Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 591.65

О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА УЗЛОВ ЛАГРАНЖЕВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА

И. А. Шакиров

Аннотация. Поведение констант Лебега, соответствующих двум классическим тригонометрическим интерполяционным полиномам Лагранжа, изучается в зависимости от числа равномерно распределенных на периоде узлов интерполяции, разбитых на три класса. Для констант получены новые точные и приближенные формулы, соответствующие каждому из этих классов; допущенные при этом погрешности оценены равномерно относительно степени рассматриваемых полиномов. Решены две актуальные задачи теории интерполирования, связанные с асимптотическими равенствами для констант Лебега.

Ключевые слова: полиномы Лагранжа, классы узлов интерполяции, равномерная сходимость полиномов, константы Лебега и формулы для их вычисления, оценка погрешности приближенных формул.

Введение

Хорошо известно теоретическое и прикладное значение интерполяционных процессов Лагранжа, в изучение которых весомый вклад внесли соратники и ученики основоположника конструктивной теории функций С. Н. Берштейна. Подробные и хронологически выстроенные сведения о них можно найти в работах [1–11], посвященных различным вопросам теории функций. Например, в [11, с. 296] приведены различные модификации понятия интерполирования функции (лагранжева квазиинтерполяция таблично заданной функции, квазиинтерполяция разрывных функций), в [12, 13] содержатся верхние и нижние оценки фундаментальных характеристик (функций и констант Лебега), соответствующих оператору синк-аппроксимации функции, которые имеют важные приложения в других областях математики.

Данная работа имеет непосредственное отношение к теории равномерного приближения, когда заданная 2π-периодическая функция $x(t) \in C_{2\pi}$ ($C_{2\pi} = \{x \in C[0, 2\pi] \mid x(0) = x(2\pi)\}$) приближается классическими интерполяционными полиномами Лагранжа

$$\Phi_n(x,t) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} x(t_k)D_n(t_k - t) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} x(t_k)D_n(t_k - t) \qquad (1)$$
$$\left(D_n(u) = \frac{\sin(n+0,5)u}{2\sin 0,5u}\right),$$

$$\Phi_n^*(x,t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}x(t_k)D_n^*(t_k-t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}x(t_k)D_n^*(t_k-t)\ \left(D_n^*(u)=\frac{\sin nu}{2\,\mathrm{tg}\,0,5u}\right). \tag{2}$$

Полиномы (1) определены в классе узлов

$$T=\left\{t_k \mid t_k=\frac{2\pi k}{2n+1},\ k=\overline{0,2n}\vee k=\overline{1,2n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}, \tag{3}$$

где количество узлов $N=2n+1$ нечетно, а полиномы (2) — в классе $T^*=\{t_k \mid t_k=\pi k/n,\ k=\overline{0,2n-1}\vee k=\overline{1,2n};\ n\in\mathbb{N}\}$, содержащем четное число $N=2n$ узлов интерполяции (n — степень полинома (1)). В работе существенно используются два подкласса T^*:

$$\begin{gathered}T_1^*=\{t_k \mid t_k=\pi k/n,\ k=\overline{0,2n-1}\vee k=\overline{1,2n};\ n=2m,\ m\in\mathbb{N}\},\\ T_2^*=\{t_k \mid t_k=\pi k/n,\ k=\overline{0,2n-1}\vee k=\overline{1,2n};\ n=2m+1,\ m\in\mathbb{N}\}.\end{gathered} \tag{4}$$

В первом из них число узлов кратно четырем, а во втором — узлов четное число, но не кратно четырем, причем

$$T_1^*\cap T_2^*=\varnothing,\quad T^*=T_2^*\cup T_1^*\cup T_0^*,\quad T_0^*=\{t_1,t_2 \mid t_1=0,\ t_2=\pi\vee t_1=\pi,\ t_2=2\pi\}.$$

При практическом использовании этих полиномов на первый план выходит вопрос об их скорости сходимости к интерполируемой функции $x(t)$, что оценивается согласно фундаментальному неравенству

$$\begin{gathered}\|x-P_nx\|_{C[0,2\pi]}\le(1+\Lambda_n)E_n(x)\\ (P_n:C_{2\pi}\to C_{2\pi} \mid (P_n=\Phi_n,\Lambda_n=\lambda_n)\vee(P_n=\Phi_n^*,\Lambda_n=\lambda_n^*)),\end{gathered} \tag{5}$$

где соответствующие полиномам (1) и (2) константы Лебега имеют следующий вид:

$$\lambda_n=\frac{1}{2n+1}\left(1+2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{cosec}\,\frac{2k+1}{4n+2}\pi\right)=\frac{1}{2n+1}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cosec}\,\frac{2k-1}{4n+2}\pi\right), \tag{6}$$

$$\lambda_n^*=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{ctg}\,\frac{2k+1}{4n}\pi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{ctg}\,\frac{2k-1}{4n}\pi\quad(N=2n). \tag{7}$$

Они были декларированы в работе немецких математиков Элиха и Целлера [14], а в [9, с.43-49] доказаны с учетом продолжения функций Лебега

$$\begin{gathered}\lambda_n(t)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}|D_n(t_k-t)|\quad\left(t\in\left[0,\frac{2\pi}{2n+1}\right]\right),\\ \lambda_n^*(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^*(t_k^*-t)|\quad\left(t\in\left[0,\frac{\pi}{n}\right]\right)\end{gathered} \tag{8}$$

на полный период $[-\pi,\pi]$ и специфических свойств полученных при этом полиномов. В недавней работе автора [15] приведено другое доказательство формул (6) и (7), основанное на полном исследовании на экстремум явно заданных (безмодульных) видов функций (8) с использованием производных до второго порядка включительно.

Первоначально интерполяционные характеристики (6) и (7) оценивались сверху как $\Lambda_n\le O(\ln n)$ либо $\Lambda_n\le A+B\ln n$, например (см. (5)), $\Lambda_n\le 4+\lg n$

[1], $\Lambda_n \le 8 + (4/\pi)\ln n$ [3]. Затем коэффициенты A, B многократно уточнялись, например, в [16] неравенство $\Lambda_n \le 4/\pi + (2/\pi)\ln(2N/\pi)$ установлено для нечетного числа $N = 2n+1$ узлов, а в [17, с. 106] — для четного числа $N = 2n$ узлов интерполяции. В [18, с. 215] для константы Лебега приведено представление $\lambda_{2n-1} = (2/\pi)\ln n + 2(1 - 1/\pi)\theta_n$ ($\theta_n \in (0,1)$), содержащее некоторое уточнение поведения неопределенной константы $O_1(1)$ в первом из последующих асимптотических равенств:

$$\lambda_n \cong (2/\pi)\ln n + O_1(1)\ (N = 2n+1), \quad \lambda_n^* \cong (2/\pi)\ln n + O_2(1)\ (N = 2n, n \to \infty). \tag{9}$$

Во всех этих и других работах для констант λ_n, λ_n^* приведены разной степени строгости верхние оценки, а нижние — в основном отсутствуют либо являются грубыми. Например, упомянутое выше значение неопределенной константы $O_1(1) = 2(1 - 1/\pi)\theta_n$ ($\theta_n \in (0,1)$) может быть сколь угодно близким к нулю, что указывает на нестрогое проведение нижней оценки для константы Лебега.

Задача 1. *Особый интерес представляет случай, когда в* (9) *для неопределенных констант* $O_1(1)$ *и* $O_2(1)$ *определены соответственно наименьшие значения* A_1 *и* A_1^* *так, что для всех натуральных значений параметра* n *выполнены неравенства*

$$\lambda_n \le A_1 + (2/\pi)\ln n\ (N = 2n+1), \quad \lambda_n^* \le A_1^* + (2/\pi)\ln n\ (N = 2n) \tag{10}$$

и оценены допущенные при этом погрешности

$$\varepsilon = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{A_1 + (2/\pi)\ln n - \lambda_n\}, \quad \varepsilon^* = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{A_1^* + (2/\pi)\ln n - \lambda_n^*\}. \tag{11}$$

Данная задача является некоторым обобщением асимптотической проблемы (9). Например, для простейшего равенства $\sin(1/n) \cong 1/n$ ($n \to \infty$) верны уточняющие его соотношения $\sin(1/n) < 1/n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{1/n - \sin(1/n)\} = 1 - \sin 1 < 0.159$. Поиск аналогичных оценок для (9) может быть результативным, если вначале каким-либо способом определены конкретные значения (не обязательно точные асимптотики) констант $O(1)$ ($O_1(1) \vee O_2(1)$).

До формулировки задачи 2 введем в рассмотрение соответствующие неравенствам (10) приближенные равенства

$$\lambda_n \approx (2/\pi)\ln n + A_1\ (N = 2n+1), \quad \lambda_n^* \approx (2/\pi)\ln n + A_1^*\ (N = 2n, n \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

Ясно, что соотношения (10) и (11) в совокупности дадут реальное уточнение (12), как только будут определены конкретные значения неопределенных пока констант A_1, A_1^*, ε, ε^* (см. теоремы 1 и 4).

