -(I-P)x_l, \quad l=0,1,\dots,m-1. \tag{3.6}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3.2), (3.3), *при этом оно имеет вид*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k X_{m,k+1}(t)x_k + \int_0^t (t-s)^{m-1} X_{m,m}(t-s) L_1^{-1} Qf(s)\,ds \\ - \sum_{k=0}^{p} \frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t). \tag{3.7}$$

Доказательство. Обозначим $w(t) \equiv (I-P)x(t)$, $v(t) \equiv Px(t)$. В силу теоремы 3.1 имеем

$$\frac{d^m}{dt^m} Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)f(t), \quad H \equiv M_0^{-1}L_0, \tag{3.8}$$

$$\frac{d^m}{dt^m} v(t) = S_1 v(t) + h(t), \quad S_1 \equiv L_1^{-1}M_1, \quad h(t) = L_1^{-1}Qf(t). \tag{3.9}$$

Согласно лемме 3.4 существует единственное решение уравнения (3.8)

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Отсюда следует необходимость условий согласования (3.6) этого решения с начальными данными из условий (3.3).

В силу теоремы 3.1 оператор S_1 принадлежит $\mathscr{L}(\mathfrak{X}^1)$. Поэтому из теоремы 2.1 следует существование единственного решения задачи Коши $v^{(k)}(0) = Px_k$, $k=0,1,\dots,m-1$, для уравнения (3.9), при этом оно имеет вид

$$v(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{m,k+1}(S_1 t^m)Px_k + \int_0^t (t-s)^{m-1} E_{m,m}(S_1(t-s)^m)h(s)\,ds.$$

Ссылка на лемму 3.3 завершает доказательство. □

Для уравнения (3.2) рассмотрим также часто возникающую в приложениях при рассмотрении вырожденных эволюционных уравнений обобщенную задачу Шоуолтера — Сидорова [14, 15]

$$P(x^{(k)}(0) - x_k) = 0, \quad k=0,1,\dots,m-1. \tag{3.10}$$

Теорема 3.3. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $Qf \in C([0,T];\mathfrak{Y})$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in C^{mk}([0,T];\mathfrak{X})$ *при* $k=0,1,\dots,p$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.2), (3.10), *при этом оно имеет вид* (3.7).

Доказательство аналогично предыдущему. Особенность обобщенного условия Шоуолтера — Сидорова заключается в том, что в начальный момент времени учитываются значения лишь проекций решения x на подпространство $\mathfrak{X}^1$ и его производных и, таким образом, нет необходимости в выполнении условий согласования (3.6).

4. Квазилинейное вырожденное уравнение высокого порядка

Рассмотрим квазилинейное эволюционное уравнение

$$\frac{d^m}{dt^m}Lx(t) = Mx(t) + N(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(m-1)}(t)) \tag{4.1}$$

с операторами $L \in \mathscr{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, нелинейным оператором $N : Y \to \mathfrak{Y}$, где Y — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$.

Решением обобщенной задачи Шоуолтера — Сидорова (3.10), (4.1) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ назовем такую функцию $x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{X}) \cap C([t_0, t_1]; D_M)$, удовлетворяющую условиям (3.10), что $(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(m-1)}(t)) \in Y$, $Lx \in C^m([t_0, t_1]; \mathfrak{Y})$ при всех $t \in [t_0, t_1]$ и справедливо равенство (4.1).

Теорема 4.1. *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L, p)-ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $V = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m$, для всех $(t, y_0, \ldots, y_{m-1}) \in Y$ таких, что $(t, Py_0, \ldots, Py_{m-1}) \in Y$, выполняется*

$$N(t, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}) = N(t, Py_0, Py_1, \ldots, Py_{m-1}),$$

отображение $QN \in C^{\max\{0,mp-1\}}(V; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по x и $H^k M_0^{-1}(I - Q)N \in C^{mk}(V; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \ldots, p$. Тогда для любых $(t_0, x_0, \ldots, x_{m-1}) \in V$ существует такое $t_1 > t_0$, что задача (3.10), (4.1) *имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.*

