Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 512.57

О ЗАМКНУТОСТИ ЛОКАЛЬНО ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОДГРУППЫ В МЕТАБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

А. И. Будкин

Аннотация. *Доминион подгруппы* H группы G (в классе метабелевых групп) — это множество всех элементов $a \in G$, образы которых равны для всех пар гомоморфизмов из G в каждую метабелеву группу, совпадающих на H. Доминион является оператором замыкания на решетке подгрупп группы G. В работе исследуются замкнутые подгруппы относительно доминиона. Доказано, что если G — метабелева группа, H — локально циклическая группа, коммутант G' разлагается в прямое произведение некоторых своих подгрупп вида H^f $(f \in G)$ и H^G выделяется в G' прямым сомножителем, то подгруппа H замкнута в G.

Ключевые слова: метабелева группа, абелева группа, доминион, замкнутая подгруппа.

Введение

Понятие доминиона введено в [1] для изучения эпиморфизмов. Согласно [1] *доминионом подалгебры* H универсальной алгебры G в полной категории $\mathscr{M}$ $(G \in \mathscr{M})$, обозначаемым через $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H)$, называется множество всех элементов $a \in G$ таких, что $a^\varphi = a^\psi$ для любых двух морфизмов $\varphi, \psi : G \to M \in \mathscr{M}$, совпадающих на H. Оказалось, что отображение $\varphi : G \to M$ $(G, M \in \mathscr{M})$ является эпиморфизмом в $\mathscr{M}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{dom}_M^{\mathscr{M}}(G^\varphi) = M$. Этот факт послужил началом исследования доминионов. Далее понятие доминиона изучалось в различных классах алгебр [2–4] (см. также библиографию в [5]). В частности, установлена тесная связь между доминионами и амальгамами. За подробностями отсылаем читателя к обзорной статье [2]. Целесообразность изучения доминионов в квазимногообразиях обосновывается в [5] тем, что согласно [6] только квазимногообразия среди аксиоматизируемых классов обладают полной теорией определяющих соотношений, позволяющей определить свободное произведение с объединенной подалгеброй. Отметим, что доминионы подробно изучены в квазимногообразиях абелевых групп [5, 7–9]. Исследованию доминионов в классе нильпотентных групп также посвящен цикл статей. Выделим из них [10, 11]. В последнее время целенаправленно ведется изучение доминионов метабелевых групп [12–14].

Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное квазимногообразие групп. В этом случае для любой группы G из $\mathscr{M}$ и ее подгруппы H доминион $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H)$ подгруппы H в G (в $\mathscr{M}$) определяется так:

$$\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(H) = \{a \in G \mid \forall M \in \mathscr{M}\ \forall f, g : G \to M \text{ если } f\,|_H = g\,|_H, \text{ то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : G \to M$ обозначены гомоморфизмы группы G в группу M, через $f|_H$ — ограничение f на H.

Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{M}}(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы G в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если $H \subset B$, то доминион H содержится в доминионе B). Возникает понятие замкнутой подгруппы H в группе G (относительно класса $\mathscr{M}$). Представляется интересным и естественным исследование замкнутых подгрупп.

В настоящей работе рассматривается вопрос, когда подгруппа метабелевой группы замкнута в данной группе (относительно класса метабелевых групп). Доказано, что если G — метабелева группа, H — локально циклическая группа, коммутант G' разлагается в прямое произведение некоторых своих подгрупп вида H^f ($f \in G$) и H^G выделяется в G' прямым сомножителем, то подгруппа H замкнута в G. Кроме того, показано, что если G — метабелева группа, $H \leq G'$, H изоморфна аддитивной группе рациональных чисел и H^G не имеет кручения (либо H — циклическая группа простого порядка p и p-примарная компонента группы G' имеет экспоненту p), то подгруппа H замкнута в G. Отметим, что согласно [14] не всякая подгруппа, содержащаяся в коммутанте метабелевой группы, замкнута в этой группе.

С основными понятиями теории квазимногообразий можно познакомиться в [15–18], а теории групп — в [19].

