Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗРЫВОВ КОЭФФИЦИЕНТА ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ В ИМПЕДАНСНОЙ ФОРМЕ

А. А. Седипков

Аннотация. Исследуется обратная спектральная задача для оператора Штурма — Лиувилля в импедансной форме. Доказано, что разрывы импеданса однозначно определяются асимптотикой функции Йоста на бесконечности. Построен алгоритм, позволяющий восстановить разрывы импеданса.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, импеданс, функция Йоста.

1. Введение

Обратные задачи спектрального анализа состоят в восстановлении дифференциальных операторов по некоторым их спектральным данным. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и техники. Интерес к этой тематике постоянно возрастает благодаря появлению все новых приложений, и в настоящее время теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире.

Многие приложения связаны с краевыми задачами, в которых коэффициенты имеют разрывы внутри интервала. Обратные спектральные задачи с разрывными коэффициентами исследовались во многих работах (см. [1–10] и литературу в них).

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Штурма — Лиувилля в импедансной форме

$$-\frac{1}{\sigma(x)}(\sigma(x)w_x)_x = \lambda w, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$w_x|_{x=0} = 0. \tag{2}$$

Здесь коэффициент $\sigma(x)$, называемый *импедансом*, является строго положительной кусочно-гладкой функцией такой, что она постоянна при $x \geq x_* > 0$ и вместе с производными до второго порядка удовлетворяет условиям

$$\sigma^{(j)}(x) \in C[x_{k+1}, x_k],\ k = \overline{1,n}, \quad \sigma^{(j)}(x) \in C[x_1, +\infty),\ j = \overline{0,2},$$

где $0 = x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0 = +\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00390, 14–01–31165), Президиума РАН (программа фундаментальных исследований № 15, проект № 121), а также Сибирского отделения РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 30).

Потребуем, чтобы функции w, $\sigma(x)w_x$ были абсолютно непрерывны на $[0,a]$ при каждом фиксированном $a>0$. Известно [11], что в этом случае краевая задача (1), (2) порождает в весовом пространстве

$$L_2(0,+\infty;\sigma)=\left\{f(x)\mid \int\limits_0^\infty |f(x)|^2\sigma(x)\,dx<\infty\right\}$$

со скалярным произведением

$$(f,g)=\int\limits_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\sigma(x)\,dx$$

самосопряженный оператор

$$A: w\to -\frac{1}{\sigma(x)}(\sigma(x)w_x)_x.$$

Область определения оператора A состоит из всех функций $w\in L_2(0,+\infty;\sigma)$ таких, что

1) w, $\sigma(x)w_x$ абсолютно непрерывны на $[0,a]$ при каждом фиксированном $a>0$;

2) $\frac{1}{\sigma(x)}(\sigma(x)w_x)_x\in L_2(0,+\infty;\sigma)$;

3) w удовлетворяет краевому условию (2).

Краевая задача (1), (2) может быть переписана в виде уравнения

$$-\frac{1}{\sigma(x)}(\sigma(x)w_x)_x=\lambda w,\quad x\in\bigcup_{k=0}^{n}(x_{k+1},x_k),\tag{3}$$

с условиями склейки

$$\begin{bmatrix} w\\ w_x\end{bmatrix}_{x=x_k-0}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}\begin{bmatrix} w\\ w_x\end{bmatrix}_{x=x_k+0},\quad \sigma_k=\frac{\sigma(x_k+0)}{\sigma(x_k-0)},\quad k=\overline{1,n},\tag{4}$$

и краевым условием

$$w_x|_{x=0}=0.\tag{5}$$

Обозначим через $\mathscr{E}(x,\omega)$ решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям склейки (4) и совпадающее с $\exp(i\omega x)$ при $x\geq x_*$. Функцию $\mathscr{E}(x,\omega)$ называют *решением Йоста* системы (3), (4), а функцию $\mathscr{J}(\omega)=\mathscr{E}_x(0,\omega)$ — *функцией Йоста* системы (3)–(5).

Обратная спектральная задача для оператора A состоит в восстановлении кусочно-гладкого импеданса $\sigma(x)$ с конечным числом разрывов первого рода в точках $x_1,\dots,x_n$ по функции Йоста $\mathscr{J}(\omega)$, при этом число n, точки разрыва $x_1,\dots,x_n$ и величины $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ также подлежат восстановлению.