Доказательство. Пусть топология на Y определяется, например, нормой $\|(t, \bar{y})\|_{\mathbb{R}\times\mathfrak{X}^m} = |t| + \sum\limits_{k=0}^{m-1} \|y_k\|_{\mathfrak{X}}$. Для $(t_0, \bar{x}) \in V$ возьмем окрестность

$$O_\delta(t_0, \bar{x}) = \left\{(t, \bar{y}) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m : |t - t_0| + \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - x_k\|_{\mathfrak{X}} < \delta\right\},$$

лежащую в Y. Так как P — нетривиальный проектор, то $\|P\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{X})} \geq 1$. Тогда для любого $(t, \bar{y}) \in O_{\delta\|P\|^{-1}_{\mathscr{L}(\mathfrak{X})}}(t_0, \bar{x}) \subset Y$ имеем

$$|t - t_0| + \sum_{k=0}^{m-1} \|P(y_k - x_k)\|_{\mathfrak{X}} \leq |t - t_0| + \|P\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{X})} \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - x_k\|_{\mathfrak{X}} < \delta,$$

поэтому $(t, Py_0, Py_1, \ldots, Py_{m-1}) \in O_\delta(t_0, \bar{x}) \subset Y$. Следовательно, существует такая окрестность в Y точки $(t_0, \bar{x}) \in V$, что $(t, Py_0, Py_1, \ldots, Py_{m-1}) \in Y$ для всякого ее элемента $(t_0, \bar{y})$.

Как и при доказательстве теоремы 3.2, поочередно домножим (4.1) слева на непрерывные операторы $L_1^{-1}Q$ и $M_0^{-1}(I - Q)$ и получим задачу

$$\begin{gathered} v^{(m)}(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1}QN(t, v(t), v^{(1)}(t), \ldots, v^{(m-1)}(t)), \\ v^{(k)}(t_0) = Px_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\frac{d^m}{dt^m}Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)N(t, v(t), v^{(1)}(t), \ldots, v^{(m-1)}(t)) \tag{4.3}$$

для пары функций $v(t) = Px(t)$, $w(t) = (I - P)x(t)$. Здесь, как и выше, использованы обозначения $S_1 = L_1^{-1}M_1$, $H = M_0^{-1}L_0$. Задача (4.2) в силу теоремы 2.3 имеет единственное решение $v \in C^{\max\{m, m(p+1)-1\}}([t_0, t_1]; \mathfrak{X}^1)$ при некотором

$t_1 > t_0$, поскольку множество V открыто, оператор S_1 ограничен по теореме 3.1, а отображение $L_1^{-1}QN \in C^{\max\{0,mp-1\}}(V;\mathfrak{X})$ локально липшицево по x в силу условий данной теоремы.

Зная v, используя нильпотентность оператора H и формулу (3.5), найдем решение

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1}(I-Q)N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t)) \tag{4.4}$$

уравнения (4.3), где $\frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1}(I-Q)N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t))$ — полная производная по переменной t mk-го порядка соответствующего отображения $t \to H^k M_0^{-1}(I-Q)N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t))$. Таким образом, существует решение $x = v + w$ исходной задачи. $\square$

В отличие от рассмотренной обобщенной задачи Шоуолтера — Сидорова задача Коши

$$x^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{4.5}$$

для изучаемого класса уравнений, как и в линейном случае, требует условия согласования начальных данных с правой частью уравнения. Под решением задачи (4.1), (4.5) на отрезке $[t_0, t_1]$ будем понимать такую функцию $x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{X}) \cap C([t_0, t_1]; D_M)$, удовлетворяющую условиям (4.5), что $(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \in Y$, $Lx \in C^m([t_0, t_1]; \mathfrak{Y})$ при всех $t \in [t_0, t_1]$ и выполняется (4.1).

Теорема 4.2. *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L, p)-ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $V = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m$, для всех $(t, y_0, \dots, y_{m-1}) \in Y$ таких, что $(t, Py_0, \dots, Py_{m-1}) \in Y$, выполняется*

$$N(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) = N(t, Py_0, Py_1, \dots, Py_{m-1}),$$

отображение $QN \in C^{\max\{0, m(p+1)-2\}}(V; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по переменной x, отображение $H^k M_0^{-1}(I-Q)N$ принадлежит $C^{mk+m-1}(V; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \dots, p$ и для $(t_0, x_0, \dots, x_{m-1}) \in V$ при $n = 0, 1, \dots, m-1$ выполняются равенства

$$(I-P)x_n = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^{mk+n}}{dt^{mk+n}}\bigg|_{t=t_0} H^k M_0^{-1}(I-Q)N(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t)),$$