Задача 2. *В случае положительного решения задачи* 1 *представляет интерес нахождение других (отличных от* A_1, A_1^**) значений* A_2, A_2^* *неопределенных констант* $O_1(1)$, $O_2(1)$ *так, чтобы соответствующие им погрешности*

$$\bar\varepsilon = \sup_{n\ge n_0}\{A_2 + (2/\pi)\ln n - \lambda_n\}\ (N = 2n+1),$$

$$\bar\varepsilon^* = \sup_{n\ge n_0}\{A_2^* + (2/\pi)\ln n - \lambda_n^*\}\ (N = 2n)$$

были меньше по сравнению с найденными в задаче 1 *числами* ε *и* ε^* *(естественно, начиная с некоторого вполне определенного значения* $n_0 \ge 2$*), или определение абсолютных значений погрешностей*

$$\tilde\varepsilon = \sup_{n\in\mathbb{N}}|A_2 + (2/\pi)\ln n - \lambda_n|\ (N = 2n+1), \quad \tilde\varepsilon^* = \sup_{n\in\mathbb{N}}|A_2^* + (2/\pi)\ln n - \lambda_n^*|\ (N = 2n)$$

так, чтобы они также были меньше соответствующих значений ε и ε^*.

В данной работе интерполяционные характеристики λ_n и λ_n^* двух общеизвестных полиномов Лагранжа более детально изучены соответственно в классах узлов (3) и (4). Для константы Лебега λ_n^* получены новые и экономичные с вычислительной точки зрения формулы, выраженные (как и λ_n) только через косекансы. В каждом из рассматриваемых классов соответствующая константа максимально строго оценена сверху и снизу. Затем на основе полученных оценок решены актуальные задачи 1 и 2 теории интерполирования. Отметим, что первая из них является экстремальной задачей, связанной с поиском наименьших значений A_1, A_1^* в неравенствах (10), а вторая задача посвящена улучшению полученных в (11) значений погрешностей ε, ε^*.

Часть результатов данной работы была анонсирована в работе автора [19].

1. Приближенные значения константы Лебега в случае нечетного числа узлов интерполяции (в классе T)

Вначале отметим, что константа Лебега (6), соответствующая классу узлов (3), не может быть представлена в виде равенства $\lambda_n = A + (2/\pi)\ln n$ $(n \in \mathbb{N})$ с асимптотическим коэффициентом $2/\pi$ и фиксированным коэффициентом A (в действительности $A = A(n)$ $(n \in \mathbb{N})$) либо выражена через меньшее количество сумм косекансов, чем в формуле (6).

Ниже в случае класса узлов T определим конкретные числовые значения A_1 и A_2, удовлетворяющие всем предъявленным к ним в задачах 1 и 2 требованиям. Для этого используем более совершенный и строгий способ двусторонней оценки константы Лебега (6), позволяющий решить поставленные задачи в случае нечетного числа узлов интерполяции.

Предварительно докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Функция дискретного аргумента $\alpha_n = \alpha(n) = \frac{1}{(2n+1)\sin(\pi/(4n+2))}$ и нижеследующие ее линейные комбинации являются монотонно убывающими функциями и имеют малые изменения областей своих значений:*

$$\alpha_n \in (2/\pi, 2/3] \subset (0.636, 0.667) \quad (\alpha : N \to R); \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
\varphi_1(n) = \frac{11}{6}\alpha_n - \frac{3}{2} \in \left(\frac{11}{3\pi} - \frac{3}{2}, -\frac{5}{18}\right] \subset (-0.333, -0.277), \\
\varphi_2(n) = 2\alpha_n - \frac{3}{2} \in \left(\frac{4}{\pi} - \frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right] \subset (-0.227, -0.166), \\
\varphi_3(n) = \frac{11}{6}\alpha_n - \frac{5}{3} \in \left(\frac{11}{3\pi} - \frac{5}{3}, -\frac{4}{9}\right] \subset (-0.500, -0.444), \\
\varphi_4(n) = 2\alpha_n - \frac{5}{3} \in \left(\frac{4}{\pi} - \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right] \subset (-0.394, -0.333).
\end{gathered} \tag{14}$$

Доказательство. Представим функцию (последовательность) (13) в другом виде: $\alpha_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi/(4n+2))}{\pi/(4n+2)}\right)^{-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Первая часть утверждения леммы теперь следует из хорошо известных свойств первого замечательного предела.

Справедливость утверждений леммы для функций (14) легко получить, используя их линейную зависимость от функции (13).

Определение 1. Строго монотонную функцию $\varphi = \varphi(n)$ $(n \in D = D(\varphi) \subseteq \mathbb{N})$ дискретного аргумента, имеющую малое изменение δ области значений $R(\varphi)$, назовем *функцией, имеющей малую монотонную вариацию*, и класс таких функций обозначим через $V_\delta^\pm$, где знак $+$ в случае возрастания функции в области $D(\varphi)$ и знак $-$ при ее убывании; $\delta = \delta(\varphi) = \sup\{\varphi(n) \mid n \in D\} - \inf\{\varphi(n) \mid n \in D\}$, $\delta \in (0, 1/2)$.

Рассмотренные в лемме 1 функции принадлежат классу V_δ^-. Например, $\alpha_n = \alpha(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ принадлежит классу V_δ^- с $\delta = 2/3 - 2/\pi \approx 0.031$, т. е. изменение области значений функции α_n достаточно мало. Такую же малую вариацию имеют большинство функций, встречающихся в предыдущих леммах и теоремах, но даже у самой «худшей» из них вариация будет меньше чем 1/2. Множество всех таких функций в определении 1 обозначено символом $V_\delta^\pm$.

Функции из класса $V_\delta^\pm$ имеют определяющее значение в ходе доказательства всех лемм и основных теорем из пп. 1 и 3 работы. При этом часто используются их непрерывные продолжения $\varphi = \varphi(n)$ $(n \in D(\varphi))$ на области $D(\varphi) \subset R$, в которых формулировка и суть определения 1 полностью сохраняются.

Лемма 2. *Нижеследующие зависимости $\varphi_k = \varphi_k(n)$ $(n \in \mathbb{N})$, выраженные через* (13), *являются функциями из класса V_δ^-:*

$$\varphi_5(n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)\alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{4n+2}\right) \in \left(\frac{4}{\pi}, \sqrt{3}\right] \subset (1.273, 1.733), \tag{15}$$

$$\varphi_6(n) = \frac{2}{\pi}\ln\varphi_5(n) \in \left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi}, \frac{1}{\pi}\ln 3\right] \subset (0.153, 0.350),$$

$$\varphi_7(n) = \frac{23}{12}\alpha_n + \varphi_6(n) \in \left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} + \frac{23}{6\pi}, \frac{1}{\pi}\ln 3 + \frac{23}{18}\right] \subset (1.373, 1.628),$$

$$\varphi_8(n) = \varphi_3(n) + \varphi_6(n) \in \left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} + \frac{11}{3\pi} - \frac{5}{3}, \frac{1}{\pi}\ln 3 - \frac{4}{9}\right] \subset (-0.346, -0.094),$$

$$\varphi_9(n) = \varphi_4(n) + \varphi_6(n) \in \left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} - \frac{5}{3}, \frac{1}{\pi}\ln 3 - \frac{1}{3}\right] \subset (-0.240, 0.017),$$

$$\varphi_{10}(n) = \varphi_1(n) + \varphi_6(n) \in \left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} + \frac{11}{3\pi} - \frac{3}{2}, \frac{1}{\pi}\ln 3 - \frac{5}{18}\right] \subset (-0.180, 0.072),$$

$$\varphi_{11}(n) = \varphi_2(n) + \varphi_6(n) \in \left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} - \frac{3}{2}, \frac{1}{\pi}\ln 3 - \frac{1}{6}\right] \subset (-0.073, 0.184).$$

Доказательство. Функция $\varphi_5 = \varphi_5(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ представлена в виде произведения трех функций, первые две из которых убывающие, а косинус является возрастающей функцией. С целью исследования функции (15) при помощи производной непрерывно продолжим ее на область $D = [1, +\infty) \subset R$, где она к тому же является гладкой функцией, т. е. $\varphi_5(n) \in C[1, +\infty)$. Для ее производной в области D выполняется строгое неравенство

$$\varphi_5'(n) = \left(\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n+2}\right)' = \frac{1}{n^2}(\alpha_n)^2\left[n\pi - (2n+1)^2\cos\frac{\pi}{4n+2}\cdot\sin\frac{\pi}{4n+2}\right]$$
$$= -\frac{\pi}{n}(\alpha_n)^2\left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\frac{\sin(2\pi/(2n+1))}{\pi/(2n+1)} - 1\right] < 0,$$

в котором выражение в квадратных скобах имеет разложение вида $\frac{1}{2n}\bigl(1 - \frac{\pi^2}{3!}\cdot \frac{1}{2n+1} + \frac{\pi^4}{5!}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3} - \dots\bigr)$, принимающее строго положительные значения при любых значениях аргумента $n \in D$. Поэтому $\varphi_5 = \varphi_5(n)$ является монотонно убывающей функцией в области своего определения. Для ее образа и вариации имеем $R(\varphi_5) = (4/\pi, \sqrt{3}] \subset (1.273, 1.733)$, $\delta = \delta(\varphi_5) = \sqrt{3} - 4/\pi \approx 0.459$. Следовательно, $\varphi_5 \in V_\delta^-$.