§ 1. Предварительные сведения и конструкция

Напомним некоторые понятия и обозначения.

Запись $A \leq B$ означает, что A является подгруппой группы B. Через $\mathrm{gr}(S)$ будем обозначать группу, порожденную множеством S, через (a) — циклическую группу, порожденную элементом a, G' — коммутант группы G. Как обычно, $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $a^b = b^{-1}ab$, $a^{-b} = (a^b)^{-1}$; $\mathscr{A}^2$ — класс метабелевых групп, $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.

Подгруппа H группы G ($G \in \mathscr{M}$) называется *замкнутой в группе* G (относительно класса метабелевых групп), если $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{A}^2}(H) = H$.

В абелевой группе G множество всех элементов, порядки которых суть степени фиксированного простого числа p, образуют подгруппу, которая называется *p-примарной компонентой* группы G.

Напомним определения декартова сплетения групп A и B. Возьмем декартову степень $\overline{A}$ группы A, состоящую из всех функций $f : B \to A$. Для каждого $b \in B$ определим отображение $\beta : f \to f^b$ по правилу: $f^b(y) = f(by)$ для всех $y \in B$. Далее, β является автоморфизмом группы $\overline{A}$, и множество всех таких автоморфизмов есть группа, изоморфная B. Расширение группы $\overline{A}$ при помощи этой группы автоморфизмов называется *декартовым сплетением групп* A и B и обозначается через $A \bar{\wr} B$. Группа $\overline{A}$ называется *базисной подгруппой сплетения*.

Изложим конструкцию.

Предполагаем, что G — метабелева группа, $H \leq G'$, $R = H^G$ — нормальное замыкание подгруппы H в группе G. Считаем, что $R = \prod\limits_{f \in S} H^f$, где S — некоторое подмножество множества $\{N_G(H)g \mid g \in G\}$ смежных классов.

Будем предполагать, что $H = (h) = \{h^v \mid v \in V\}$ ($V \subseteq \mathbf{N}$) — циклическая группа конечного порядка либо $H = \{h^v \mid v \in V\}$ ($h^1 = h$) — абелева группа без кручения ранга 1. В последнем случае V — подгруппа аддитивной группы рациональных чисел, изоморфная H.

Зафиксируем изоморфизмы $\mu : G \to A$, $\nu : G \to B$.

Введем обозначения: $M = R^\mu$, $N = R^\nu$, $\varepsilon : A \to A/M$, $\delta : B \to B/N$ — естественные гомоморфизмы, $\xi : G/R \to A/M$ — изоморфизм, при котором $(gR)^\xi = g^\mu M$, $\chi : A/M \to B/N$ — естественный изоморфизм, т. е. $(aM)^\chi = a^{\mu^{-1}\nu\delta}$, $s_1 : A/M \to A$, $s_2 : B/N \to B$ — функции, выбирающие представителей смежных классов, причем $1^{s_i} = 1$, $i = 1, 2$, и $a^{s_1\mu^{-1}\nu} = a^{\chi s_2}$ для каждого элемента $a \in A/M$, $S_1 = \{N_A(H^\mu)g^\mu \mid N_G(H)g \in S\}$, $S_2 = \{N_B(H^\nu)g^\nu \mid N_G(H)g \in S\}$.

Элементы h^μ, h^ν будем обозначать снова через h. Кроме того, считаем, что $H^\mu = H$, $H^\nu = H$.

Для каждой пары элементов $f \in S_1$, $g \in S_2$ введем группу H_{fg}, изоморфную H, и зафиксируем изоморфизм $\mu_{fg} : H \to H_{fg}$. Обозначим $h_{fg} = h^{\mu_{fg}}$. Полагаем $H_{11} = H$. Пусть

$$K = \prod_{f \in S_1,\, g \in S_2} H_{fg}$$

— прямое произведение групп.

Обозначим $C = K \bar{\wr} (A/M \times B/N)$.

