Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 512.542

О СТУПЕНЧАТЫХ СВОЙСТВАХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. Го, А. Н. Скиба

Аннотация. Пусть A — подгруппа группы G и θ — некоторое теоретико-групповое свойство подгрупп. Будем говорить, что A *ступенчато* обладает свойством θ в G, если G имеет такой нормальный ряд $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$, что для каждого $i = 1, \dots, t$ подгруппа $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ обладает свойством θ в G/G_{i-1}. На основе данного понятия получены новые характеризации конечных сверхразрешимых и разрешимых групп.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: конечная группа, подгрупповой функтор, ступенчатое свойство, разрешимая группа, сверхразрешимая группа.

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны, и G всегда обозначает конечную группу. Подгруппы A и B из G называются X-*перестановочными*, если по крайней мере для одного $x \in X \subseteq G$ имеем $AB^x = B^x A$ [1]. В этом случае также говорим, что A X-*перестановочна* с B. 1-Перестановочные подгруппы называются *перестановочными*.

Каждой группе G сопоставим некоторое множество ее подгрупп $\theta(G)$. Если $A \in \theta(G)$, то говорим, что A является θ-*подгруппой* в G или A обладает *свойством* θ в G. Будем говорить, что θ является *подгрупповым функтором*, если для всякого изоморфизма $\tau : G \to G^*$ и каждой θ-подгруппы A из G $\tau(A)$ является θ-подгруппой в G^*.

Определение 1.1. Если G имеет нормальный ряд

$$\Gamma : 1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$$

такой, что

$$(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1} \in \theta(G/G_{i-1})$$

для каждого $i = 1, \dots, t$, то говорим, что A Γ-*ступенчато обладает свойством* θ (или просто A *ступенчато обладает свойством* θ) в G.

Таким образом, будем говорить, например, что подгруппа A из G является Γ-*ступенчато перестановочной* с силовской p-подгруппой из G, Γ-*ступенчато*

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке NNSF-гранта Китая (грант № 11371335) и Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics, USTC, Chinese Academy of Sciences, работа второго автора — при финансовой поддержке Chinese Academy of Sciences Visiting Professorship for Senior International Scientists (грант № 2010T2J12).

субнормальной в G, Γ-*ступенчато нильпотентной*, если $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ перестановочна с силовской p-подгруппой из G/G_{i-1}, $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ субнормальна в G/G_{i-1}, $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ нильпотентна соответственно для каждого $i = 1, \ldots, t$.

Очевидно, что в случае, когда $A \in \theta(G)$, A ступенчато обладает свойством θ в G. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1.2. Каждая подгруппа сверхразрешимой группы G ступенчато нормальна, поэтому она ступенчато перестановочна со всеми подгруппами из G. Каждая подгруппа разрешимой группы G ступенчато субнормальна, каждая силовская подгруппа и каждая максимальная подгруппа из G ступенчато нормальны.

Пример 1.3. Каждая ступенчато нильпотентная (циклическая) подгруппа A из G разрешима (сверхразрешима соответственно), см. ниже доказательство леммы 3.2.

Пример 1.4. Напомним, что подгруппа H из G называется *CAP-подгруппой* (см. [2, с. 37]), если H либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор из G; *частичной CAP-подгруппой* [3, 4], если H либо покрывает, либо изолирует каждый фактор некоторого главного ряда из G. Нетрудно показать, что H тогда и только тогда является ступенчато CAP-подгруппой в G, когда она является частичной CAP-подгруппой в G. Более того, H тогда и только тогда ступенчато нормальна в G, когда она является ступенчато CAP-подгруппой в G.

Собственная подгруппа A из G называется *$\cap$-неразложимой* [5] или *примитивной* [6], если A не может быть записана как пересечение некоторых подгрупп из G, содержащих A в качестве собственной подгруппы. Очевидно, что каждая максимальная подгруппа из G является $\cap$-неразложимой подгруппой в G.

Нам понадобится следующий

Пример 1.5. Пусть $p > q$ — простые числа и $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle c \rangle$, где $|a| = |c| = p$, $|b| = q$ и $A = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$ — неабелева группа порядка pq. Тогда G является сверхразрешимой группой, поэтому подгруппа $E = \langle ac \rangle$ ступенчато нормальна в G. Более того, E $\cap$-неразложима и не перестановочна с любой подгруппой порядка q из G.

Многие известные результаты могут быть обобщены в терминах ступенчатых свойств. Результаты данной работы служат частичной иллюстрацией этого.