где $v \in C^{\max\{m, m(p+2)-2\}}([t_0, t_1]; \mathfrak{X}^1)$ — решение задачи (4.2). Тогда задача (4.1), (4.5) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство почти не отличается от предыдущего. Заметим лишь, что условие согласования означает в точности выполнение условий, соответствующих условиям (4.5) в начальный момент времени для решения (4.4) уравнения (4.3). Для проверки этих условий понадобятся производные от функции v до порядка $m(p+2)-2$, а не до порядка $m(p+1)-1$, как в теореме 4.1. По тем же причинам отображение $H^k M_0^{-1}(I-Q)N$ должно быть класса $C^{mk+m-1}(V; \mathfrak{Y})$, а не $C^{mk}(V; \mathfrak{Y})$. $\square$

В теоремах 4.1, 4.2 добавление в уравнение (4.1) слагаемого $f(t)$ не изменит ситуации, так как новый оператор $N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) + f(t)$ будет удовлетворять всем условиям этих теорем при достаточно гладкой функции f, если им удовлетворял оператор N. В рассматриваемой далее ситуации это не так, поскольку используется условие $\operatorname{im} N \subset \mathfrak{Y}^1$. В этом случае имеет смысл рассмотреть уравнение

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = Mx(t) + N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) + f(t). \tag{4.6}$$

Теорема 4.3. *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $V = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m$, отображение $N \in C(Y; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по x, $\operatorname{im} N \subset \mathfrak{Y}^1$, $Qf \in C(\mathbb{R}; \mathfrak{Y})$ и $H^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{mk+m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда для любого $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in Y$ существует такое $t_1 > t_0$, что задача* (3.10), (4.6) *имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.*

Доказательство. Если $\operatorname{im} N \subset \mathfrak{Y}^1$, то $(I-Q)N \equiv 0$, $QN \equiv N$. В этом случае уравнение (4.6) после действия на обе его части оператора $M_0^{-1}(I-Q)$ принимает вид

$$\frac{d^m}{dt^m} Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)f.$$

В силу нильпотентности оператора H это уравнение согласно лемме 3.3 имеет единственное решение

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^{mk}}{dt^{mk}} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Учитывая, что $x(t) = v(t) + w(t)$, остается с помощью теоремы 3.2 показать однозначную разрешимость задачи

$$\begin{gathered} v^{(m)}(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1} Qf(t) \\ + L_1^{-1} N(t, v(t) + w(t), v^{(1)}(t) + w^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t) + w^{(m-1)}(t)), \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$v^{(k)}(t_0) = Px_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

получаемой из задачи (3.10), (4.6) с помощью действия оператора $L_1^{-1}Q$. При этом учитывается, что в правой части уравнения нелинейный оператор

$$\begin{aligned} &B(t, v(t), v^{(1)}(t), \dots, v^{(n)}(t)) \\ &= L_1^{-1} N(t, v(t) + w(t), v^{(1)}(t) + w^{(1)}(t), \dots, v^{(m-1)}(t) + w^{(m-1)}(t)) + L_1^{-1} Qf(t) \end{aligned}$$

непрерывен, а также локально липшицев по v в силу условий теоремы. □

Теорема 4.4. *Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $V = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^1)^m$, отображение $N \in C(Y; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по x, $\operatorname{im} N \subset \mathfrak{Y}^1$, $Qf \in C(\mathbb{R}; \mathfrak{Y})$ и $H^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{mk+m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{X})$ при $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда для заданных $(t_0, x_0, \dots, x_{m-1}) \in Y$, при $n = 0, 1, \dots, m-1$ удовлетворяющих равенствам*

$$(I-P)x_n = -\sum_{k=0}^{p} \left. \frac{d^{mk+n}}{dt^{mk+n}} \right|_{t=t_0} H^k M_0^{-1}(I-Q)f(t), \tag{4.8}$$

существует такое $t_1 > t_0$, что задача (4.5), (4.6) *имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.*