Для каждого $g \in G$ определим элемент f_g из базисной подгруппы сплетения C следующим образом. Берем произвольные элементы $a \in A/M$, $b \in B/N$. Поскольку $(g^\mu a)^{-s_1} g^\mu a^{s_1} \in H^A$, этот элемент записывается в виде

$$(g^\mu a)^{-s_1} g^\mu a^{s_1} = h^{k_1 a_1} h^{k_2 a_2} \dots h^{k_n a_n}$$

для подходящих $k_1, \dots, k_n \in V$ и попарно различных $a_1, a_2, \dots, a_n \in S_1$. Считаем, что $a_1 = 1$.

Элемент h^b представим в следующем виде:

$$h^b = h^{m_1 b_1} h^{m_2 b_2} \dots h^{m_n b_n}$$

для подходящих $m_1, m_2, \dots, m_n \in V$ и попарно различных $b_1, b_2, \dots, b_n \in S_2$. Для удобства предполагаем, что в каждом из этих двух выражений число сомножителей равно n (при этом некоторые сомножители могут быть равными единице). Считаем, что $b_1 = 1$. По определению положим

$$f_g(ab) = \prod_{1 \le i,j \le n} h_{a_i b_j}^{k_i m_j}.$$

Проверим корректность определения $f_g(ab)$. Если H — конечная группа, то вопросов с определением $f_g(ab)$ не возникает. Пусть H — группа без кручения. Надо убедиться, что $k_i m_j \in V$. В самом деле, допустим, что $(h^{k_i})^b = h^{t_1 b_1} h^{t_2 b_2} \dots h^{t_n b_n}$, $t_j \in V$. Возьмем любое ненулевое целое число m такое, что число mk_i целое. Тогда

$$((h^{k_i})^b)^m = h^{mt_1 b_1} h^{mt_2 b_2} \dots h^{mt_n b_n}, \quad (h^b)^{mk_i} = h^{mk_i m_1 b_1} h^{mk_i m_2 b_2} \dots h^{mk_i m_n b_n}.$$

Из равенства $((h^{k_i})^b)^m = (h^b)^{mk_i}$, учитывая, что R^ν является прямым произведением соответствующих подгрупп, получаем $h^{mt_j b_j} = h^{mk_i m_j b_j}$, откуда $h^{mt_j} = h^{mk_i m_j}$. Поскольку H — группа без кручения, видим, что $t_j = k_i m_j$, т. е. $k_i m_j \in V$.

Для каждого $r \in G$ определим элемент l_r из базисной подгруппы сплетения C. Берем произвольные элементы $a \in A/M$, $b \in B/N$. Поскольку $(r^\nu b)^{-s_2} r^\nu b^{s_2} \in H^B$, этот элемент записывается в виде

$$(r^\nu b)^{-s_2} r^\nu b^{s_2} = h^{m_1 b_1} h^{m_2 b_2} \dots h^{m_n b_n}$$

для подходящих $m_1, m_2, \dots, m_n \in V$ и попарно различных $b_1, b_2, \dots, b_n \in S_2$, $b_1 = 1$.

Элемент h^a представим в виде

$$h^a = h^{k_1 a_1} h^{k_2 a_2} \dots h^{k_n a_n}$$

для подходящих $k_1, k_2, \dots, k_n \in V$ и попарно различных $a_1, a_2, \dots, a_n \in S_1$, $a_1 = 1$. По определению полагаем

$$l_r(ab) = \prod_{1 \le i,j \le n} h_{a_i b_j}^{k_i m_j}.$$

Корректность определения элемента $l_r(ab)$ проверяется так же, как корректность определения $f_g(ab)$.