Для функции $\varphi_6 = \varphi_6(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ справедливость утверждения леммы получим, используя основное свойство логарифма и несложные вычисления, а для функций $\varphi_7(n)$–$\varphi_{11}(n)$ утверждения леммы очевидны.

Теорема 1. *В случае класса узлов T первое приближенное равенство в* (12) *при $A_1 = 5/3$ и произвольно выбранных натуральных значениях параметра n ведет себя как неравенство*

$$\lambda_n \le \frac{5}{3} + \frac{2}{\pi}\ln n = \mu_n \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{16}$$

при этом для погрешности $\varepsilon_n = \mu_n - \lambda_n$ равномерно относительно параметра n верна оценка

$$\varepsilon = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n = \frac{5}{3} - \frac{11}{3\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} < 0.346. \tag{17}$$

Доказательство. Константу λ_n максимально строго оценим сверху и снизу, существенно используя при этом ее явный вид (6), узлы интерполяции (3), геометрические свойства косеканса и определенного интеграла, а также обозначения функций из лемм 1 и 2:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n+1} + \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec}\frac{t_k - \pi/(2n+1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n+1} + \frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{1}{\sin 0.5(t_1 - \pi/(2n+1))} + \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=2}^{n}\operatorname{cosec}\frac{t_k - \pi/(2n+1)}{2}\right] \\
&= 2\frac{1}{(2n+1)\sin(\pi/(4n+2))} + \frac{1}{\pi}\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\operatorname{cosec}\ 0.5(t_k - \pi/(2n+1)) + \frac{\pi}{2n+1}\cdot 1\right] \\
&< 2\alpha_n + \frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{\pi}\frac{1}{\sin(t/2)}\,dt = 2\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n+2} \\
&= 2\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln\frac{n(2n+1)\cos(\pi/(4n+2))}{n(2n+1)\sin(\pi/(4n+2))} \\
&= 2\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln\left[\left(2 + \frac{1}{n}\right)\alpha_n\cos\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)\right] + \frac{2}{\pi}\ln n = 2\alpha_n + \varphi_6(n) + \frac{2}{\pi}\ln n \quad \forall n \in \mathbb{N};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= 2\frac{1}{(2n+1)\sin(\pi/(4n+2))} + \frac{1}{\pi}\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{2\pi}{2n+1}\operatorname{cosec}\ 0.5(t_k - \pi/(2n+1)) + \frac{\pi}{2n+1}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left(2\pi\alpha_n\cdot\frac{3}{4} + 2\pi\alpha_n\cdot\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{\pi}\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\operatorname{cosec}\ 0.5(t_k - \pi/(2n+1)) + \frac{\pi}{2n+1}\cdot 1\right] \\
&> \frac{3}{2}\alpha_n + \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin(\pi/(4n+2))} - 1\right)\cdot\frac{1}{2}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sin(3\pi/(4n+2))} - 1\right)\cdot\frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{t_1}^{\pi}\frac{1}{\sin(t/2)}\,dt=\frac{3}{2}\alpha_n+\frac{1}{4}\alpha_n+\frac{1}{4}\alpha_n\cdot\frac{1}{4\cos^2(\pi/(4n+2))-1}+\frac{2}{\pi}\ln\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n+2}$$
$$>\frac{3}{2}\alpha_n+\frac{1}{4}\alpha_n+\frac{1}{12}\alpha_n+\frac{2}{\pi}\ln\left[\left(2+\frac{1}{n}\right)\alpha_n\cos\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)\right]+\frac{2}{\pi}\ln n$$
$$=\frac{11}{6}\alpha_n+\varphi_6(n)+\frac{2}{\pi}\ln n,$$

где в процессе получения нижней оценки дополнительно использовано неравенство $1/[4\cos^2(\pi/(4n+2))-1]>1/3$, $n\in\mathbb{N}$.

Следовательно, для константы Лебега имеем двустороннюю оценку, справедливую при всех натуральных значениях параметра (аргумента) n:

$$\frac{11}{6}\alpha_n+\varphi_6(n)+\frac{2}{\pi}\ln n<\lambda_n<2\alpha_n+\varphi_6(n)+\frac{2}{\pi}\ln n,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{18}$$

Беря в качестве приближенного значения λ_n полусумму ее верхней и нижней оценок из (18) и заменяя затем в полученном выражении отличную от главного члена $(2/\pi)\ln n$ часть с малой погрешностью константой $5/3$, получим

$$\lambda_n\approx\frac{23}{12}\alpha_n+\varphi_6(n)+\frac{2}{\pi}\ln n=\varphi_7(n)+\frac{2}{\pi}\ln n\approx\frac{5}{3}+\frac{2}{\pi}\ln n=\mu_n,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{19}$$

При $n=1$ в (19) имеет место точное равенство $\lambda_1=\mu_1=5/3$ и выполняется двойное неравенство (18) ($(11/6)\alpha_1+\varphi_6(1)<\lambda_1<2\alpha_1+\varphi_6(1)\Rightarrow 1.571<\lambda_1<1.684$) с достаточно малым отклонением θ_1 значения верхней оценивающей функции в (18) от нижнего значения ($\theta_1=(1/6)\alpha_1=1/9$). Нетрудно убедиться, что

$$\theta_n=(1/6)\cdot\alpha_n\in(1/3\pi,1/9],\quad \theta=\sup\{\theta_n\mid n\in\mathbb{N}\}=1/9<0.112.$$

Другими словами, в неравенстве (18) верхняя и нижняя оценивающие константу λ_n функции достаточно близки между собой в области $D=[1,+\infty)$.

Определим допущенную в приближенной замене (19) погрешность. Для этого в двойном неравенстве (18) вычтем всюду $\mu_n=\frac{5}{3}+\frac{2}{\pi}\ln n$. Используя введенные в леммах 1 и 2 обозначения для функций и содержащиеся сведения об их поведении, получим

$$\frac{11}{6}\alpha_n-\frac{5}{3}+\varphi_6(n)<\lambda_n-\mu_n<2\alpha_n-\frac{5}{3}+\varphi_6(n)\Leftrightarrow\frac{5}{3}-2\alpha_n-\varphi_6(n)<\mu_n-\lambda_n$$
$$<\frac{5}{3}-\frac{11}{6}\alpha_n-\varphi_6(n)\Leftrightarrow-(\varphi_4(n)+\varphi_6(n))<\varepsilon_n<-(\varphi_3(n)+\varphi_6(n))\quad\forall n\in\mathbb{N}$$
$$\Rightarrow-\varphi_9(n)<\varepsilon_n<-\varphi_8(n)\quad(-\varphi_8(n),-\varphi_9(n)\in V_\delta^+;\ n\in\mathbb{N}). \tag{20}$$

В неравенствах (18), (20) и приближенной замене (19) участвуют только функции из классов $V_\delta^\pm$ (за исключением $(2/\pi)\ln n$), о которых исчерпывающие сведения содержатся в леммах 1 и 2. Поэтому в неравенстве (16) при произвольно взятых натуральных значениях аргумента n следует ожидать малое расхождение величин λ_n и μ_n. Для подтверждения сказанного более подробно изучим свойства функций, входящих в неравенство (20).

При $n=1$ соотношение (20) превращается в верное числовое неравенство: $-\varphi_9(1)<\varepsilon_1<-\varphi_8(1)\Leftrightarrow\frac{5}{3}-2\alpha_1-\frac{1}{\pi}\ln 3<\frac{5}{3}-\frac{5}{3}<\frac{5}{3}-\frac{11}{6}\alpha_1-\frac{1}{\pi}\ln 3\Rightarrow$

$-0.016 < 0 < 0.195$, а при остальных ($n \geq 2$) значениях аргумента n для функций $-\varphi_8(n), -\varphi_9(n) \in V_\delta^+$ имеем

$$R(-\varphi_8) = \left[\frac{5}{3} - \frac{11}{30}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{10} + \frac{2}{\pi}\ln\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\right), \frac{5}{3} - \frac{11}{3\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi}\right) \subset (0.205, 0.346),$$

$$R(-\varphi_9) = \left[\frac{5}{3} - \frac{2}{5}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{10} + \frac{2}{\pi}\ln\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\right), \frac{5}{3} - \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi}\right) \subset (0.097, 0.240).$$

Теперь ясно, что функция погрешности $\varepsilon_n = \varepsilon(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) является неотрицательной ($n = 1 \Rightarrow (\varepsilon_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \mu_1); n \geq 2 \Rightarrow (\varepsilon_n > -\varphi_9(n) > 0 \Leftrightarrow \lambda_n < \mu_n)$), возрастающей и ограниченной снизу и сверху функцией ($-\varphi_8(n), -\varphi_9(n) \in V_\delta^+; R(\varepsilon_n) \subset \left[0, \frac{5}{3} - \frac{11}{3\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi}\right) \subset [0, 0.346)$, $n \in \mathbb{N}$). Следовательно, $\varepsilon_n \in V_\delta^+$ и

$$\varepsilon_n < \sup\{\varepsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{-\varphi_8(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \frac{5}{3} - \frac{11}{3\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} < 0.346. \quad (21)$$

Результаты проведенных исследований функции погрешности полностью подтверждают справедливость соотношений (16) и (17).