Доказательство. При проводимых в доказательстве предыдущей теоремы рассуждениях для рассматриваемой в данном случае задачи Коши появятся дополнительные условия согласования (4.8) так же, как при доказательстве теоремы 4.2. □

Замечание 4.1. В приложениях, когда оператор M (L, p)-ограничен, он часто является не замкнутым, а непрерывным: $M \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. В этом случае естественным было бы рассматривать уравнение

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = R(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)). \tag{4.9}$$

Однако в теоремах 4.1–4.4 вся структура вырожденного уравнения и соответственно условия теорем о разрешимости начальных задач для него определяются наличием (L, p)-ограниченности оператора M, т. е. взаимным соответствием двух операторов L и M. Поэтому предложенный метод исследования для уравнения (4.9) не подходит. Но, с другой стороны, появляется возможность исследования этого уравнения с помощью подбора такого оператора $M \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, что при переходе к уравнению (4.1) с нелинейным оператором $N(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) = R(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) - My_0$ условия теоремы о разрешимости выполняются.

5. Один случай слабого вырождения

В разд. 4 существенно использовалось либо условие независимости нелинейного оператора от элементов из $\mathfrak{X}^0$, либо условие принадлежности образа нелинейного оператора подпространству $\mathfrak{Y}^1$. Рассмотрим случай другого ограничения на нелинейность при слабом вырождении уравнения ($p = 0$). Именно, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^m}{dt^m} Lx(t) = Mx(t) + N(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(m-1)}), \tag{5.1}$$

где по-прежнему $L \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $N : Y \to \mathfrak{Y}$, Y — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$. Через $[(I-Q)N]'_{x_{m-1}}(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$ обозначим производную Фреше оператора $(I-Q)N$ по последнему аргументу в точке $(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in Y$. Для краткости обозначим также $P_0 \equiv I - P$.

Теорема 5.1. *Пусть оператор M $(L, 0)$-ограничен, множество Y открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^m$, $W = Y \cap (\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^0)^m)$ открыто в $\mathbb{R} \times (\mathfrak{X}^0)^m$, отображение $QN \in C(Y; \mathfrak{Y})$ локально липшицево по x, $(I-Q)N \in C^1(Y; \mathfrak{Y})$, для всех $(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) \in Y$ таких, что $(t, P_0 z_0, P_0 z_1, \dots, P_0 z_{m-1}) \in Y$, выполняется равенство*

$$N(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) = N(t, P_0 z_0, P_0 z_1, \dots, P_0 z_{m-1}),$$

отображение $[(I-Q)N]'_{x_{m-1}}(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) : \mathfrak{X}^0 \to \mathfrak{X}^0$ является биекцией при всех $(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$ из окрестности точки $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in Y$ и $(I-P)x_0 + M_0^{-1}(I-Q)N(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = 0$. Тогда существует такое $t_1 > t_0$, что задача (4.5), (5.1) *имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.*

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4.1, вместо (4.3) получим уравнение

$$0 = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)N(t, w(t), w^{(1)}(t), \dots, w^{(m-1)}(t)).$$

Оно разрешимо относительно $w^{(m-1)}$ при t из некоторого интервала $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ по теореме о неявной функции в силу существования обратного оператора $\left(M_0^{-1}[(I-Q)N]'_{x_{m-1}}(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1})\right)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}^0)$. Получим уравнение

$w^{(m-1)}(t) = G(t, w(t), w^{(1)}(t), \dots, w^{(m-2)}(t))$ с непрерывно дифференцируемым отображением G по совокупности переменных. Из теоремы 2.2 следует существование решения задачи $w^{(k)}(t_0) = (I-P)x_k$, $k = 0, 1, \dots, m-2$, для последнего уравнения. Остается установить разрешимость задачи для линейного неоднородного уравнения

$$v^{(m)}(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1} Q N(t, w(t), w^{(1)}(t), \dots, w^{(m-1)}(t)),$$
$$v^{(k)}(t_0) = P x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

6. Начально-краевая задача для уравнения движения жидкости Кельвина — Фойгта

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим систему уравнений

$$a(1-\mu_1\Delta)z_{tt} + (b-\mu_2\Delta)z_t - \mu_3\Delta z + a^2(z_t\cdot\nabla)z_t + b^2(z\cdot\nabla)z \\ + ab[(z_t\cdot\nabla)z + (z\cdot\nabla)z_t] + r(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega\times[t_0,T], \tag{6.1}$$

$$\nabla\cdot z = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times[t_0,T], \tag{6.2}$$