Будем рассматривать следующие подмножества:

$$L_1 = \{g^{\mu\varepsilon} f_g \mid g \in G\}, \quad L_2 = \{t^{\nu\delta} l_t \mid t \in G\}, \quad L = \mathrm{gr}(L_1, L_2).$$

§ 2. Основные результаты

Лемма 1. *Подмножества L_1, L_2 являются подгруппами группы C, а отображения $\varphi : g \to g^{\mu\varepsilon} f_g$ $(g \in G)$, $\psi : t \to t^{\nu\delta} l_t$ $(t \in G)$ — изоморфизмами группы G на L_1 и L_2 соответственно.*

Доказательство. Возьмем произвольные элементы $u, v \in G$. Тогда

$$u^\varphi v^\varphi = u^{\mu\varepsilon} f_u v^{\mu\varepsilon} f_v = (uv)^{\mu\varepsilon} f_u^{v^{\mu\varepsilon}} f_v.$$

Кроме того, для любых $a \in A/M$, $b \in B/N$ имеем

$$f_u^{v^{\mu\varepsilon}} f_v(ab) = f_u^{v^{\mu\varepsilon}}(ab) f_v(ab) = f_u(v^{\mu\varepsilon} ab) f_v(ab).$$

Пусть

$$(u^\mu v^{\mu\varepsilon} a)^{-s_1} u^\mu (v^{\mu\varepsilon} a)^{s_1} = h^{k_1 a_1} h^{k_2 a_2} \dots h^{k_n a_n},$$
$$(v^\mu a)^{-s_1} v^\mu a^{s_1} = h^{t_1 a_1} h^{t_2 a_2} \dots h^{t_n a_n},$$
$$h^b = h^{m_1 b_1} h^{m_2 b_2} \dots h^{m_n b_n},$$

тогда

$$f_u^{v^{\mu\varepsilon}} f_v(ab) = \prod_{1 \le i,j \le n} h_{a_i b_j}^{(k_i + t_i) m_j}.$$

Кроме того,

$$(u^\mu v^\mu a)^{-s_1} u^\mu v^\mu a^{s_1} = (u^\mu v^\mu a)^{-s_1} u^\mu (v^\mu a)^{s_1} (v^\mu a)^{-s_1} v^\mu a^{s_1} = \prod_{1 \le i \le n} h^{k_i a_i} \prod_{1 \le i \le n} h^{t_i a_i},$$

откуда

$$f_{uv}(ab) = \prod_{1 \le i,j \le n} h_{a_i b_j}^{(k_i + t_i) m_j}.$$

Получаем $u^\varphi v^\varphi = (uv)^\varphi$.

Вычислим $\ker \varphi$. Если $g \in \ker \varphi$, то $g^\varphi = g^{\mu\varepsilon} f_g = 1$. Отсюда $g \in R$. Предположим, что $g \neq 1$. Тогда в выражении

$$(g^\mu a)^{-s_1} g^\mu a^{s_1} = a^{-s_1} g^\mu a^{s_1} = h^{k_1 a_1} h^{k_2 a_2} \dots h^{k_n a_n}$$

найдется ненулевое число k_r. Кроме того, в некоторой формуле

$$h^b = h^{m_1 b_1} h^{m_2 b_2} \dots h^{m_n b_n}$$

присутствует ненулевое m_p. Видим, что

$$f_g(ab) = \prod_{1 \le i,j \le n} h_{a_i b_j}^{k_i m_j} \ne 1,$$

так как $k_r m_p \ne 0$. Это противоречит тому, что $f_g = 1$. Значит, $\ker\varphi = (1)$ и φ — изоморфизм групп.

Аналогично показывается, что ψ — изоморфизм G на L_2. Лемма доказана.

Лемма 2. *Гомоморфизмы φ и ψ группы G в группу C совпадают на H, и образы всякого элемента $g \notin H$ различны при этих гомоморфизмах.*

Доказательство. Берем любой элемент $h^k \in H$. Тогда $h^{k\varphi} = f_{h^k}$, $h^{k\psi} = l_{h^k}$. Пусть $a \in A/M$, $b \in B/N$. Вычислим $f_{h^k}(ab)$, $l_{h^k}(ab)$. Ясно, что

$$(h^{k\mu}a)^{-s_1} h^{k\mu} a^{s_1} = a^{-s_1} h^{k\mu} a^{s_1}, \quad (h^{k\nu}b)^{-s_2} h^{k\nu} b^{s_2} = b^{-s_2} h^{k\nu} b^{s_2}.$$