Замечание 1. Оценка (21) проведена равномерно относительно параметра n. Она является достаточно грубой для начальных значений n, что немедленно следует из соотношений (20), (21) и установленных выше свойств функции погрешности $\varepsilon_n = \varepsilon(n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Для значений параметра $n \gg 1 \vee n \to \infty$ она вполне хорошая, так как две бесконечно большие величины μ_n, λ_n ($n \gg 1 \vee n \to \infty$) различаются друг от друга на величину, меньшую чем 0.346.

Введем в рассмотрение другое асимптотическое равенство:

$$\lambda_n \cong 3/2 + (2/\pi)\ln n = \bar{\mu}_n \quad (n \to \infty) \quad (22)$$

с коэффициентом $O_1(1) = A_2 = 3/2$, который позволяет уменьшить полученную в теореме 1 погрешность ε и, таким образом, порождает решение задачи 2.

Теорема 2. *В случае класса узлов T для правой и левой частей асимптотического равенства* (22) *начиная со значения параметра $n = 5$ выполняется неравенство*

$$\lambda_n < \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\ln n = \bar{\mu}_n \quad \forall n \geq 5, \quad (23)$$

при этом для погрешности $\bar{\varepsilon}_n = \bar{\mu}_n - \lambda_n$ справедлива оценка

$$\bar{\varepsilon} = \sup_{n \geq 5}\bar{\varepsilon}_n = \sup_{n \geq 5}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\ln n - \lambda_n\right) < 0.180, \quad (24)$$

а для абсолютного значения погрешности $|\bar{\varepsilon}_n| = |\bar{\mu}_n - \lambda_n|$ равномерно относительно всех натуральных значений параметра верна оценка

$$\tilde{\varepsilon} = \sup_{n \in \mathbb{N}}|\bar{\varepsilon}_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}}\left|\frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\ln n - \lambda_n\right| < 0.184. \quad (25)$$

Доказательство. Используем схему обоснования и результаты предыдущей теоремы. В этом случае полусумму верхней и нижней оценок из (18) с небольшой погрешностью заменим выражением вида $\frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\ln n$. Для константы Лебега (6) получим следующее приближенное равенство:

$$\lambda_n \approx \frac{23}{12}\alpha_n + \varphi_6(n) + \frac{2}{\pi}\ln n \approx \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\ln n = \bar{\mu}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Здесь для первой составляющей $A_2 = 3/2$ функции $\bar{\mu}_n = \bar{\mu}(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ выполнены условия $A_2 < A_1$ $(A_1 = 5/3$ определена в предыдущей теореме), $A_2 \in u_1(5/3) = [5/3, 5/3 - \varepsilon]$, где $\varepsilon = \frac{5}{3} - \frac{11}{3\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} \approx 0.346$ — константа из соотношения (21). Ниже увидим, что выполнение этих условий позволит решить задачу 2 и обосновать оценки (24), (25).

Предположим, что $O_1(1) = A \notin u_1(5/3)$. Тогда уменьшение погрешности ε становится невозможным. Сказанное следует из поведения графиков функций

$$y = \mu_n = \mu(n), \quad y = \lambda_n = \lambda(n), \quad y = \bar{\mu}_n = \bar{\mu}(n),$$
$$(y = \mu(n, A) = A + \frac{2}{\pi}\ln n \quad (n \in [1, +\infty)), \tag{26}$$

определенных в координатной системе nOY. Все они являются возрастающими функциями логарифмического типа. Графики первых двух из них при значении $n = 1$ имеют общую вершину $M_1 = M_1(1, 5/3)$, и согласно результатам, полученным в конце доказательства теоремы 1, для них верно строгое неравенство $\lambda(n) < \mu(n)$ $(n \geq 2)$. График третьей функции имеет вершину $M_2 = M_2(1, 3/2)$. Варьирование коэффициента A передвигает вершину $M = M(1, A)$ графика функции $y = \mu(n, A)$ по прямой $n - 1 = 0$ (соответственно параллельно переносится и ее график). На границах отрезка $u_1(5/3)$ имеем следующий результат:

если $A = A_1 = 5/3$, то $\mu(n, 5/3) \equiv \mu(n)$ $(n \in [1, +\infty))$;

если $A = 5/3 - \varepsilon$, то $\mu(n, 5/3 - \varepsilon) = 5/3 - \varepsilon + (2/\pi)\ln n = \mu(n) - \varepsilon$ $(n \in [1, +\infty))$, т. е. в рассматриваемой области $[1, +\infty)$ график функции $y = \lambda(n)$ находится выше, чем график функции $y = \mu(n, 5/3 - \varepsilon)$. При этом расстояние между ними равно ранее установленной величине ε, которая достигается при $n = 1$. Следовательно, коэффициент A, находясь за пределами промежутка $u_1(5/3)$, приводит к увеличению соответствующей погрешности относительно величины ε. Таким образом, для разрешимости задачи 2 неопределенный коэффициент A необходимо выбрать внутри отрезка $u_1(5/3)$, что и сделано выше: $A_2 = 3/2 \in (5/3, 5/3 - \varepsilon)$.

Далее, вычитая всюду в двойном неравенстве (18) функцию $\bar{\mu}_n = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\ln n$ $(n \in \mathbb{N})$, после некоторых упрощений получим

$$\frac{11}{6}\alpha_n - \frac{3}{2} + \varphi_6(n) < \lambda_n - \bar{\mu}_n < 2\alpha_n - \frac{3}{2} + \varphi_6(n) \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 2\alpha_n - \varphi_6(n) < \bar{\mu}_n - \lambda_n$$
$$< \frac{3}{2} - \frac{11}{6}\alpha_n - \varphi_6(n) \Leftrightarrow -(\varphi_2(n) + \varphi_6(n)) < \bar{\mu}_n - \lambda_n < -(\varphi_1(n) + \varphi_6(n)) \; \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow -\varphi_{11}(n) < \bar{\varepsilon}_n < -\varphi_{10}(n) \forall n \in \mathbb{N}, \; (-\varphi_{10}(n), -\varphi_{11}(n) \in V_\delta^+). \tag{27}$$

В неравенстве (27) для верхней и нижней оценивающих $\bar{\varepsilon}_n$ функций верны утверждения:

всюду возрастающие функции $-\varphi_{10}(n)$, $-\varphi_{11}(n)$, как показывают элементарные расчеты, одновременно положительны лишь начиная со значения параметра $n = 5$, что и доказывает справедливость неравенства (23) ($\bar{\varepsilon}_n > 0$ $\forall n \geq 5 \Rightarrow \lambda_n < \bar{\mu}_n$ $\forall n \geq 5$); более того, учитывая результаты леммы 2, для них имеем

$$n \geq 5 \Rightarrow 0 < -\varphi_{10}(n) < \frac{3}{2} - \frac{11}{3\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} < 0.180,$$
$$0 < -\varphi_{11}(n) < \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} < 0.073;$$

для их абсолютных значений верны следующие оценки:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow |-\varphi_{10}(n)| < \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} < 0.180, \quad |-\varphi_{11}(n)| \leq \frac{1}{\pi}\ln 3 - \frac{1}{6} < 0.184.$$

Переходя в полученных неравенствах к точной верхней грани по аргументу n ($n \geq 5$ и $n \in \mathbb{N}$ соответственно), получим справедливость неравенств (24) и (25).

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание 2. Величины $\bar{\varepsilon}$ и $\tilde{\varepsilon}$ в действительности являются несколько грубыми, что связано с издержками методов их получения. Например, числовые значения погрешности $\bar{\varepsilon}_n = 3/2 + (2/\pi)\ln n - \lambda_n$ ($n \geq 5$), вычисленные при первоначальных значениях аргумента ($\bar{\varepsilon}_5 \approx 0.0352$, $\bar{\varepsilon}_6 \approx 0.0450$, $\bar{\varepsilon}_7 \approx 0.0521, \dots$), оказываются более чем на порядок лучшими, чем величина теоретически полученной погрешности $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} - \frac{11}{3\pi} - \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} \approx 0.179$.

Замечание 3. Константа $A_1 = 5/3$ является единственным решением экстремальной задачи 1 в случае класса узлов T, т. е. $\min\{A \in R \mid \lambda_n \leq A + (2/\pi)\ln n,\ n \in \mathbb{N}\} = A_1 = 5/3$. Сказанное следует из неравенства (16) и выводов о поведении графиков функций $y = \mu(n)$, $y = \lambda(n)$, сделанных в ходе доказательства теоремы 1 (см. рассуждения после (26)). Константа $A_2 = 3/2$ является решением задачи 2. Однако вместо нее можно было выбрать другое число, например $A_3 = \pi/2 \in u_1(5/3)$ ($\pi/2 \approx 3/2$), которое расположено ближе (чем число $3/2$) к центру отрезка $u_1(5/3)$, и провести заново все вышеприведенные расчеты. Другими словами, задача 2 имеет не единственное решение (в отличие от задачи 1, она по своей постановке не является экстремальной задачей).