с граничным условием

$$z(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[t_0,T], \tag{6.3}$$

и начальными условиями

$$z(x,0) = \psi_0(x), \quad z_t(x,0) = \psi_1(x), \quad x\in\Omega, \tag{6.4}$$

которая описывает движение жидкости Кельвина — Фойгта порядка $L = 1$ (система уравнений (0.47) в [13]). Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ — функция памяти от вектора скорости, задаваемая интегралом Вольтерра от него, $r = \nabla p$ — градиент давления жидкости. Константы $a, b, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ и функция $f : \overline{\Omega}\times[t_0,T]\to\mathbb{R}^3$ известны.

Введем обозначения $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathscr{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla\cdot v = 0\}$. Замыкание линеала $\mathscr{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $\mathbb{L}_2$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ соответствующий ортопроектор вдоль $\mathbb{H}_\sigma$, $\Sigma = I - \Pi$. Также будут использоваться пространства $\mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^3$, $\mathbb{H}^1_\sigma$ — замыкание $\mathscr{L}$ в норме $\mathbb{H}^1$, $\mathbb{H}^2 = (H^2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}^2_\sigma = \mathbb{H}^1_\sigma \cap \mathbb{H}^2$.

Линейный замкнутый оператор $A : \mathbb{H}_\sigma \to \mathbb{H}_\sigma$, действующий на $\mathbb{H}^2_\sigma$ по правилу $A = \Sigma\Delta$, как известно [16], имеет дискретный конечнократный спектр, сгущающийся лишь на $-\infty$.

Условие (6.3) и уравнение (6.2) означают, что можно ограничиться поиском вектор-функций z со значениями $z(\cdot,t)$ в подпространстве $\mathbb{H}^2_\sigma$. Положим

$$\mathfrak{X} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathfrak{Y} = \mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{H}_\pi. \tag{6.5}$$

В этих пространствах задачу (6.1)–(6.4) можно свести к задаче (3.10), (4.1) с помощью операторов

$$L = \begin{pmatrix} a(1-\mu_1 A) & 0 \\ -a\mu_1\Pi\Delta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \mu_3 A & 0 \\ \mu_3\Pi\Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y}). \tag{6.6}$$

Нелинейный оператор задается формулой

$$N(t, z, r, z_t, r_t) = -(b-\mu_2\Delta)z_t - a^2(z_t\cdot\nabla)z_t - b^2(z\cdot\nabla)z \\ - ab[(z_t\cdot\nabla)z + (z\cdot\nabla)z_t] + f(x,t). \tag{6.7}$$

Лемма 6.1. *Пусть пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ определены в* (6.5), *а операторы* L *и* M — *формулами* (6.6), $\mu_1 \neq 0$, $\mu_1^{-1} \notin \sigma(A)$. *Тогда оператор* M $(L, 0)$-*ограничен, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mu_3 \Pi\Delta(1-\mu_1 A)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mu_1 \Pi\Delta(1-\mu_1 A)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Доказательство. Для любого $v \in \mathbb{H}_\sigma$ при $|\mu| > \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\mu_3\lambda_k|}{|a(1-\mu_1\lambda_k)|}$

$$\|(\mu a - (\mu a\mu_1 + \mu_3)A)^{-1} v\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(1+\lambda_k^2\big)|\langle v, \varphi_k\rangle|^2}{|\mu a - (\mu a\mu_1 + \mu_3)\lambda_k|^2}$$
$$\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, \varphi_k\rangle|^2 = C_1 \|v\|_{\mathbb{H}_\sigma},$$

поэтому $(\mu a - (\mu a\mu_1 + \mu_3)A)^{-1} \in \mathscr{L}\big(\mathbb{H}_\sigma; \mathbb{H}^2_\sigma\big)$. При таких $\mu \in \mathbb{C}$ оператор

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu a - (\mu a\mu_1 + \mu_3)A)^{-1} & 0 \\ (\mu a\mu_1 \Pi\Delta + \mu_3 \Pi\Delta)(\mu a - (\mu a\mu_1 + \mu_3)A)^{-1} & I \end{pmatrix}$$