Классический результат Томпсона утверждает, что G является разрешимой группой, если G имеет нильпотентную максимальную подгруппу нечетного порядка. Нашим первым наблюдением является следующая «ступенчатая» модификация этого результата.

Теорема А. *Тогда и только тогда G является разрешимой группой, когда некоторая максимальная подгруппа M из G ступенчато нильпотентна и 2-силовская подгруппа из M ступенчато абелева в G.*

Напомним, что цепь $M_t < \cdots < M_2 < M_1 < G_0 = G$, где M_{i+1} — максимальная подгруппа в M_i для всех $i = 0, \ldots, t-1$, называется *максимальной цепью* длины t в G.

Большое число известных результатов основываются на строгом условии для подгрупп: покрывает или изолирует главные факторы группы. Известно (см., например, [7, 8]), что если каждая максимальная подгруппа из G является (частичной) CAP-подгруппой в G или если каждая вторая максимальная подгруппа из G является (частичной) CAP-подгруппой в G, то G разрешима. Заметим, что в группе A_4 каждая подгруппа L порядка 2 является второй максимальной подгруппой и L не является частичной CAP-подгруппой в A_4.

Тем не менее справедлива

Теорема B. *Тогда и только тогда G является разрешимой группой, когда для некоторого фиксированного $0 < n \leq 3$ каждая максимальная цепь длины n из G содержит собственную ступенчато субнормальную подгруппу из G.*

Джонсон [6] доказал, что в случае, когда индекс $|G : X|$ всякой $\cap$-неразложимой подгруппы X из G является степенью простого числа, G сверхразрешима. Пример 1.5 показывает, что в общем случае обратное утверждение неверно. Заметим также, что если $|G : A|$ — степень простого числа, то, очевидно, подгруппа A G-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G. Эти два замечания являются мотивацией для следующих результатов.

Теорема C. *Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда каждая $\cap$-неразложимая подгруппа из G ступенчато G-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G.*

Следствие 1.6 [6]. *Если индекс каждой $\cap$-неразложимой подгруппы из G в G является степенью простого числа, то G сверхразрешима.*

Теорема D. *Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда G содержит сверхразрешимое p-дополнение для некоторого простого числа p и каждая $\cap$-неразложимая подгруппа A из G, индекс которой $|G : A|$ не является степенью p, ступенчато перестановочна с некоторой силовской p-подгруппой и с некоторым p-дополнением в G.*

Следствие 1.7 [9]. *Пусть G имеет сверхразрешимое p-дополнение. Если индекс $|G : X|$ любой $\cap$-неразложимой подгруппы X из G является либо p-числом, либо p'-числом, то G сверхразрешима.*

Пример 1.5 также показывает, что обратное утверждение для следствия 1.7 неверно.

2. Основная лемма

Говорим, что подгрупповой функтор θ является *индуктивным*, если для всякой группы G из того, что $A \in \theta(G)$ и $N \trianglelefteq G$, следует, что $AN/N \in \theta(G/N)$, и *наследственным*, если для всякой группы G из того, что $A \in \theta(G)$ и $A \leq E \leq G$, следует, что $A \in \theta(E)$.

Лемма 2.1. *Пусть A Γ-ступенчато обладает свойством θ в G, где*

$$\Gamma : 1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G.$$

(1) *Предположим, что функтор θ индуктивный. Пусть N — нормальная подгруппа из G. Если либо $N \leq G_1$, либо $N \leq A$, либо $\pi(A) \cap \pi(N) = \varnothing$, либо A является холловой подгруппой в G, то AN/N Γ^*-ступенчато обладает свойством θ в G/N, где*

$$\Gamma^* : 1 = G_0N/N \leq G_1N/N \leq \dots \leq G_tN/N = G/N.$$

(2) *Если функтор θ наследственный и $A \leq V \leq G$, то A Γ^{**}-ступенчато обладает свойством θ в V, где*

$$\Gamma^{**} : 1 = G_0 \cap V \leq G_1 \cap V \leq \cdots \leq G_t \cap V = V.$$

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \ldots, t\}$.