Эта задача до сих пор открыта и изучена лишь в некоторых частных случаях. Случай одного разрыва исследован в [4]. Случай кусочно-постоянного и кусочно-гладкого коэффициента σ с количеством разрывов $n\geq 2$ изучался в работах [5, 9, 10], где предполагалась несоизмеримость точек разрыва $x_1,\dots,x_n$, когда никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю.

В настоящей работе изучается вопрос восстановления точек разрыва $x_1,\dots$, x_n импеданса $\sigma(x)$ и величин $\sigma_1,\dots,\sigma_n$, когда на точки разрыва не накладываются ограничения несоизмеримости. Показано, что точки разрыва $x_1,\dots,x_n$

и величины $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ однозначно определяются асимптотикой функции Йоста $\mathscr{J}(\omega)$ на бесконечности. Построен алгоритм, позволяющий восстановить разрывы импеданса.

Решать эту задачу будем путем сведения оператора A к соответствующему оператору Штурма — Лиувилля. С помощью стандартной замены $u = \sqrt{\sigma(x)}w$ система (3), (4) приводится к уравнению Штурма — Лиувилля в нормальной форме

$$-u_{xx} + q(x)u = \lambda u, \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n} (x_{k+1}, x_k), \tag{6}$$

с условиями склейки

$$\begin{bmatrix} u \\ u_x \end{bmatrix}_{x=x_k-0} = \begin{pmatrix} a_k^{-1} & 0 \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_x \end{bmatrix}_{x=x_k+0}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{7}$$

а краевое условие (5) запишется в виде

$$(u_x - hu) \mid_{x=0} = 0. \tag{8}$$

Здесь

$$q(x) = \frac{(\sqrt{\sigma(x)})_{xx}}{\sqrt{\sigma(x)}}, \quad h = \frac{\sigma_x(0)}{2\sigma(0)},$$

$$a_k = \sqrt{\sigma_k}, \quad b_k = \frac{\sigma_x(x_k + 0)/\sqrt{\sigma_k} - \sigma_x(x_k - 0)}{\sigma(x_k - 0)}.$$

Из свойств импеданса $\sigma(x)$ следует, что коэффициент $q(x)$ является кусочно-непрерывной на полуоси $x \geq 0$ функцией с разрывами первого рода в точках $x_1, \dots, x_n$, равной нулю при $x \geq x_*$.

Краевая задача (6)–(8) порождает в пространстве $L_2(0, +\infty)$ оператор Штурма — Лиувилля

$$L : u \to -u_{xx} + q(x)u,$$

который определен для всех функций u из $L_2(0, +\infty)$ таких, что

1) $u \in W_2^2(x_{k+1}, x_k)$, $k = \overline{0, n}$;

2) u удовлетворяет условиям склейки (7) и краевому условию (8).

Обозначим через $E(x, \omega)$ решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям склейки (7) и совпадающее с $\exp(i\omega x)$ при $x \geq x_*$. Функцию $E(x, \omega)$ называют *решением Йоста* системы (6), (7), а функцию $J(\omega) = E_x(0, \omega) - hE(0, \omega)$ — *функцией Йоста* системы (6)–(8). Отметим, что функции $J(\omega)$ и $\mathscr{J}(\omega)$ связаны соотношением

$$\mathscr{J}(\omega) = KJ(\omega), \quad K = \sqrt{\frac{\sigma(x_*)}{\sigma(0)}}. \tag{9}$$

В дальнейшем будет показано, что коэффициент K однозначно определяется асимптотикой функции Йоста $\mathscr{J}(\omega)$.

Таким образом, исходная обратная спектральная задача сводится к восстановлению оператора L, т. е. кусочно-непрерывного коэффициента $q(x)$ и величин h, x_k, a_k, b_k, $k = \overline{1, n}$, по функции Йоста $J(\omega)$, а задача восстановления точек разрыва $x_1, \dots, x_n$ импеданса $\sigma(x)$ и величин $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ сводится к восстановлению точек разрыва $x_1, \dots, x_n$ и величин $a_1, \dots, a_n$ по асимптотике функции Йоста $J(\omega)$ на бесконечности.