2. Точные значения констант Лебега, соответствующие классам узлов T_1^* и T_2^*

Покажем, что константа λ_n^* (см. формулу (7)) допускает новые и более практичные представления, зависящие от выбора класса узлов (4).

Используя известные тригонометрические зависимости и свойства узлов из класса T^*, представим константу Лебега (7) в виде суммы двух групп слагаемых:

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{t_k - \pi/2n}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} = \frac{2\cos^2 0.5(t_k - \pi/2n)}{\sin(t_k - \pi/2n)}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\cos(t_k - \pi/2n)}{\sin(t_k - \pi/2n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin(t_k - \pi/2n)} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(t_k - \pi/2n)}{\sin(t_k - \pi/2n)}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec}\left(t_k - \frac{\pi}{2n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}\left(t_k - \frac{\pi}{2n}\right) \quad (t_k = \pi k/n).$$

Здесь вторая сумма равна нулю для обоих классов узлов T_1^*, T_2^*. Действительно, если узлы интерполяции t_k взяты из класса T_1^*, то их на отрезке $[0,\pi]$ четное число. При этом аргументы котангенса $t_k - \pi/2n$ расположены попарно симметрично относительно центра $\pi/2$ интервала $(0,\pi)$. В них соответствующие значения котангенса равны и имеют противоположные знаки, следовательно, вторая сумма равна нулю. Случай $t_k \in T_2^*$ отличается от предыдущего только тем, что узлов на $[0,\pi]$ нечетное число. При значениях параметра $n \geq 2$ центральный непарный аргумент котангенса $t_{[n/2]+1} - \pi/2n$ всегда совпадает с $\pi/2$, где котангенс обращается в нуль ($[z]$ — целая часть числа z).

Итак, получили новое представление для константы Лебега, выраженное через сумму косекансов одинарного аргумента:

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}(t_k - \pi/2n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (t_k = \pi k/n,\ n \in \mathbb{N}). \tag{28}$$

С целью дальнейшего упрощения формулы (28) рассмотрим три случая выбора параметра n (n — степень приближающего полинома (2)):

1) $n = 1$ (порождает класс T_0^*, тривиальный случай);

2) $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ (порождает класс T_1^*, соответствующий приближению полиномами вида (2) четной степени, что равносильно интерполированию по узлам, число которых кратно четырем);

3) $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$ (порождает класс T_2^*, соответствующий приближению заданной функции полиномами (2) нечетной степени, кроме первой).

В тривиальном случае приближающий функцию $x(t) \in C[0, 2\pi]$ интерполяционный полином $\Phi_1^*(x,t)$ и соответствующие ему фундаментальные характеристики имеют следующий вид (см. соответственно формулы (2), (7), (8) при значении параметра $n = 1$):

$$\Phi_1^*(x,t) = \frac{1}{2}[x(0) + x(\pi)] + \frac{1}{2}[x(0) - x(\pi)]\cos t\ (t \in [0, 2\pi]), \quad \lambda_1^* = 1,\ \lambda_1^*(t) \equiv 1.$$

Рассмотрим случай, соответствующий классу T_1^*. В формуле (28) аргументы синуса, число которых на отрезке $[0, \pi]$ четно, расположены попарно симметрично относительно центра $\pi/2$ промежутка $(0, \pi)$ и в них соответствующие значения косекансов совпадают. Следовательно, формула (28) упрощается с уменьшением вычислительных затрат ровно в два раза и имеет следующий более простой вид:

$$\lambda_n^* = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{[n/2]} \operatorname{cosec}\frac{2k-1}{2n}\pi \Leftrightarrow \lambda_{2m}^* = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec}\frac{2k-1}{4m}\pi \quad (n = 2m,\ m \in \mathbb{N}). \tag{29}$$

В третьем случае, как отмечено ранее, узлов на отрезке $[0, \pi]$ нечетное число. При этом в формуле (28) центральный непарный аргумент $t_{[n/2]+1} - \pi/2n$ ($n \geq 2$) совпадает с $\pi/2$, где значение косеканса равно единице. В остальных симметрично расположенных относительно центра интервала $(0, \pi)$ аргументах $t_k - \pi/2n$ соответствующие значения косекансов равны. С учетом сказанного формула (28) также преобразуется к более простому с точки зрения ее вычисления виду

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{[n/2]} \operatorname{cosec}\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \Leftrightarrow \lambda_{2m+1}^* = \frac{1}{2m+1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec}\frac{2k-1}{4m+2}\pi\right) \quad (n = 2m+1). \tag{30}$$

Таким образом, для константы Лебега λ_n^* получены новые и более простые, чем (7), представления (28)–(30), зависящие от выбора класса узлов T, T_1^*, T_2^* соответственно.

Замечание 4. Преимущества формул (29), (30) перед (28), а также (28) перед (7) с вычислительной точки зрения (т. е. вычисления этих констант с использованием вполне определенного количества числа операций) вполне обозримы и не требуют дополнительных комментариев.

Замечание 5. Соответствующие различным классам T и T_2^* формулы (6) и (30) для констант Лебега λ_n и $\lambda_n^* = \lambda_{2m+1}^*$ имеют совершенно одинаковую структуру. Однако в случае совпадения степеней соответствующих им классических полиномов Лагранжа (1) и (2) (т. е. при нечетных значениях параметра $n = 2m+1$) формула (30) с вычислительной точки зрения в два раза экономичнее, чем (6). При этом всегда имеет место неравенство $\lambda_n > \lambda_n^*$, что согласно фундаментальному неравенству (5) убедительно демонстрирует выигрышность приближения заданной функции полиномами Лагранжа (2).

Замечание 6. В формулах (29), (30) константы Лебега выражены только через сумму косекансов, что позволит ниже применить для них использованный в п. 1 алгоритм решения задач 1 и 2.

3. Приближенные значения константы Лебега, соответствующие классам узлов T_1^* и T_2^*

Как и в случае класса узлов T, предварительно установим две вспомогательные леммы, имеющие первостепенное значение при доказательстве основных теорем данного пункта. Исходя из целесообразности, в этих леммах и теореме 3 тривиальный случай ($n = 1 \Rightarrow \lambda_1^* = 1$, $\lambda_1^*(t) \equiv 1$) исключен из рассмотрения.

Лемма 3. *Функция дискретного аргумента* $\alpha_n^* = \alpha^*(n) = \frac{1}{n}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n}$ ($n \geq 2$) *принадлежит классу* V_δ^-, *а для ее образа и вариации верны соотношения*

$$R(\alpha_n^*) = (2/\pi, \sqrt{2}/2] \subset (0.636, 0.708); \quad \delta = \delta(\alpha_n^*) = \sqrt{2}/2 - 2/\pi < 0.071. \tag{31}$$

Доказательство. Рассматриваемая функциональная зависимость (последовательность) $\alpha_n^* = \alpha^*(n)$ является дискретным аналогом равномерно убывающей на промежутке $D^* = [2, +\infty) \subset R$ непрерывно дифференцируемой функции $y = (1/x)\operatorname{cosec}(\pi/2x)$, имеющей образ $R(y) = (2/\pi, \sqrt{2}/2] \subset (0.636, 0.708)$ и вариацию $\delta(y) = \sqrt{2}/2 - 2/\pi$. Следовательно, функция α_n^* принадлежит V_δ^-, и для нее выполнены соотношения (31).

Лемма 4. *Нижеследующие зависимости, определенные в области* D^* *и выраженные через последовательность* α_n^*, *являются функциями из класса* V_δ^+:

$$\begin{gathered}
\varphi_1^*(n) = 1 - \alpha_n^* \in [1 - \sqrt{2}/2, 1 - 2/\pi) \subset (0.292, 0.364),\\
\varphi_2^*(n) = 1 - 2\alpha_n^* \in [1 - \sqrt{2}, 1 - 4/\pi) \subset (-0.415, -0.273),\\
\varphi_3^*(n) = \alpha_n^* \cos(\pi/2n) \in [1/2, 2/\pi) \subset (0.499, 0.637),\\
\varphi_4^*(n) = \frac{2}{\pi}\ln\varphi_3^*(n) \in \left[-\frac{2}{\pi}\ln 2, -\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right) \subset (-0.442, -0.287).
\end{gathered} \tag{32}$$

Доказательство. Справедливость утверждений леммы для функций $\varphi_1^*(n)$, $\varphi_2^*(n)$ легко получим, используя их линейную зависимость от α_n^*.