(1) Прежде всего заметим, что $AN \cap G_iN = N(A \cap G_i)$. Действительно, если $N \leq A$ или $N \leq G_1$, это очевидно. С другой стороны, если $\pi(A) \cap \pi(N) = \varnothing$, то каждая силовская подгруппа из $A \cap NG_i$ содержится в G_i, поэтому $A \cap NG_i = A \cap G_i$. Следовательно,

$$AN \cap G_iN = N(A \cap G_iN) = N(A \cap G_i).$$

Наконец, если A является холловой подгруппой в G, то

$$AN \cap G_iN = N(A \cap G_iN) = N(A \cap G_i)(A \cap N) = N(A \cap G_i).$$

Пусть

$$\phi : G/G_{i-1} \to (G/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1})$$

— естественный эпиморфизм G/G_{i-1} на $(G/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1})$. Тогда

$$\phi((A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}) = (A \cap G_i)(NG_{i-1}/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1}),$$

поэтому

$$(A \cap G_i)(NG_{i-1}/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1}) \in \theta((G/G_{i-1})/(NG_{i-1}/G_{i-1})),$$

так как подгрупповой функтор θ индуктивный. Следовательно,

$$(A \cap G_i)NG_{i-1}/NG_{i-1} \in \theta(G/(NG_{i-1})),$$

что влечет

$$((A \cap G_i)NG_{i-1}/N)/(NG_{i-1}/N) \in \theta((G/N)/(NG_{i-1}/N)).$$

Значит,

$$((AN/N) \cap (G_iN/N))(G_{i-1}N/N)/(G_{i-1}N/N) \in \theta((G/N)/(G_{i-1}N/N))$$

для всех $i = 1, \ldots, t$. Это показывает, что AN/N Γ^*-ступенчато обладает свойством θ в G/N.

(2) Пусть $f : VG_{i-1}/G_{i-1} \to V/V \cap G_{i-1}$ — канонический изоморфизм. Тогда

$$f((A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}) = (A \cap G_i)(G_{i-1} \cap V)/(G_{i-1} \cap V).$$

С другой стороны, поскольку $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1} \in \theta(G/G_{i-1})$ и функтор θ наследственный, имеем $(A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1} \in \theta(VG_{i-1}/G_{i-1})$. Следовательно,

$$(A \cap G_i)(G_{i-1} \cap V)/(G_{i-1} \cap V) \in \theta(V/G_{i-1} \cap V)$$

для всех $i = 1, \ldots, t$, значит, A Γ^{**}-ступенчато обладает свойством θ в V.

3. Доказательство теорем A и B

Следующая лемма хорошо известна (см. [10, (6.6.3)]).

Лемма 3.1. *Пусть $G = R \rtimes M$. Если M — разрешимая максимальная подгруппа в G, то R является абелевой группой.*

Лемма 3.2. *Если H ступенчато нильпотентна в G, то H разрешима.*

Доказательство. Пусть $\theta(X) = \{A \leq X \mid A$ нильпотентна$\}$ для любой группы X. Тогда, очевидно, θ является индуктивным подгрупповым функтором. Ввиду условия леммы G имеет такой нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_t = G$, что $(H \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ нильпотентна для каждого $i = 1, \ldots, t$. Ввиду леммы 2.1 HG_1/G_1 ступенчато нильпотентна в G/G_1. Следовательно, HG_1/G_1 разрешима по индукции. С другой стороны, $H \cap G_1$ нильпотентна. Стало быть, H разрешима.

Доказательство теоремы A. Если G разрешима, то для каждого главного фактора H/K и каждой подгруппы A из G подгруппа $(A \cap H)K/K$ абелева. Следовательно, в этом случае каждая подгруппа из G ступенчато абелева.

Предположим, что некоторая максимальная подгруппа M из G ступенчато нильпотентна и силовская 2-подгруппа P из M ступенчато абелева в G. Покажем, что G разрешима. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка.

Ввиду условия теоремы G имеет такой нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_t = G$, что $(M \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ нильпотентна для каждого $i = 1, \ldots, t$, и такой нормальный ряд $1 = M_0 < M_1 < \cdots < M_l = G$, что $(P \cap M_i)M_{i-1}/M_{i-1}$ абелева для каждого $i = 1, \ldots, l$.

(1) *M разрешима* (см. лемму 3.2).

(2) *G/R разрешима для всякой минимальной нормальной подгруппы R из G. Следовательно, $C_G(R) = 1$ и $R \nleq M$.*

Если $R \nleq M$, то $G/R = MR/R \simeq M/M \cap R$ разрешима по утверждению (1). Предположим, что $R \leq M$. Тогда R является p-группой для некоторого простого числа p, поэтому либо $R \leq P$, либо $p \neq 2$. Тем самым силовская 2-подгруппа RP/R из M/R ступенчато абелева в G/R и M/R ступенчато нильпотентна в G/R по лемме 2.1. Это показывает, что условие теоремы справедливо для G/R, поэтому G/R разрешима по выбору группы G. Более того, в силу выбора G R не абелева и R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Следовательно, ввиду утверждения (1) $R \nleq M$ и $C_G(R) = 1$.