Пусть

$$a^{-s_1} h a^{s_1} = h^{k_1 a_1} \dots h^{k_n a_n}, \quad h^b = h^{m_1 b_1} \dots h^{m_n b_n}$$

для подходящих $k_1, k_2, \dots, k_n, m_1, m_2, \dots, m_n \in V$ и попарно различных $a_1, a_2, \dots, a_n \in S_1$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in S_2$. Из определений f_{h^k} и l_{h^k} получаем

$$f_{h^k}(ab) = \prod_{1 \le i,j \le n} h_{a_i b_j}^{k k_i m_j}, \quad l_{h^k}(ab) = \prod_{1 \le i,j \le n} h_{a_i b_j}^{k k_i m_j},$$

т. е. $f_{h^k} = l_{h^k}$.

Пусть $g \notin H$. Если $g \notin R$, то $g^{\mu\varepsilon} \ne g^{\nu\delta}$, поэтому $g^\varphi \ne g^\psi$. Пусть $g \in R$. В последующих вычислениях полагаем $a = 1$, $b = 1$. Тогда

$$(g^\mu a)^{-s_1} g^\mu a^{s_1} = g^\mu = h^{k_1 a_1} \dots h^{k_n a_n}, \quad h^1 = h,$$

причем $k_p \ne 0$ для некоторого $p > 1$. Следовательно,

$$f_g(ab) = \prod_{1 \le i \le n} h_{a_i b_1}^{k_i}.$$

Аналогично

$$(g^\nu b)^{-s_2} g^\nu b^{s_2} = g^\nu = h^{k_1 b_1} h^{k_2 b_2} \dots h^{k_n b_n}, \quad b_1 = 1,\ h^1 = h,$$

причем $k_q \ne 0$ для некоторого $q > 1$. Отсюда

$$l_g(ab) = \prod_{1 \le i \le n} h_{a_1 b_i}^{k_i}.$$

Видим, что $f_g(ab) \ne l_g(ab)$, т. е. $g^\varphi = f_g \ne l_g = g^\psi$. Лемма доказана.

Подводя итог вышесказанному и воспользовавшись определением доминиона, сформулируем доказанный результат.

Лемма 3. *Пусть G — метабелева группа, H — циклическая группа конечного порядка или локально циклическая группа без кручения. Предположим, что $H \le G'$, H^G разлагается в прямое произведение некоторых своих подгрупп вида H^f $(f \in G)$ и $\mathrm{gr}(L_1, L_2)$ — метабелева группа. Тогда H замкнута в G.*

Найдем условие, при выполнении которого группа $L = \mathrm{gr}(L_1, L_2)$ метабелева.

Лемма 4. *Группа* $L = \mathrm{gr}(L_1, L_2)$ *метабелева тогда и только тогда, когда*

$$f_g^{-[g_1,g_2]^{\mu\varepsilon}} f_g^{r^\nu [g_1,g_2]^{\mu\varepsilon}} f_g f_g^{-r^\nu} = 1, \quad l_r^{-[r_1,r_2]^{\nu\delta}} l_r^{g^\mu [r_1,r_2]^{\nu\delta}} l_r l_r^{-g^\mu} = 1$$

для любых $g, g_1, g_2, r, r_1, r_2 \in G$.

Доказательство. Отметим, что коммутаторы вида $[g^{\mu\varepsilon} f_g, r^{\nu\delta} l_r]^t$ перестановочны, так как они содержатся в базисной подгруппе сплетения C. Поскольку G — метабелева группа, из леммы 1 получаем, что коммутаторы каждого из видов $[g^{\mu\varepsilon} f_g, g_1^{\mu\varepsilon} f_{g_1}]$, $[r^{\nu\delta} l_r, r_1^{\nu\delta} l_{r_1}]$ попарно перестановочны.