С целью исследования поведения остальных функций из (32) непрерывно продолжим их (как и в случае леммы 2) на область D^*, где они являются к тому же и гладкими функциями, т. е. $\varphi_k^* = \varphi_k^*(n) \in C[2, +\infty)$ $(k = 3, 4)$. Вычислим и оценим производную первой из них:

$$(\varphi_3^*)' = -(\alpha_n^*)^2\left(1 - \frac{\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n}(\alpha_n^*)^2\sin^2\frac{\pi}{2n}$$
$$= (\alpha_n^*)^2\left(\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2n}(\alpha_n^*)^2\left(1 - \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}\right) > 0 \quad \forall n \in D^*.$$

Поэтому она монотонно возрастает; $R(\varphi_3^*) = [1/2, 2/\pi) \subset [0.500, 0.637)$, $\delta(\varphi_3^*) < 0.137$, следовательно, $\varphi_3^* \in V_\delta^*$.

Для функции $\varphi_4^*(n)$ имеем $(\varphi_4^*)' = \frac{2}{\pi\varphi_3^*}(\varphi_3^*)' > 0$ $\forall n \in D^*$. Следовательно, она также монотонно возрастает в области D^*, и, как нетрудно убедиться, $\varphi_4^* \in V_\delta^*$.

Лемма 4 полностью доказана.

Для нормы $\|\Phi_n^*\| = \lambda_n^*$ оператора $\Phi_n^* : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, соответствующего интерполяционному полиному (2), имеет место асимптотическое равенство $\lambda_n^* \cong (2/\pi)\ln n + O_2(1)$ (см. (9)). Ниже установим, что неопределенную константу $O_2(1)$ можно заменить единицей, сохраняя достаточно малое расхождение левой и правой частей данного асимптотического равенства при любых натуральных значениях параметра n. Допущенную при этом погрешность оценим равномерно относительно n.

Теорема 3. *Для константы Лебега* (7), *определенной формулами* (29) *и* (30), *справедлива следующая двусторонняя оценка:*

$$\frac{11}{6}\alpha_n^* + \varphi_4^*(n) + \frac{2}{\pi}\ln n < \lambda_n^* \le 2\alpha_n^* + \varphi_4^*(n) + \frac{2}{\pi}\ln n \quad (n = 2m \vee n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}). \tag{33}$$

Доказательство. Вначале заметим, что равенство в верхней оценке двойного неравенства (33) имеет место только при $n = 2$, т. е. когда интерполирование заданной функции проводится полиномом (2) по четырем узлам из класса T_1^*:

$$\lambda_2^* = \frac{2}{2}\sum_{k=1}^{[2/2]}\operatorname{cosec}\frac{2k-1}{2\cdot 2}\pi = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$

$$2\alpha_2^* + \varphi_4^*(2) + \frac{2}{\pi}\ln 2 = 2\frac{1}{2\sin(\pi/4)} + \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\pi}\ln 2 = \sqrt{2}.$$

Докажем неравенство (33) в случае класса узлов T_1^*. Для этого константу Лебега $\lambda_n^* = \lambda_{2m}^*$ $(m \in \mathbb{N})$ оценим сверху и снизу, используя при этом формулу (29), леммы 3 и 4, а также свойства определенного интеграла и косеканса:

$$\lambda_n^* = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{[n/2]}\operatorname{cosec}\frac{2k-1}{2n}\pi = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{1}{\sin(t_k - \pi/2n)}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sin(t_1 - \pi/2n)}\cdot\frac{\pi}{n}\right.$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{[n/2]}\frac{1}{\sin(t_k - \pi/2n)}\cdot\frac{\pi}{n}\right]$$
$$\le \frac{2}{n\sin(\pi/n - \pi/2n)} + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\,dt = \frac{2}{n\sin(\pi/2n)} + \frac{2}{\pi}\ln\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$$

$$= 2\alpha_n^* + \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{n\cos(\pi/2n)}{n\sin(\pi/2n)}\right) = 2\alpha_n^* + \frac{2}{\pi}\ln\left(\alpha_n^*\cos\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{\pi}\ln n = 2\alpha_n^* + \varphi_4^* + \frac{2}{\pi}\ln n;$$

$$\begin{aligned}\lambda_n^* &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)} + \sum_{k=2}^{[n/2]}\frac{1}{\sin(t_k-\pi/2n)}\cdot\frac{\pi}{n}\right]\\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)}\cdot\frac{3}{4} + \left[\frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)}\cdot\frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{[n/2]}\frac{1}{\sin(t_k-\pi/2n)}\cdot\frac{\pi}{n}\right]\right\}\\ &> \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin(\pi/2n)}\cdot\frac{3}{4} + \frac{\pi}{n}\cdot 1\cdot\frac{1}{4} + \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{\sin(\pi/2n)} - 1\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\pi}{n}\cdot\left(\frac{1}{\sin(3\pi/2n)} - 1\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\,dt = 2\left[\frac{3}{4}\alpha_n^* + \frac{1}{4n} + \frac{1}{8}\alpha_n^* - \frac{1}{8n} + \frac{1}{8n\sin(3\pi/2n)} - \frac{1}{8n}\right] + \frac{2}{\pi}\ln\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$$

$$\begin{aligned}&= 2\alpha_n^*\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4\cos^2(\pi/2n) - 1}\right] + \frac{2}{\pi}\ln\frac{n\cos(\pi/2n)}{n\sin(\pi/2n)}\\ &> 2\alpha_n^*\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right] + \frac{2}{\pi}\ln n + \frac{2}{\pi}\ln\left(\alpha_n^*\cos\frac{\pi}{2n}\right)\\ &= \frac{11}{6}\alpha_n^* + \frac{2}{\pi}\ln\left(\alpha_n^*\cos\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{\pi}\ln n = \frac{11}{6}\alpha_n^* + \varphi_4^*(n) + \frac{2}{\pi}\ln n\\ &\qquad\left(\frac{1}{4\cos^2(\pi/2n) - 1} > \frac{1}{3}\ \forall n \geq 2\right).\end{aligned}$$

В случае класса узлов T_1^* справедливость двойного неравенства (33) полностью установлена.

Теперь по тому же алгоритму оценим сверху и снизу константу Лебега $\lambda_n^* = \lambda_{2m+1}^*$ $(m \in \mathbb{N})$, используя на этот раз формулу (30):

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\operatorname{cosec}\frac{2k-1}{2n}\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n} + \sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{1}{\sin(t_k-\pi/2n)}\cdot\frac{\pi}{n}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)} + \left(\sum_{k=2}^{[n/2]}\frac{1}{\sin(t_k-\pi/2n)}\cdot\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right)\right] < 2\alpha_n^* + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\,dt$$

$$= 2\alpha_n^* + \frac{2}{\pi}\ln\left(\alpha_n^*\cos\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{\pi}\ln n = 2\alpha_n^* + \varphi_4^*(n) + \frac{2}{\pi}\ln n;$$

$$\lambda_n^* = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)} + \left(\sum_{k=2}^{[n/2]}\frac{1}{\sin(t_k-\pi/2n)}\cdot\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\cdot 1\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)} + \frac{\pi}{4n} + \left[\frac{\pi}{4n}\left(\frac{1}{\sin(\pi/n)} - 1\right) + \sum_{k=2}^{[n/2]}\frac{1}{\sin(t_k-\pi/2n)}\cdot\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\cdot 1\right]\right\}$$

$$> \frac{2}{\pi}\left[\frac{3\pi}{4n\sin(\pi/2n)} + \frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{4n}\left(\frac{1}{\sin(\pi/2n)} - 1\right)\cdot\frac{1}{2}\right.$$

$$+\frac{\pi}{4n}\left(\frac{1}{\sin(3\pi/2n)}-1\right)\cdot\frac{1}{2}+\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\,dt\Bigg]$$

$$=\frac{3}{2}\alpha_n^*+\frac{1}{4}\alpha_n^*+\frac{1}{4}\alpha_n^*\cdot\frac{1}{4\cos^2(\pi/2n)-1}+\frac{2}{\pi}\ln\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}=\frac{11}{6}\alpha_n^*+\varphi_4^*(n)+\frac{2}{\pi}\ln n.$$

В случае класса узлов T_2^* неравенство (33) выполняется в строгом варианте:

$$\frac{11}{6}\alpha_n^*+\varphi_4^*(n)+\frac{2}{\pi}\ln n<\lambda_n^*<2\alpha_n^*+\varphi_4^*(n)+\frac{2}{\pi}\ln n\quad(n=2m+1,\ m\in\mathbb{N}).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Второе приближенное равенство из* (12)*, соответствующее классу узлов T^*, при $A_1^*=1$ и для произвольно взятых натуральных значений параметра n ведет себя как неравенство*

$$\lambda_n^*\le 1+\frac{2}{\pi}\ln n=\mu_n^*\quad(n\in\mathbb{N});\tag{34}$$

для погрешности $\varepsilon_n^*=\mu_n^*-\lambda_n^*$ равномерно относительно n верна оценка

$$\varepsilon^*=\sup_{n\in\mathbb{N}}\varepsilon_n^*\le 1+\frac{2}{\pi}\ln 2-\frac{11}{12}\sqrt{2}<0.145.\tag{35}$$

Доказательство. Во введении отмечено, что класс T^* состоит из объединения трех классов: $T^*=T_0^*\cup T_1^*\cup T_2^*$.