(3) *$G = MR$ и $D = R \cap M \neq 1$ — нильпотентная нормальная подгруппа в M с абелевой силовской 2-подгруппой. Более того, если S — силовская p-подгруппа из D для некоторого простого числа p, делящего $|D|$, то S является силовской p-подгруппой в R, $M = N_G(V)$ и $D = N_R(V)$ для каждой характеристической подгруппы V из S.*

Утверждение (2) влечет, что $G = RM$ и $R \leq G_1 \cap M_1$. Тем самым ввиду леммы 3.1 и условия теоремы $1 \neq D = M \cap R \leq M \cap G_1$ является нормальной нильпотентной подгруппой в M. Значит, S является характеристической подгруппой в D, поэтому $M \leq N_G(S)$. Но поскольку R не абелева, имеем $M = N_G(S)$ и $D = N_R(S)$. Следовательно, S — силовская p-подгруппа в R. Аналогично получаем, что $M = N_G(V)$ и $D = N_R(V)$. Наконец, для силовской 2-подгруппы D_2 из D имеем $D_2 \leq R \cap M \leq M_1 \cap P$, поэтому D_2 является абелевой группой.

(4) $|D|$ — *нечетное число.*

Действительно, предположим, что 2 делит $|D|$, и пусть S — силовская 2-подгруппа из D. Поскольку S — абелева силовская 2-подгруппа в R и $D = N_R(S)$ нильпотентна по утверждению (3), $S \leq Z(N_R(S))$. Следовательно, R является 2-нильпотентной группой по теореме Бернсайда о нормальном p-дополнении [11, IV, 2.6]. Пусть E — $2'$-холлова подгруппа из R. Тогда E является характеристической подгруппой в R, поэтому она нормальна в G. Минимальность подгруппы R влечет, что R является 2-группой; противоречие с утверждением (2). Значит, (4) верно.

Заключительное противоречие.

В силу утверждений (2) и (4) некоторое нечетное число p делит $|D|$. Пусть S — силовская p-подгруппа из D. Тогда $N_R(Z(J(S))) = D$ нильпотентна и S является силовской p-подгруппой в R по утверждению (3). Следовательно, R является p-нильпотентной группой по теореме Глаубермана — Томпсона. Но тогда R является p-группой. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы B. Достаточно доказать, что если в каждой цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$, где M_i — максимальная подгруппа в M_{i-1}, $i = 1, 2, 3$, по крайней мере одна из подгрупп M_1, M_2 или M_3 ступенчато субнормальна в G, то G разрешима. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа из G, p — наибольший простой делитель $|R|$ и R_p — силовская p-подгруппа из R.

(1) *G/R разрешима, $C_G(R) = 1$, поэтому $p > 3$.*

Действительно, для всякой группы X пусть $\theta(X)$ — множество всех субнормальных подгрупп из X. Ввиду [2, A, 14.1(b)] θ — индуктивный подгрупповой функтор. Следовательно, условие теоремы справедливо для G/R по лемме 2.1. Значит, G/R разрешима, и R не является абелевой группой по выбору G. Более того, R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Стало быть, $C_G(R) = 1$, и $p > 3$ по $p^a q^b$-теореме Бернсайда.

(2) *Для некоторой максимальной подгруппы M из G и некоторой силовской p-подгруппы G_p из G имеем $R_p \leq G_p \leq N_G(R_p) \leq M$ и $M_G = 1$.* (Данное утверждение следует из утверждения (1) и рассуждения Фраттини.)

(3) *$R \neq G$, поэтому $D = M \cap R \neq M$.*

Предположим, что $R = G$ — простая неабелева группа. Пусть q — наименьший простой делитель $|G|$. Тогда G не является q-нильпотентной группой, поэтому имеет q-замкнутую подгруппу Шмидта $H = H_q \rtimes H_r$ по [11, IV, 5.4]. Очевидно, что $|H_q| \neq q$ и $H \neq G$. Следовательно, G имеет максимальную цепь $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$, где $M_3 \neq 1$. Значит, ввиду условия теоремы по крайней мере одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 является собственной неединичной ступенчато субнормальной подгруппой в G. Таким образом, G не является простой группой. Полученное противоречие показывает, что имеет место (3).