2. Свойства решения и функции Йоста

Для начала напомним некоторые факты из теории обратных спектральных задач. Условимся, что если некоторый символ ζ обозначает объект, относящийся к системе (6)–(8), то через ζ^0 будем обозначать аналогичный объект, относящийся к системе (6)–(8) с коэффициентами

$$q(x) \equiv 0, \quad h = 0, \quad b_k = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что система (3)–(5) с кусочно-постоянным импедансом $\sigma^0(x)$, где $\sigma_k^0 = \sigma_k$, $k = \overline{1,n}$, сводится к системе к системе (6)–(8) с коэффициентами (10).

Обозначим через $\mathscr{I}^k$ множество мультииндексов I_k длины $k = \overline{1,n}$. Компонентами мультииндекса i_k являются числа 1, 0, -1, подчиненные следующему правилу: знаки ненулевых компонент i_k чередуются, а первая ненулевая компонента равна 1.

Для мультииндекса $I_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathscr{I}^k$, $k = \overline{1,n}$, положим

$$C(I_k) = \prod_{m=1}^{k} \frac{a_m^{-1} + a_m}{2} \left(\frac{1 - a_m^2}{1 + a_m^2} \right)^{|i_m|}, \quad |I_k| = \sum_{m=1}^{k} i_m. \tag{11}$$

Через X_k обозначим вектор $(x_1, \dots, x_k)$, а через $(I_k, X_k) = \sum\limits_{m=1}^{k} i_m x_m$ — скалярное произведение векторов I_k, X_k.

Из [10] известно, что функция Йоста $J(\omega)$ не равна нулю при $\operatorname{Im}\omega \geq 0$, $\omega \neq 0$, причем $J'(0) \neq 0$. Она однозначно определяет функцию

$$M(\lambda) = \frac{E(0,\omega)}{J(\omega)},$$

называемую *функцией Вейля* системы (6)–(8), по формуле

$$M(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{V(\zeta)}{\lambda - \zeta}\, d\zeta, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ V(\zeta) = \frac{\omega}{\pi |J(\omega)|^2},\ \zeta = \omega^2 \geq 0, \tag{12}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения:

$$\int\limits_0^\infty = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{\partial G_R}, \quad G_R = \{\lambda \mid 1/R < |\lambda| < R\} \setminus \{\lambda \mid 1/R < \operatorname{Re}\lambda < R,\ \operatorname{Im}\lambda = 0\}.$$

Наконец, при $\operatorname{Im}\omega \geq 0$ и $\omega \to \infty$ для решения Йоста $E(x,\omega)$ имеет место

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} E(x,\omega) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} E^0(x,\omega)[1], \quad [1] = 1 + O\left(\frac{1}{|\omega|} \right), \tag{13}$$

равномерно по $x \geq 0$, где $m = 0, 1$.

Пусть $\omega \neq 0$. Тогда в силу (10) на каждом интервале (x_{k+1}, x_k), $k = \overline{0,n}$, можем разложить решение Йоста $E^0(x,\omega)$ в линейную комбинацию решений $e^{i\omega x}$, $e^{-i\omega x}$:

$$E^0(x,\omega) = \alpha_k^0(\omega) e^{i\omega x} + \beta_k^0(\omega) e^{-i\omega x}, \quad x \in (x_{k+1}, x_k),\ k = \overline{0,n}.$$

Из определения решения Йоста $E^0(x,\omega)$ и условий склейки (7) получаем

$$\begin{bmatrix}\alpha_k^0(\omega)\\ \beta_k^0(\omega)\end{bmatrix} = A_k(\omega)\begin{bmatrix}\alpha_{k-1}^0(\omega)\\ \beta_{k-1}^0(\omega)\end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$A_k(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{a_k^{-1}+a_k}{2} & \frac{a_k^{-1}-a_k}{2}e^{-2i\omega x_k} \\ \frac{a_k^{-1}-a_k}{2}e^{2i\omega x_k} & \frac{a_k^{-1}+a_k}{2}\end{pmatrix}, \quad k=\overline{1,n},\ \alpha_0^0(\omega)\equiv 1,\ \beta_0^0(\omega)\equiv 0.$$