Класс T_0^* соответствует тривиальному случаю ($n=1\Rightarrow\lambda_1^*=\mu_1^*=1$), при этом в (34) достигается равенство, а в (35) имеет место верное числовое неравенство.

В объединении двух классов $T_1^*\cup T_2^*$ для константы Лебега λ_n^* справедливо двойное неравенство (33), в котором в качестве приближенного значения константы λ_n^* взята полусумма верхней и нижней ее оценок, замененную с некоторой погрешностью выражением $1+(2/\pi)\ln n$, т. е.

$$\lambda_n^*\approx\frac{23}{12}\alpha_n^*+\varphi_4^*(n)+\frac{2}{\pi}\ln n\approx 1+\frac{2}{\pi}\ln n=\mu_n^*\quad(n\ge 2).\tag{36}$$

Оценим допущенную в (36) итоговую погрешность. Для этого в двустороннем неравенстве (33) всюду вычтем $\mu_n^*=1+(2/\pi)\ln n$ и после некоторых упрощений для погрешности $\varepsilon_n^*=\mu_n^*-\lambda_n^*$ получим

$$\frac{11}{6}\alpha_n^*-1+\varphi_4^*(n)<\lambda_n^*-\mu_n^*\le 2\alpha_n^*-1+\varphi_4^*(n)$$
$$\Leftrightarrow 1-2\alpha_n^*-\varphi_4^*(n)\le\mu_n^*-\lambda_n^*<1-\frac{11}{6}\alpha_n^*-\varphi_4^*(n)$$
$$\Leftrightarrow\varphi_2^*(n)-\varphi_4^*(n)\le\varepsilon_n^*<\varphi_2^*(n)-\varphi_4^*(n)+\frac{1}{6}\alpha_n^*,$$

следовательно,

$$\varphi_5^*(n)\le\varepsilon_n^*<\varphi_6^*(n)\ (\varphi_5^*(n)\equiv\varphi_2^*(n)-\varphi_4^*(n),\ \varphi_6^*(n)\equiv\varphi_5^*(n)+(1/6)\alpha_n^*;\ n\ge 2).\tag{37}$$

где $\varphi_2^*(n),\varphi_4^*(n)\in V_\delta^+$, а новые функции $\varphi_5^*(n)$, $\varphi_6^*(n)$ подлежат более детальному исследованию. Для этого используем элементы дифференциального исчисления.

Функцию $\varphi_5^* = \varphi_5^*(n)$ непрерывно продолжим на промежуток $D^* = [2, +\infty)$, найдем производную $(\varphi_5^*)'$ и определим ее знак в рассматриваемой области:

$$\begin{aligned}
(\varphi_5^*)' &= (\varphi_2^*(n))' - (\varphi_4^*(n))' = -2(\alpha_n^*)' - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha_n^*\cos(\pi/2n)}\cdot(\alpha_n^*\cos(\pi/2n))' \\
&= -2(\alpha_n^*)^2\sin\frac{\pi}{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n} - 1\right) - \frac{2}{\pi\alpha_n^*\cos(\pi/2n)}\cdot\frac{\pi}{2n}(\alpha_n^*)^2\left(1 - \frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right) \\
&= -(\alpha_n^*)^2\frac{\sin(\pi/2n)}{\cos(\pi/2n)}\left[2\cos\frac{\pi}{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n} - 1\right) + \left(1 - \frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)\right] \\
&= -(\alpha_n^*)^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\left[1 - \frac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n}\cos\frac{\pi}{2n} - 2\cos\frac{\pi}{2n}\left(1 - \frac{\pi/2n}{\sin(\pi/2n)}\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right];
\end{aligned}$$

$$(\varphi_5^*(2))' = \sqrt{2}/2 + 1/\pi - \pi\sqrt{2}/8 - 1/2 \approx -0.030,$$
$$\lim_{n\to\infty}(\varphi_5^*(n))' = 0;\ (\varphi_5^*(n))' < 0 \quad (n \in D^*).$$

Отрицательность производной $(\varphi_5^*)'$ в указанной области можно также доказать, устанавливая положительность нижеследующих функций одной либо двух переменных, определенных в соответствующей D^* области D_1^* либо кривой $\gamma = \gamma(u,v) \subset D_2^*$ в двумерной области D_2^*:

$$f(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}\cos x - 2\cos x\left(1 - \frac{x}{\sin x}\cos x\right) \quad (x \in D_1^* = (0, \pi/4],\ x = \pi/2n),$$

$$f(u,v) = 1 - uv - 2v\left(1 - \frac{1}{u}v\right) \quad \left((u,v) \in \gamma \subset D_2^* = \left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi}, 1\right) \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right);\right.$$
$$\left. u = \frac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n},\ v = \cos\frac{\pi}{2n}\right).$$

Итак, функция $\varphi_5^* = \varphi_5^*(n)$ убывает в области D^*, для ее образа и вариации $\delta = \delta(\varphi_5^*)$ верны соотношения

$$\begin{gathered}
R(\varphi_5^*) = \left(1 + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}, 1 + \frac{2}{\pi}\ln 2 - \sqrt{2}\right] \subset (0.014, 0.028), \\
\delta(\varphi_5^*) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} - \sqrt{2} \approx 0.013.
\end{gathered} \tag{38}$$

Следовательно, $\varphi_5^* \in V_\delta^-$. Являясь линейной комбинацией функций $\varphi_5^*(n), \alpha^*(n)$ из V_δ^-, функция $\varphi_6^*(n)$ $(n \geq 2)$ также принадлежит классу V_δ^- и

$$R(\varphi_6^*) = \left(1 + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{11}{3\pi}, 1 + \frac{2}{\pi}\ln 2 - \frac{11\sqrt{2}}{12}\right] \subset (0.120, 0.145),\ \delta(\varphi_6^*) \approx 0.025. \tag{39}$$

Соотношения (37)–(39) позволяют сделать следующие выводы о функциях ε_n^*, λ_n^*, μ_n^*:

$$\varepsilon_n^* = \mu_n^* - \lambda_n^* > \inf_{n\geq 2}\varphi_5^*(n) = 1 + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} > 0.014 > 0 \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow \lambda_n^* < \mu_n^*\ \forall n \geq 2;$$

$$\varepsilon_n^* = \mu_n^* - \lambda_n^* < \sup_{n\geq 2}\varepsilon_n^* \leq \sup_{n\geq 2}\varphi_6^*(n) = 1 + \frac{2}{\pi}\ln 2 - \frac{11}{12}\sqrt{2} < 0.145 \quad \forall n \geq 2.$$

Из этих оценок с учетом результатов тривиального случая ($n = 1$) без особого труда получим справедливость соотношений (34) и (35).

Теорема 4 полностью доказана.

С целью решения задачи 2 в случае класса узлов T^* рассмотрим асимптотическое равенство

$$\lambda_n^* \cong \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} + \frac{2}{\pi}\ln n = \bar{\mu}_n^* \quad (\bar{\mu}_n^* = \bar{\mu}^*(n),\ n \to \infty) \tag{40}$$

с коэффициентом $O_2(1) = A_2^* = (3/\pi)^{2/3} \approx 0.970$ (см. (9)).

Теорема 5. *В случае класса узлов T^* для правой и левой частей асимптотического равенства* (40) *начиная со значения параметра $n_0 = 3$ верно неравенство*

$$\lambda_n^* < \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} + \frac{2}{\pi}\ln n = \bar{\mu}_n^* \quad \forall n \geq n_0, \tag{41}$$

при этом для погрешности $\bar{\varepsilon}_n^* = \bar{\mu}_n^* - \lambda_n^*$ справедлива оценка

$$\bar{\varepsilon}^* = \sup_{n\geq 3}\bar{\varepsilon}_n^* = \sup_{n\geq 3}\left(\frac{3}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln n - \lambda_n^*\right) < 0.091, \tag{42}$$

а для абсолютного значения погрешности $|\bar{\varepsilon}_n^*| = |\bar{\mu}_n^* - \lambda_n^*|$ равномерно относительно параметра $n \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$\tilde{\varepsilon}^* = \sup_{n\in\mathbb{N}}|\bar{\varepsilon}_n^*| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{3}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln n - \lambda_n^*\right| < 0.091. \tag{43}$$

Доказательство. В координатной системе nOY рассмотрим и изучим поведение графиков следующих функций:

$$y = \lambda_n^* = \lambda^*(n),\ y = \mu_n^* = \mu^*(n),\ y = \bar{\mu}_n^* = \bar{\mu}_n^*(n) \quad (n \in \overline{D}^* = [1, +\infty) \subset R). \tag{44}$$

Для их производных в области $\overline{D}^*$ справедливы неравенства

$$(\lambda^*(n))' = \frac{\pi}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{\sin^2(2k-1)\pi/(4n)}\left(1 - \frac{\sin(2k-1)\pi/(2n)}{(2k-1)\pi/(2n)}\right) > 0,$$
$$(\mu^*(n))' > 0, \quad (\bar{\mu}^*(n))' > 0,$$

следовательно, все они являются монотонно возрастающими функциями в рассматриваемой области. Первые две функции из (44) при $n = 1$ имеют общую вершину $M_1^*(1,1)$, а третья — вершину $M_2^*(1, 3/\pi)$. Ясно, что график функции $y = \bar{\mu}^*(n)$ получен из $y = \mu^*(n)$ параллельным ее переносом (относительно оси On) в вершину M_2^*. Расстояние $d = d(M_1^*, M_2^*) = 1 - (3/\pi)^{2/3} \approx 0.045$ между их вершинами более чем в четыре раза меньше расстояния ε^* между функциями $\mu^*(n)$ и $\lambda^*(n)$ (см. (35)). Поэтому существует натуральное значение аргумента $n = n_0$ такое, что в отрезке $[n_0 - 1, n_0] \subset R$ графики строго возрастающих функций $y = \lambda^*(n)$, $y = \bar{\mu}_n^*(n)$ пересекаются. Естественно, значение n_0 в общем случае зависит от выбора неопределенного коэффициента $O_2(1)$ в асимптотическом равенстве (9) (ниже покажем, что выбранному в (40) коэффициенту $(3/\pi)^{2/3}$ соответствует значение параметра $n_0 = 3$).