(4) *D — нормальная ненильпотентная подгруппа в M, поэтому $D \nleq \Phi(M)$.*

Очевидно, что R_p является силовской подгруппой в D. Предположим, что D нильпотентна. Тогда R_p является характеристической подгруппой в D, поэтому $M \leq N_G(R_p)$, так как D нормальна в M. Более того, ввиду (1) имеем $M = N_G(R_p)$, стало быть, $N_R(R_p) = D$ нильпотентна. Значит, $N_R(R_p)/C_R(R_p)$ является p-группой, следовательно, $O^p(R) \neq R$ по [12, X, 8.13], так как $p > 3$

по (1). Но ввиду утверждения (1) каждый композиционный фактор из R не абелев; противоречие. Таким образом, имеем (4).

(5) *Подгруппа M содержит такую максимальную подгруппу T, что $M = DT$ и $D \cap T \neq 1$.*

По утверждению (4) существует такая максимальная подгруппа T в M, что $M = DT$. Предположим, что $D \cap T = 1$. Тогда D является минимальной нормальной подгруппой в M. Заметим также, что

$$G/R \simeq MR/R \simeq M/M \cap R = M/D \simeq T$$

разрешима по утверждению (1). Тогда D является p-группой по лемме 3.1, что противоречит утверждению (4). Следовательно, $D \cap T \neq 1$.

(6) $1 < D \cap T < T$. *Значит, T имеет такую максимальную подгруппу V, что* $1 < D \cap T \leq V$. (Это следует из утверждений (3) и (5).)

(7) *По крайней мере одна из подгрупп $V \cap R$, $T \cap R$ или $D = M \cap R$ субнормальна в G.*

По условию теоремы по крайней мере одна из подгрупп V, T или M ступенчато субнормальна в G. Обозначим эту подгруппу через L. Тогда G имеет такой нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_t = G$, что $(L \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ субнормальна в G/G_{i-1} для каждого $i = 1, \ldots, t$. В частности, $L \cap G_1$ субнормальна в G. Следовательно, в силу [2, A, 14.2] $L \cap G_1 \cap R = L \cap R$ субнормальна в G, так как $R \leq G_1$ по утверждению (1).

Заключительное противоречие.

Пусть L — подгруппа из $\{V \cap R, T \cap R, D = M \cap R\}$ такая, что L субнормальна в G. Тогда $1 < L \leq M$ и R нормализует L по [2, A, 14.3]. Следовательно, $L^G = L^{RM} = L^M \leq M_G$, поэтому $M_G \neq 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

4. Доказательство теорем C и D

Нам понадобятся следующие два известных факта.

Лемма 4.1 [13]. *Пусть H, K и N — попарно перестановочные подгруппы из G и H — холлова подгруппа в G. Тогда $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$.*

Лемма 4.2 [5, § 4, 5.1]. *Пусть $A \leq B \leq G$, где A — $\cap$-неразложимая подгруппа из B. Тогда в G существует такая $\cap$-неразложимая подгруппа X, что $A = B \cap X$.*

Доказательство теоремы C. Если G сверхразрешима, то, рассмотрев главный ряд из G, легко показать необходимость. Значит, нужно только доказать, что если каждая $\cap$-неразложимая подгруппа из G ступенчато G-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G, то G сверхразрешима. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть R — произвольная минимальная нормальная подгруппа из G.

(1) *Условие теоремы справедливо для G/R, поэтому G/R сверхразрешима.*

Для всякой группы X положим $\theta(X) = \{A \leq X \mid A$ X-перестановочна с каждой силовской подгруппой из $X\}$. Пусть $A \in \theta(X)$ и N — нормальная подгруппа из X. Тогда для каждого простого числа p, делящего $|X|$, существует такая силовская p-подгруппа P в X, что $AP = PA$. Следовательно, $(AN/N)(PN/N) = (PN/N)(AN/N)$. Значит, θ — индуктивный подгрупповой функтор. Стало быть, условие теоремы справедливо для G/R по лемме 2.1. Выбор группы G влечет, что G/R сверхразрешима.

(2) *R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, и R не циклическая.* (Это утверждение следует непосредственно из утверждения (1).)

(3) *Если X — $\cap$-неразложимая подгруппа из G, то $X \cap R$ перестановочна с некоторой силовской p-подгруппой P из G для каждого простого числа p, делящего $|G|$.*

Ввиду условия теоремы найдется такой нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_t = G$ из G, что для каждого $i = 1, \dots, t$ подгруппа $(X \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ (G/G_{i-1})-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G/G_{i-1}. В частности, существует такая силовская p-подгруппа P из G, что $(X \cap G_1)P = P(X \cap G_1)$ является подгруппой в G. Ввиду утверждения (2) $R \leq G_1$, поэтому

$$RP \cap (X \cap G_1)P = P(R \cap (X \cap G_1)P) = P(R \cap X \cap G_1)(R \cap P) = P(X \cap R) = (X \cap R)P$$

по лемме 4.1.