Ясно, что из метабелевости группы L вытекает истинность в C следующих равенств:

(1) $[[g^{\mu\varepsilon} f_g, u^{\mu\varepsilon} f_u], [r^{\nu\delta} l_r, s^{\nu\delta} l_s]] = 1$,

(2) $[[g^{\mu\varepsilon} f_g, u^{\mu\varepsilon} f_u], [v^{\mu\varepsilon} f_v, r^{\nu\delta} l_r]] = 1$,

(3) $[[g^{\mu\varepsilon} f_g, r^{\nu\delta} l_r], [s^{\nu\delta} l_s, t^{\nu\delta} l_t]] = 1$,

(4) $[[g^{\mu\varepsilon} f_g, u^{\mu\varepsilon} f_u]^{r^{\nu\delta} l_r}, [s^{\nu\delta} l_s, t^{\nu\delta} l_t]] = 1$,

(5) $[[g^{\mu\varepsilon} f_g, s^{\nu\delta} l_s]^{r^{\nu\delta} l_r}, [u^{\mu\varepsilon} f_u, v^{\mu\varepsilon} f_v]] = 1$,

(6) $[[g^{\mu\varepsilon} f_g, r^{\nu\delta} l_r]^{u^{\mu\varepsilon} f_u}, [s^{\nu\delta} l_s, t^{\nu\delta} l_t]] = 1$.

Покажем, что из истинности в C равенств (1)–(6) следует метабелевость группы L. Действительно, элемент $[f, g]^{uv}$ равен

(а) элементу $[f_1, g_1]^v$ при $f, g, u \in L_i$ для некоторых $f_1, g_1 \in L_i$ (по лемме 1),

(б) элементу $[f, g]^{uwt} = [f, g]^{[u^{-1}, w^{-1}]wut} = [f, g]^{wut}$ при $v = wt$, $f, g, w \in L_i$, $u \in L_j$ $(i \neq j)$ (по лемме 1 и свойствам (1)–(3)).

Из (а) и (б) вытекает, что если $f, g \in L_i$, то элемент $[f, g]^v$ $(v \in L)$ равен подходящему элементу вида $[f_1, g_1]^{v_1}$, где $f_1, g_1 \in L_i$, $v_1 \in L_j$ $(i \neq j)$.

Пусть $f \in L_i$, $g \in L_j$ $(i \neq j)$. Тогда всякий элемент вида $[f, g]^s$ содержится в базисной подгруппе сплетения C. Поскольку при $u \in L_i$, $v \in L_j$ $(i \neq j)$ элемент $[u^{-1}, v^{-1}]$ также содержится в базисной подгруппе сплетения C и $uv = [u^{-1}, v^{-1}]vu$, получаем

(в) при $f \in L_i$, $g \in L_j$, $u \in L_i$, $v \in L_j$ (либо $v \in L_i$, $u \in L_j$), $i \neq j$, $[f, g]^{suvt} = [f, g]^{svut}$.

Из (в) следует, что если $f \in L_i$, $g \in L_j$ $(i \neq j)$, то элемент $[f, g]^w$ $(w \in L)$ равен подходящему элементу вида $[f_1, g_1]^{uv}$, где $f_1 \in L_i$, $g_1 \in L_j$, $u \in L_2$, $v \in L_1$.

Так как базисная подгруппа сплетения C — абелева группа, из (1)–(5) и леммы 1 легко получаем, что коммутаторы вида $[f, g]^u$ $(f, g \in L_1 \cup L_2,\ u \in L)$ попарно перестановочны. Самым нетривиальным здесь является доказательство равенства единице следующего коммутатора (далее $f_1 \in L_i$, $g_1 \in L_j$, $i \neq j$, $u \in L_2$, $v, f, g, f_2, g_2 \in L_1$):

$$[[f_1, g_1]^{uv}, [f, g]] = [[f_1, g_1]^u, [f, g]^{v^{-1}}]^v = [[f_1, g_1]^u, [f_2, g_2]]^v = 1.$$

Сказанное означает, что L — метабелева группа тогда и только тогда, когда справедливы равенства (1)–(5).

Покажем, что равенства (1)–(5) эквивалентны соотношениям из формулировки данной леммы.