Далее существенно используем схему доказательства теоремы 2 и результаты теоремы 4. На этот раз для константы Лебега (7) по известной схеме получим приближенные равенства вида

$$\lambda_n^* \approx \frac{23}{12}\alpha_n^* + \varphi_4^*(n) + \frac{2}{\pi}\ln n \approx \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} + \frac{2}{\pi}\ln n = \bar{\mu}_n^* \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

Для первой составляющей $A_2^* = (3/\pi)^{2/3}$ функциональной зависимости $\bar{\mu}_n^* = \bar{\mu}^*(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ выполнены следующие условия, необходимые для существования решения задачи 2:

1) $A_2^* < A_1^* \Leftrightarrow (3/\pi)^{2/3} < 1$ (константа $A_1^* = 1$ определена в теореме 4);

2) $A_2^* \in u_2(1) \equiv [1, 1-\varepsilon^*]$, где $\varepsilon^* = 1 + (2/\pi)\ln 2 - 11\sqrt{2}/12 \approx 0.145$ — значение погрешности, определенное в теореме 4.

Перейдем к двусторонней оценке погрешности, допущенной в приближенных заменах (45). Для этого в двойном неравенстве (33) вычтем всюду $\bar{\mu}_n^* = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} + \frac{2}{\pi}\ln n$ и упростим его, используя ранее введенные и достаточно полно исследованные функции $\varphi_4^*(n) \in V_\delta^+$ и $\alpha^*(n), \varphi_5^*(n), \varphi_6^*(n) \in V_\delta^-$:

$$\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - 2\alpha_n^* - \varphi_4^*(n) \le \bar{\mu}_n^* - \lambda_n^* < \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{11}{6}\alpha_n^* - \varphi_4^*(n) \Leftrightarrow (1-2\alpha_n^*) - \varphi_4^*(n)$$
$$- \left(1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\right) \le \bar{\varepsilon}_n^* < +(1-2\alpha_n^*) - \varphi_4^*(n) + \frac{1}{6}\alpha_n^* - \left(1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \varphi_5^*(n) - \left(1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\right) \le \bar{\varepsilon}_n^* < \varphi_6^*(n) - \left(1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\right) \Rightarrow \varphi_7^*(n) \le \bar{\varepsilon}_n^* < \varphi_8^*(n)$$
$$\left(\varphi_7^*(n) \equiv \varphi_5^*(n) - \left(1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\right),\ \varphi_8^*(n) \equiv \varphi_6^*(n) - \left(1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\right);\ n \ge 2\right). \tag{46}$$

Ясно, что функции $\varphi_7^*(n), \varphi_8^*(n)$ принадлежат V_δ^+, а для их образов и вариаций верны соотношения

$$R(\varphi_7^*) = \left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{4}{\pi}, \frac{2}{\pi}\ln 2 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \sqrt{2}\right]$$
$$\subset (-0.017, -0.003),\ \delta(\varphi_7^*) \approx 0.013,$$

$$R(\varphi_8^*) = \left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{11}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\ln 2 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{11}{12}\sqrt{2}\right]$$
$$\subset (0.090, 0.115),\ \delta(\varphi_8^*) \approx 0.025,$$

где вариации рассматриваемых функций согласованы с вариациями $\delta(\varphi_5^*)$ и $\delta(\varphi_6^*)$ из (38) и (39) соответственно.

Проведенные выше исследования поведения графиков функций (44) в области $\overline{D}^* = [1, +\infty)$, а также полученные сведения об оценивающих $\bar{\varepsilon}_n^* = \bar{\varepsilon}^*(n)$ функциях $\varphi_7^*(n)$, $\varphi_8^*(n)$ позволяют утверждать следующее:

1) $\bar{\varepsilon}_n^* \in V_\delta^+$ $(n \in \overline{D}^*)$; $(\bar{\varepsilon}_n^* > 0\ \forall n \ge 3) \Leftrightarrow (\lambda_n^* < \bar{\mu}_n^*\ \forall n \ge 3)$, что также подтверждается элементарными численными расчетами, например, $\bar{\varepsilon}_1^* \approx -0.030277$, $\bar{\varepsilon}_2^* \approx -0.003220$, $\bar{\varepsilon}_3^* \approx 0.002354$, $\bar{\varepsilon}_4^* \approx 0.004506$ и т. д.;

2) функция погрешности $\bar{\varepsilon}_n^* = \bar{\varepsilon}^*(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ сверху ограничена асимптотой $y = \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{11}{3\pi}$ функции $\varphi_8^*(n)$, поэтому

$$\bar{\varepsilon}_n^* < \sup_{n\ge 3}(\bar{\mu}_n^* - \lambda_n^*) = \sup_{n\ge 3}\left(\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} + \frac{2}{\pi}\ln n - \lambda_n^*\right)$$
$$\le \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{11}{3\pi} < 0.091 \quad \forall n \ge 3;$$

3) функция $\bar{\varepsilon}_n^*$ $(n \in \mathbb{N})$ снизу ограничена величиной

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi_7^*(n) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{4}{\pi} \approx -0.016030,$$

следовательно, для модуля $\bar{\varepsilon}_n^*$ имеем оценку

$$|\bar{\varepsilon}_n^*| = \left|\frac{3}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln n - \lambda_n^*\right| < \max\left\{\left|\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{4}{\pi}\right|, \left|\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{11}{3\pi}\right|\right\}$$
$$= \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} - \frac{11}{3\pi} < 0.091 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Погрешности $\bar{\varepsilon}_n^*$ $(n \geq 3)$ и $|\bar{\varepsilon}_n^*|$ $(n \in \mathbb{N})$ в указанных областях оценены равномерно относительно параметра n, следовательно, неравенства (41) и (42) достоверны.

Теорема 5 полностью доказана.

Замечание 7. В случае класса узлов T^* константа $A_1^* = 1$ является единственным решением задачи 1, т. е. $\min\{A^* \in R \mid \lambda_n^* \leq A^* + (2/\pi)\ln n \; \forall n \in \mathbb{N}\} = A_1^* = 1$. Данное утверждение является следствием теорем 4 и 5.

Замечание 8. Выбранная в асимптотическом равенстве (40) константа $A_2^* = (3/\pi)^{2/3}$ является лишь одним из возможных решений задачи 2. Выбор другой более простой по структуре константы $A_3^* = 3/\pi \approx 0.955$ $(A_3 \in u_2(1),\ A_3^* < A_2^* < 1)$ в условиях теоремы 5 позволяет уменьшить (как показывают расчеты) абсолютное значение погрешности $\tilde{\varepsilon}^*$ из (43), но при этом в соотношении (41) появляются соответствующие технические сложности в процессе численного обнаружения значения n_0 $(n_0 \gg 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
4. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений. М.: Физматгиз, 1959.
5. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
7. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
9. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1988.
10. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. Кн. 1, 2.
11. *Колесников А. П.* Топологические методы в теории приближений. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
12. *Stenger F.* Numerical methods based on sinc and analytic functions. New York: Springer-Verl., 1993.
13. *Трынин А. Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1155–1166.
14. *Ehlich H., Zeller K.* Auswertung der Normen von Interpolations operatoren // Math. Ann. 1966. Bd 164, S. 105–112.
15. *Шакиров И. А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 80–88.

16. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1968.

17. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.

18. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

19. *Шакиров И. А.* О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на поведение констант Лебега // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: Тез. докл. Международн. конф., посвященной 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск, 18–24 августа 2013 г. Новосибирск, 2013. С. 430.

Статья поступила 27 мая 2014 г.

Шакиров Искандер Асгатович
Набережночелнинский институт
социально-педагогических технологий и ресурсов,
ул. Низаметдинова, 28, Набережные Челны 423806
iskander@tatngpi.ru