(4) *R является абелевой p-группой для некоторого простого числа p, делящего $|G|$.*

Предположим, что это не так. Тогда ввиду теоремы Томпсона — Фейта 2 делит $|R|$ и R не является 2-группой. Пусть $R_2 = P_1 \cap R$ — силовская 2-подгруппа из R, где P_1 — некоторая силовская 2-подгруппа из G и V — максимальная подгруппа из R_2. Тогда $N_R(V)/V$ является 2-нильпотентной группой по [11, IV, 2.8], поэтому $N_R(V)$ содержит подгруппу W с $|N_R(V) : W| = 2$. Тогда W является $\cap$-неразложимой подгруппой в $N_R(V)$. Следовательно, по лемме 4.2 существует такая $\cap$-неразложимая подгруппа X_0 из R, что $W = X_0 \cap N_R(V)$. Ясно, что 2 делит $|R : X_0|$ и 4 не делит $|R : X_0|$. Снова применяя лемму 4.2, получаем, что $X_0 = X \cap R$ для некоторой $\cap$-неразложимой подгруппы X из G.

Утверждение (3) влечет, что $X_0 = X \cap R$ перестановочна с некоторой силовской p-подгруппой из G для всякого простого числа p, делящего $|G|$. В частности, G имеет такую силовскую 2-подгруппу P, что $X_0P = PX_0$. Пусть $R_2 = P \cap R$ — силовская 2-подгруппа из R. Тогда по лемме 4.1 получаем, что $X_0P \cap R = X_0(P \cap R) = X_0R_2$ является подгруппой в R и $X_0 < X_0R_2$, так как 2 делит $|R : X_0|$.

Предположим, что некоторое простое число $q \neq 2$ делит $|R : X_0|$. По утверждению (3) найдется такая силовская q-подгруппа Q из G, что $X_0Q = QX_0$. Тогда $X_0Q \cap R = X_0(Q \cap R)$ является подгруппой в R и $X_0 < X_0R_q$, так как q делит $|R : X_0|$, где $R_q = Q \cap R$ — силовская q-подгруппа из R. Очевидно также, что $X_0Q \cap X_0R_2 = X_0$. Следовательно, X_0 не является $\cap$-неразложимой подгруппой в R. Полученное противоречие показывает, что $|R : X_0| = 2$, поэтому X_0 нормальна в R. Тем самым $1 \neq O^2(R) \neq R$. Поскольку $O^2(R)$ является характеристической подгруппой в R, она нормальна в G, что противоречит минимальности подгруппы R. Следовательно, R является абелевой p-группой для некоторого простого числа p.

Заключительное противоречие.

Пусть V — максимальная подгруппа из R такая, что V нормальна в силовской p-подгруппе G_p из G. Пусть $q \neq p$ — некоторый простой делитель $|G|$. Ввиду леммы 4.2 существует такая $\cap$-неразложимая подгруппа X из G, что $V = X \cap R$. С другой стороны, в силу утверждения (3) $VQ = QV$ для некоторой силовской q-подгруппы Q из G. Легко видеть также, что $V = VQ \cap R$

нормальна в VQ, поэтому q не делит $|G : N_G(V)|$. Следовательно, V нормальна в G, тем самым $|R| = p$, что противоречит утверждению (2). Последнее противоречие завершает доказательство теоремы.

Лемма 4.3 [14]. *Если $G = AB$, где A — сверхразрешимая подгруппа из G и B — силовская p-подгруппа из G для некоторого нечетного простого числа p, то G разрешима.*

Доказательство теоремы D. Необходимость очевидна, нужно доказать лишь достаточность. Предположим, что достаточность неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. По условию теоремы G содержит сверхразрешимое p-дополнение B для некоторого простого числа p. Следовательно, $G = G_pB$ для любой силовской p-подгруппы G_p из G. Пусть R — произвольная минимальная нормальная подгруппа из G.

(1) *Условие теоремы справедливо для G/R, поэтому G/R сверхразрешима.*

Очевидно, что $BR/R \simeq B/B \cap RN$ — сверхразрешимое p-дополнение в G/R. Положим для всякой группы X и фиксированного непустого множества простых чисел π, что $\theta(X) = \{X\}$, если X не имеет π-холловых подгрупп, и $\theta(X) = \{A \leq X \mid A$ перестановочна с некоторой π-холловой подгруппой из $X\}$ в противном случае. Если N — нормальная подгруппа из X и $A \in \theta(X)$, то, очевидно, $AN/N \in \theta(X/N)$. Следовательно, θ — индуктивный подгрупповой функтор, поэтому условие теоремы справедливо для G/R по лемме 2.1. Значит, G/R сверхразрешима ввиду выбора G.