(1) Ввиду леммы 1 имеем

$$[[g^{\mu\varepsilon} f_g, u^{\mu\varepsilon} f_u], [r^{\nu\delta} l_r, s^{\nu\delta} l_s]](ab) = [[g, u]^{\mu\varepsilon} f_{[g,u]}, [r, s]^{\nu\delta} l_{[r,s]}](ab)$$
$$= f_{[g,u]}^{[r,s]^{\nu\delta}} f_{[g,u]}^{-1} l_{[r,s]} l_{[r,s]}^{-[g,u]^{\mu\varepsilon}}(ab).$$

Пусть $([g,u]^\mu a)^{-s_1}[g,u]^\mu a^{s_1} = h^{k_1a_1}h^{k_2a_2}\dots h^{k_na_n}$, $h^b = h^{m_1b_1}h^{m_2b_2}\dots h^{m_nb_n}$. Тогда

$$f_{[g,u]}(ab) = \prod_{1\le i,j\le n} h_{a_ib_j}^{k_im_j}.$$

Поскольку $h^{[r,s]^\nu b} = h^b$, то

$$f_{[g,u]}^{[r,s]^{\nu\delta}}(ab) = f_{[g,u]}(a[r,s]^\nu b) = \prod_{1\le i,j\le n} h_{a_ib_j}^{k_im_j} = f_{[g,u]}(ab).$$

Отсюда $f_{[g,u]}^{[r,s]^{\nu\delta}} f_{[g,u]}^{-1} = 1$. Аналогично показывается, что $l_{[r,s]}l_{[r,s]}^{-[g,u]^{\mu\varepsilon}} = 1$. Значит, равенство (1) выполнено в C.

(2) По лемме 1, раскрывая скобки и учитывая, что элемент $[v^{\mu\varepsilon}f_v, r^{\nu\delta}l_r]$ содержится в базисной подгруппе сплетения C, получаем

$$\begin{aligned}&[[g^{\mu\varepsilon}f_g, u^{\mu\varepsilon}f_u],[v^{\mu\varepsilon}f_v, r^{\nu\delta}l_r]] = [[g,u]^{\mu\varepsilon}f_{[g,u]},[v^{\mu\varepsilon}f_v, r^{\nu\delta}l_r]]\\ &\quad= [[g,u]^{\mu\varepsilon},[v^{\mu\varepsilon}f_v, r^{\nu\delta}l_r]] = l_r^{-[g,u]^{\mu\varepsilon}} l_r^{v^{\mu\varepsilon}[g,u]^{\mu\varepsilon}} l_r^{-v^{\mu\varepsilon}} l_r f_v^{-r^{\nu\delta}[g,u]^{\mu\varepsilon}} f_v^{[g,u]^{\mu\varepsilon}} f_v^{-1} f_v^{r^{\nu\delta}}.\end{aligned}$$

Как и в случае (1), показываем, что $l_r^{-[g,u]^{\mu\varepsilon}}l_r = 1$, $l_r^{v^{\mu\varepsilon}[g,u]^{\mu\varepsilon}}l_r^{-v^{\mu\varepsilon}} = 1$. Получаем, что коммутатор из (2) равен 1 тогда и только тогда, когда

$$f_v^{-r^{\nu\delta}[g,u]^{\mu\varepsilon}} f_v^{[g,u]^{\mu\varepsilon}} f_v^{-1} f_v^{r^{\nu\delta}} = 1.$$

Это равенство из формулировки леммы 4.

(3) Этот случай аналогичен (2). Рассматривая его, приходим ко второму равенству из формулировки леммы 4.

В частности, если L — метабелева группа, то равенства из формулировки этой леммы истинны.

(4) Сопрягая обе части этого равенства элементом $(r^{\nu\delta}l_r)^{-1}$ и применяя лемму 1, получаем равенство вида (1). Следовательно, равенство (4) выполнено в C.