Известно [10], что коэффициенты разложения $\alpha_n^0(\omega)$, $\beta_n^0(\omega)$ имеют вид

$$\alpha_k^0(\omega) = \begin{cases} 1, \quad k=0, \\ \sum\limits_{I_k\in\mathscr{I}^k||I_k|=0} C(I_k)e^{2i\omega(I_k,X_k)} = \sum\limits_{m=1}^{N_k} A_m^k \exp\left(i\omega\alpha_m^k\right), \quad k=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{15}$$

$$\beta_k^0(\omega) = \begin{cases} 0, \quad k=0, \\ \sum\limits_{I_k\in\mathscr{I}^k||I_k|=1} C(I_k)e^{2i\omega(I_k,X_k)} = \sum\limits_{m=1}^{M_k} B_m^k \exp\left(i\omega\beta_m^k\right), \quad k=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{16}$$

и при $\operatorname{Im}\omega\ge 0$ и $\omega\to\infty$ удовлетворяют

$$\alpha_k^0(\omega)=O(1), \quad \beta_k^0(\omega)=O(e^{-2\operatorname{Im}\omega x_k}).$$

Отсюда и из определения функции Йоста, а также формул (10), (13)–(16) следует, что при $\operatorname{Im}\omega\ge 0$ и $\omega\to\infty$

$$\frac{J(\omega)}{i\omega} = \frac{J^0(\omega)}{i\omega} + O\left(\frac{1}{|\omega|}\right), \tag{17}$$

где функция $\frac{J^0(\omega)}{i\omega}$ является тригонометрическим многочленом вида

$$\frac{J^0(\omega)}{i\omega} = \sum_{I_n\in\mathscr{I}^n}(-1)^{|I_n|}C(I_n)e^{2i\omega(I_n,X_n)} = \sum_{m=1}^{N} C_m\exp(i\omega p_m). \tag{18}$$

3. Восстановление разрывов импеданса

Привлекая теорию почти периодических функций [12] и используя (17), (18), получаем, что асимптотика функции Йоста $J(\omega)$ на бесконечности однозначно определяет показатели Фурье $p_1,\dots,p_N$ и соответствующие им коэффициенты Фурье $C_1,\dots,C_N$ и, следовательно, функцию Йоста $J^0(\omega)$.

Из определения функции Вейля и формулы (12) следует, что функция Йоста $J^0(\omega)$ позволяет однозначно восстановить функцию $E^0(0,\omega)$ по формуле

$$E^0(0,\omega) = J^0(\omega)\int\limits_0^\infty \frac{V^0(\zeta)}{\omega^2-\zeta}\,d\zeta, \quad \omega\in\mathbb{C},\ V^0(\zeta)=\frac{\nu}{\pi|J^0(\nu)|^2},\ \zeta=\nu^2\ge 0. \tag{19}$$

Далее, поскольку

$$J^0(\omega)=i\omega\big(\alpha_n^0(\omega)-\beta_n^0(\omega)\big), \quad E^0(0,\omega)=\alpha_n^0(\omega)+\beta_n^0(\omega),$$

то

$$\alpha_n^0(\omega)=\frac12\left(E^0(0,\omega)+\frac{1}{i\omega}J^0(\omega)\right), \quad \beta_n^0(\omega)=\frac12\left(E^0(0,\omega)-\frac{1}{i\omega}J^0(\omega)\right). \tag{20}$$

Таким образом, асимптотика функции Йоста $J(\omega)$ на бесконечности однозначно определяет коэффициенты $\alpha_n^0(\omega)$, $\beta_n^0(\omega)$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Точки разрыва x_k и коэффициенты a_k однозначно определяются коэффициентами $\alpha_k^0(\omega)$ и $\beta_k^0(\omega)$. Кроме того, справедливы формулы*

$$x_k = \frac{1}{2}\beta_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{21}$$

$$a_k = \sqrt{\frac{2A^k}{A^k + B^k} - 1}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{22}$$

где A^k — коэффициент Фурье почти периодической функции $\alpha_k^0(\omega)$, соответствующий показателю Фурье $\alpha_k = \min\left\{\alpha_m^k \mid m = \overline{1,N_k}\right\}$, а B^k — коэффициент Фурье почти периодической функции $\beta_k^0(\omega)$, соответствующий показателю Фурье $\beta_k = \min\left\{\beta_m^k \mid m = \overline{1,M_k}\right\}$.