(2) *R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G, $R \nleq \Phi(G)$, и R не циклическая.* (Это прямо следует из утверждения (1) и выбора группы G.)

(3) *Если X — $\cap$-неразложимая подгруппа из G и $|G : X|$ не является степенью числа p, то $X \cap R$ перестановочна с некоторой силовской p-подгруппой из G и с некоторым p-дополнением в G.*

По условию теоремы существует нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_t = G$ из G такой, что для каждого $i = 1, \dots, t$ подгруппа $(X \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}$ перестановочна с некоторым p-дополнением в G/G_{i-1}. В частности, существует такое p-дополнение S в G, что $(X \cap G_1)S = S(X \cap G_1)$ является подгруппой в G. Ввиду утверждения (2) $R \leq G_1$, поэтому

$$RS \cap (X \cap G_1)S = S(R \cap (X \cap G_1)S) = S(R \cap X \cap G_1)(R \cap S) = S(X \cap R) = (X \cap R)S$$

по лемме 4.1. Аналогично можно доказать первую часть утверждения (3).

(4) *Для всякой $\cap$-неразложимой подгруппы X_0 из R индекс $|R : X_0|$ является либо p-числом, либо p'-числом.*

Пусть X — $\cap$-неразложимая подгруппа из G такая, что $X_0 = X \cap R$. Если $|G : X| = p^a$, то $|XR : X| = |R : X_0|$ — степень числа p. В противном случае в силу утверждения (3) X_0 перестановочна с некоторой силовской p-подгруппой P из G и с некоторым p-дополнением E в G. Тогда $X_0 = X_0P \cap X_0S$ по лемме 4.1, поэтому

$$X_0 = X_0P \cap X_0S \cap R = X_0(P \cap R) \cap X_0(S \cap R).$$

Следовательно, либо $X_0(P \cap R) = X$, либо $X_0(S \cap R) = X$, откуда получаем, что $|R : X_0|$ является либо p-числом, либо p'-числом.

(5) *R является абелевой q-группой для некоторого простого числа q, поэтому $R \leq G_p$ или $R \leq B$.*

Предположим, что это не так. Тогда $R = A_1 \times \dots \times A_n$, где $A_1, \dots, A_n$ — изоморфные простые неабелевы группы. Пусть R_p — силовская p-подгруппа из R и $S = B \cap R$. Тогда $R = R_pS$. Пусть V — максимальная подгруппа из R_p и $N = N_R(V)$. Тогда $N = R_pN_S(V)$ и $|N : VN_S(V)| = p$. Следовательно, $VN_S(V)$ — максимальная подгруппа в N. Ввиду леммы 4.2 существует такая $\cap$-неразложимая подгруппа X_0 из R, что $X_0 \cap N = VN_S(V)$. Тогда p делит $|R : X_0|$, но p^2 не делит $|R : X_0|$. Стало быть, $|R : X_0| = p$ ввиду утверждения (4). Значит, для некоторого i имеем $R = A_iX_0$, поэтому $|A_i : A_i \cap X_0| = p$. Поскольку A_i — простая неабелева группа, то $p > 2$. Но тогда $R = R_pS$ разрешима по лемме 4.3; противоречие. Таким образом, имеем (5).

(6) *$G = R \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G.* (Это прямо следует из утверждений (2) и (5).)

(7) *Если $R \leq E$, где $E \in \{G_p, B\}$, то E имеет такую максимальную подгруппу W, что $R \nleq W$ и $|R : R \cap W| = q$.*

Пусть, например, $R \leq B$. Тогда $B = R \rtimes (B \cap M)$. Поскольку B сверхразрешима по условию теоремы, B содержит такую максимальную подгруппу W с $|B : W| = q$, что $B \cap M \leq W$. Поэтому $|R : R \cap W| = q$.

Заключительное противоречие.