непрерывно действует из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$. Таким образом, оператор M (L, σ)-ограничен, при этом

$$R^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} (\mu a - (\mu a\mu_1 + \mu_3)A)^{-1} a(1-\mu_1 A) & 0 \\ (\mu a\mu_1 \Pi\Delta + \mu_3 \Pi\Delta)(\mu a - (\mu a\mu_1 + \mu_3)A)^{-1} a(1-\mu_1 A) & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} a(1-\mu_1 A)(\mu a - (\mu a\mu_1 + \mu_3)A)^{-1} & 0 \\ -a\mu_1 \Pi\Delta(\mu a - (\mu a\mu_1 + \mu_3)A)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда с помощью интегралов Коши (3.1) вычисляются формулы для проекторов (6.8). Так как $L(I-P) = 0$, то $L_0 = 0$, $H = 0$, поэтому оператор M $(L, 0)$-ограничен. $\square$

Теорема 6.1. *Пусть* $\mu_1 \neq 0$, $\mu_1^{-1} \notin \sigma(A)$, $\psi_0, \psi_1 \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $f \in C([0,T]; \mathbb{L}_2)$. *Тогда при некотором* $t_1 \in (0,T]$ *существует единственное решение* $z \in C^2\big([t_0, t_1]; \mathbb{H}^2_\sigma\big)$, $r \in C([t_0, t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ *задачи* (6.1)–(6.4).

Доказательство. Нелинейный оператор (6.7) не зависит от r и r_t, поэтому в силу формулы (6.8) для проектора P удовлетворяет условию теоремы 4.1 о независимости от элементов из $(\mathfrak{X}^0)^m$. Для удобства сократим его обозначение до $N(t, z, z_t)$. Ввиду непрерывного вложения $\mathbb{H}^2$ в пространство $\mathbb{W}^1_4 = \big(W^1_4(\Omega)\big)^3$ при каждом $t \in [t_0, t_1]$ имеем

$$\|N(t,z,z_t)\|_{\mathbb{L}_2} \leq c_1\|z_t\|_{\mathbb{H}^2} + c_2\|z\|^2_{\mathbb{W}^1_4} + c_3\|z\|_{\mathbb{W}^1_4}\|z_t\|_{\mathbb{W}^1_4} + c_2\|z_t\|^2_{\mathbb{W}^1_4} + \|f(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}_2},$$

поэтому $N : [t_0, T] \times \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}^2_\sigma \to \mathbb{L}_2$. Непрерывность этого оператора так же легко доказывается с помощью теорем вложения. В силу леммы 6.1 и по теореме 4.1 получим требуемое. $\square$

Замечание 6.1. Отметим, что методы работы [12], используемые при исследовании неполных вырожденных полулинейных эволюционных уравнений второго порядка, не позволяют исследовать задачу (6.1)–(6.4), поскольку система уравнений в данном случае содержит производные первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
3. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
4. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002.
5. *Кожанов А. И.* О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 359–376.
6. *Кожанов А. И.* Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 70–75.
7. *Кайкина Е. И., Наумкин П. И., Шишмарёв И. А.* Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 1. С. 61–114.
8. *Свиридюк Г. А.* Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 4. С. 828–831.
9. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 442–450.
10. *Федоров В. Е., Давыдов П. Н.* О нелокальных решениях полулинейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 3. С. 338–347.
11. *Федоров В. Е., Давыдов П. Н.* Полулинейные вырожденные эволюционные уравнения и нелинейные системы гидродинамического типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 267–270.
12. *Замышляева А. А., Бычков Е. В.* Фазовое пространство модифицированного уравнения Буссинеска // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2012. № 18. С. 13–19.
13. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
14. *Showalter R. E.* Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type // SIAM J. Math. Anal. 1975. V. 6, N 1. P. 25–42.
15. *Сидоров Н. А.* Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 4. С. 569–578.
16. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.

Статья поступила 16 июня 2014 г., окончательный вариант — 25 марта 2015 г.

Плеханова Марина Васильевна
Челябинский гос. университет, лаборатория квантовой топологии,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Южно-Уральский гос. университет
(национальный исследовательский университет),
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080
mariner79@mail.ru