Доказательство. Обозначим через I_k^0 мультииндекс из $\mathscr{I}^k$, все компоненты которого равны нулю, а через I_k^1 — мультииндекс из $\mathscr{I}^k$, у которого первая компонента равна единице, а остальные нулю.

Нетрудно видеть, что в силу $0 < x_n < \dots < x_1$ и определения множества $\mathscr{I}^k$

$$\min_{I_k \in \mathscr{I}^k}\{(I_k, X_k) \mid |I_k| = 0\} = \left(I_k^0, X_k\right) = 0, \quad k = \overline{1,n},$$

$$\min_{I_k \in \mathscr{I}^k}\{(I_k, X_k) \mid |I_k| = 1\} = \left(I_k^1, X_k\right) = x_k, \quad k = \overline{1,n}.$$

Кроме того, для каждого $I_k \in \mathscr{I}^k$ такого, что $|I_k| = 0$, $I_k \neq I_k^0$, $k = \overline{1,n}$, выполнено

$$(I_k, X_k) > \left(I_k^0, X_k\right),$$

а для каждого $I_k \in \mathscr{I}^k$ такого, что $|I_k| = 1$, $I_k \neq I_k^1$, $k = \overline{1,n}$, выполнено

$$(I_k, X_k) > \left(I_k^1, X_k\right).$$

Тогда из (15), (16) получаем, что для каждого $k = \overline{1,n}$ показатель Фурье α^k почти периодической функции $\alpha_k^0(\omega)$ соответствует только мультииндексу I_k^0 и равен нулю, а показатель Фурье β^k почти периодической функции $\beta_k^0(\omega)$ — мультииндексу I_k^1 и равен $2x_k$. Следовательно, точка x_k однозначно определяется показателем β^k, и справедлива формула (21). Кроме того, с учетом (11) имеем

$$\frac{B^k}{A^k} = \frac{C((1,0,\dots,0))}{C((0,\dots,0))} = \frac{2}{1 + a_k^2} - 1, \quad k = \overline{1,n}.$$

Отсюда следует, что величина a_k однозначно определяется коэффициентами Фурье A^k, B^k и справедлива формула (22).

Таким образом, учитывая тот факт, что наборы α_m^k, A_m^k, $m = \overline{1,N_k}$, и β_m^k, B_m^k, $m = \overline{1,M_k}$, однозначно определяются как показатели и коэффициенты Фурье почти периодических функций $\alpha_k^0(\omega)$ и $\beta_k^0(\omega)$, получаем справедливость леммы. $\square$

Суммируя полученные результаты, заключаем, что рассматриваемая обратная задача сводится к вопросу восстановления коэффициентов $\alpha_k^0(\omega)$, $\beta_k^0(\omega)$, $k = \overline{1,n-1}$, по коэффициентам $\alpha_n^0(\omega)$, $\beta_n^0(\omega)$.

Из леммы 1 вытекает, что $\alpha_n^0(\omega)$, $\beta_n^0(\omega)$ однозначно определяют величины x_n, a_n. В свою очередь, величины x_n, a_n позволяют построить невырожденную матрицу $A_n(\omega)$ в формуле (14). Отсюда и из рекуррентного соотношения (14) получаем, что коэффициенты $\alpha_n^0(\omega)$, $\beta_n^0(\omega)$ однозначно определяют коэффициенты $\alpha_{n-1}^0(\omega)$, $\beta_{n-1}^0(\omega)$ и, следовательно, величины x_{n-1}, a_{n-1} и невырожденную матрицу $A_{n-1}(\omega)$. Продолжая эту процедуру до тех пор, пока не дойдем до коэффициентов $\alpha_0^0(\omega) \equiv 1$, $\beta_0^0(\omega) \equiv 0$, получим, что коэффициенты $\alpha_n^0(\omega)$, $\beta_n^0(\omega)$ однозначно определяют величины x_k, a_k, $k = \overline{1,n}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Асимптотика функции Йоста $J(\omega)$ на бесконечности однозначно определяет точки разрыва $x_1, \dots, x_n$ и величины $a_1, \dots, a_n$.*

Построен следующий алгоритм восстановления величин x_k, a_k, $k = \overline{1,n}$.