Ввиду утверждения (5) $R \leq G_p$ или $R \leq B$. Пусть, например, $E = B$ и $V = R \cap W$. Тогда V нормальна в E и V является максимальной подгруппой в R по утверждению (7). Поскольку R не является циклической группой, то $V \neq 1$. Ввиду леммы 4.2 найдется такая $\cap$-неразложимая подгруппа X из G, что $V = X \cap R$. Если $|G : X|$ является степенью числа p, то, очевидно, X перестановочна с некоторой силовской подгруппой P из G, поэтому $V = X \cap R$ перестановочна с некоторой силовской подгруппой P из G. С другой стороны, если $|G : X|$ не является степенью p, то в силу утверждения (3) V перестановочна с некоторой силовской p-подгруппой P из G. Следовательно, $V = R \cap VP$ нормальна в VP. Поэтому $BP = G \leq N_G(V)$. Минимальность подгруппы R влечет, что $V = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

5. Заключительные замечания

Рассуждая, как при доказательстве теоремы А, можно доказать следующий факт.

Теорема 5.1. *Тогда и только тогда G является разрешимой группой, когда каждая максимальная подгруппа из G ступенчато нильпотентна в G.*

Следствие 5.2 (О. Ю. Шмидт). *Если каждая максимальная подгруппа из G нильпотентна, то G разрешима.*

В [15, 16] авторами доказано, что если для всякой силовской подгруппы P из G индекс $|G : N_G(P)|$ является степенью простого числа, то G разрешима. В разрешимой группе $G = C_p \wr S_3$ $(p > 3)$ индекс $|G : N_G(S)|$ не является степенью простого числа, где S — силовская 2-подгруппа из G. Тем не менее может быть доказан следующий факт.

Теорема 5.3. *Пусть $\theta(X) = \{A \leq X \mid |X : N_X(A)|$ — степень простого числа$\}$ для всякой группы X. Тогда G является разрешимой группой в том и только том случае, когда каждая силовская подгруппа из G ступенчато обладает свойством θ в G.*

Хорошо известно, что G является разрешимой группой, если индекс каждой максимальной подгруппы из G является либо простым числом, либо квадратом простого числа. Нетрудно показать, что верно следующее обобщение этого результата. *Пусть* $\theta_0(X) = \{A \leq X \mid |X : N_X(A)|$ *— простое число или квадрат простого числа*$\}$ *для всякой группы* X. *Тогда* G *является разрешимой группой в том и только том случае, когда каждая максимальная подгруппа из* G *ступенчато обладает свойством* θ_0 *в* G. В связи с этим наблюдением естественным выглядит

Вопрос 5.4. *Пусть* $\theta_0(X) = \{A \leq X \mid |X : N_X(A)|$ *— простое число или квадрат простого числа*$\}$ *для всякой группы* X. *Предположим, что для некоторого фиксированного числа* $1 < n \leq 3$ *каждая максимальная цепь длины* n *из* G *содержит собственную подгруппу из* G, *ступенчато обладающую свойством* θ_0 *в* G. *Верно ли, что тогда* G *является разрешимой группой?*

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные предложения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guo W., Shum K. P, Skiba A. N.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.
2. *Doerk K., Hawkes H.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. *Skiba A. N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Изв. Гомель. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. V. 36, N 3. P. 12–31.
4. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M., Skiba A. N.* Local embeddings of some families of subgroups of finite groups // Acta Math. Sin. 2009. V. 25. P. 869–882.
5. *Weinstein M. (ed.), etc.* Between nilpotent and solvable. Passaic, NJ: Polygonal Publ. House, 1982.
6. *Johnson D. L.* A note on supersoluble groups // Can. J. Math. 1971. V. 23. P. 562–564.
7. *Guo X., Shum K. P.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 181. P. 297–308.
8. *Guo X., Wang J., Shum K. P.* On semi-cover-avoiding maximal subgroups and solvability of finite groups // Commun. Algebra. 2006. V. 34. P. 3235–3244.
9. *Chen M. S.* A remark on finite groups // Tamkang J. Math. 1977. V. 8. P. 105–109.
10. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: An introduction. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2004.
11. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
12. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.
13. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О π'-свойствах конечной группы, обладающей π-холловой подгруппой // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 297–309.
14. *Монахов В. С.* Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп // Конечные группы. Тр. Гомельского семинара (Гомель, 1975–1977). Минск: Наука и техника, 1978. С. 50–63.
15. *Zhang J.* Sylow numbers of finite groups // J. Algebra. 1995. V. 176. P. 111–123.
16. *Го В.* Конечные группы с заданными индексами нормализаторов силовских подгрупп // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 295–300.

Статья поступила 4 августа 2014 г.

Го Веньбинь (Wenbin Guo)
University of Science and Technology of China, School of Mathematical Science,
Hefei, 230026, P. R. China
wbguo@ustc.edu.cn

Скиба Александр Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
alexander.skiba49@gmail.com