(1) Используя асимптотику функции Йоста $J(\omega)$ на бесконечности (17) и привлекая методы теории почти периодических функций, восстанавливаем функцию Йоста $J^0(\omega)$.

(2) С помощью формул (19), (20) вычисляем тригонометрические многочлены $\alpha_n^0(\omega)$, $\beta_n^0(\omega)$.

(3) Привлекая методы теории почти периодических функций, восстанавливаем показатели и коэффициенты Фурье функций $\alpha_n^0(\omega)$, $\beta_n^0(\omega)$.

(4) Используя формулы (21), (22), находим величины x_n, a_n.

(5) С помощью рекуррентного соотношения (14) вычисляем функции $\alpha_{n-1}^0(\omega)$, $\beta_{n-1}^0(\omega)$.

(6) Повторяя последовательно шаги (3)–(5) для $\alpha_k^0(\omega)$, $\beta_k^0(\omega)$, $k = \overline{1,n-1}$, вплоть до нахождения $\alpha_0^0(\omega) \equiv 1$, $\beta_0^0(\omega) \equiv 0$, восстанавливаем оставшиеся величины x_k, a_k, $k = \overline{1,n-1}$.

Осталось рассмотреть вопрос нахождения коэффициента K, связывающего функции Йоста $\mathscr{J}(\omega)$ и $J(\omega)$ по формуле (9). С учетом (9), (17), (18) функция Йоста $\mathscr{J}(\omega)$ при $\omega \to \infty$ и $\omega \in \mathbb{R}$ принимает вид

$$\frac{\mathscr{J}(\omega)}{i\omega} = \frac{\mathscr{J}^0(\omega)}{i\omega} + O\left(\frac{1}{|\omega|}\right), \quad \frac{\mathscr{J}^0(\omega)}{i\omega} = K \sum_{I_n \in \mathscr{I}^n} (-1)^{|I_n|} C(I_n) e^{2i\omega(I_n, X_n)}.$$

Привлекая теорию почти периодических функций, восстанавливаем функцию Йоста $\mathscr{J}^0(\omega)$. В свою очередь, подставляя в (19) вместо функции $J^0(\omega)$ функцию $\mathscr{J}^0(\omega)$, однозначно восстановим тригонометрический многочлен

$$\frac{1}{K} E^0(0,\omega) = \frac{1}{K} \sum_{I_n \in \mathscr{I}^n} C(I_n) e^{2i\omega(I_n, X_n)}.$$

Обозначив через D_1 и D_2 коэффициенты Фурье почти периодических функций $\frac{\mathscr{J}^0(\omega)}{i\omega}$ и $\frac{1}{K}E^0(0,\omega)$ при нулевом показателе Фурье, получаем, что

$$K = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Andersson L.-E.* Inverse eigenvalue problems with discontinuous coefficients // Inverse Probl. 1988. V. 4, N 2. P. 353–397.
2. *Andersson L.-E.* Inverse eigenvalue problems for a Sturm–Liouville equation in impedance form // Inverse Probl. 1988. V. 4, N 4. P. 929–971.
3. *Carlson R.* An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with discontinuous coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120, N 2. P. 475–484.
4. *Shepelsky D. G.* The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions // Adv. Soviet Math. 1994. V. 19. P. 209–231.

5. *Шестаков А. И.* Обратная спектральная задача для операторов Штурма — Лиувилля с разрывными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1142–1162.
6. *Гусейнов И. М., Пашаев Р. Т.* Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57, № 3. С. 147–148.
7. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point // Inverse Probl. 2002. V. 18. P. 757–773.
8. *Юрко В. А.* Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях // Мат. заметки. 2008. Т. 83, № 1. С. 139–152.
9. *Седипков А. А.* Восстановление разрывов оператора Штурма — Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Вестн. НГУ. 2012. Т. 12, № 1. С. 114–125.
10. *Sedipkov A. A.* The inverse spectral problem for the Sturm–Liouville operator with discontinuous potential // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. V. 20, N 2. P. 139–167.
11. *Weidmann J.* Spectral theory of ordinary differential operators. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1987. (Lect. Notes Math.; V. 1258).
12. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953.

Статья поступила 19 ноября 2013 г.

Седипков Айдыс Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
sedipkov@math.nsc.ru