(5) Применяя лемму 1, раскрывая скобки, при этом учитывая, что элементы $[g^{\mu\varepsilon}f_g, s^{\nu\delta}l_s], l_r, f_{[u,v]}$ содержатся в базисной подгруппе сплетения, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}&[[g^{\mu\varepsilon}f_g, s^{\nu\delta}l_s]^{r^{\nu\delta}l_r},[u^{\mu\varepsilon}f_u, v^{\mu\varepsilon}f_v]] = [[g^{\mu\varepsilon}f_g, s^{\nu\delta}l_s]^{r^{\nu\delta}l_r},[u,v]^{\mu\varepsilon}f_{[u,v]}]\\ &\quad= [[g^{\mu\varepsilon}f_g, s^{\nu\delta}l_s]^{r^{\nu\delta}},[u,v]^{\mu\varepsilon}] = [[g^{\mu\varepsilon}f_g, s^{\nu\delta}l_s],[u,v]^{\mu\varepsilon}]^{r^{\nu\delta}}\\ &\quad= \left(l_s^{[u,v]^{\mu\varepsilon}} l_s^{-g^{\mu\varepsilon}[u,v]^{\mu\varepsilon}} l_s^{g^{\mu\varepsilon}} l_s^{-1}\right)^{r^{\nu\delta}} \left(f_g^{s^{\nu\delta}[u,v]^{\mu\varepsilon}} f_g^{-[u,v]^{\mu\varepsilon}} f_g f_g^{-s^{\nu\delta}}\right)^{r^{\nu\delta}}.\end{aligned}$$

(6) Снова применим лемму 1. Учитывая, что элементы $[g^{\mu\varepsilon}f_g, r^{\nu\delta}l_r]$, $l_{[s,t]}$, f_u содержатся в базисной подгруппе сплетения, выводим

$$\begin{aligned}&[[g^{\mu\varepsilon}f_g, r^{\nu\delta}l_r]^{u^{\mu\varepsilon}f_u},[s^{\nu\delta}l_s, t^{\nu\delta}l_t]]\\ &\quad= [[g^{\mu\varepsilon}f_g, r^{\nu\delta}l_r]^{u^{\mu\varepsilon}},[s,t]^{\nu\delta}l_{[s,t]}] = [[g^{\mu\varepsilon}f_g, r^{\nu\delta}l_r]^{u^{\mu\varepsilon}},[s,t]^{\nu\delta}]\\ &\quad= \left(f_g f_g^{-[s,t]^{\mu\varepsilon}} f_g^{r^{\nu\delta}[s,t]^{\nu\delta}} f_g^{-r^{\nu\delta}}\right)^{u^{\mu\varepsilon}} \left(l_r^{-1} l_r^{g^{\mu\varepsilon}} l_r^{-g^{\mu\varepsilon}[s,t]^{\nu\delta}} l_r^{[s,t]^{\nu\delta}}\right)^{u^{\mu\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Как и в случае 1, показываем, что $f_g f_g^{-[s,t]^{\mu\varepsilon}} = 1$ и $\left(f_g^{r^{\nu\delta}[s,t]^{\nu\delta}} f_g^{-r^{\nu\delta}}\right)^{u^{\mu\varepsilon}} = 1$. В результате замечаем, что (6) эквивалентно второму равенству из формулировки данной леммы.

Видим, что если равенства из формулировки леммы выполнены, то все равенства (1)–(6) истинны, следовательно, L — метабелева группа. Лемма доказана.

Отметим, что автору известен пример метабелевой группы G, для которой группа L не метабелева.

Лемма 5. *Пусть G — метабелева группа, $H \leq G'$, $R = H^G$. Если R выделяется в G' прямым сомножителем, то существует функция $s : G/R \to G$, выбирающая представителей смежных классов, такая, что*

$$(g[x,y]R)^s = (gR)^s([x,y]R)^s$$

для любых $x, y, g \in G$.

Доказательство. Если $R = G'$, то в качестве s берем любую выбирающую функцию со свойством $R^s = 1$. Считаем, что $G' = R \times T$, $T \neq (1)$. Сначала определим функцию $q : G'/R \to G'$. По каждому элементу $gR \in G'/R$ однозначно находится элемент $t \in T$ такой, что $gR = tR$. Полагаем $(gR)^q = t$. Ясно, что q является изоморфизмом группы G'/R на группу T, в частности, $(fg)^q = f^q g^q$ при $f, g \in G'$.

Пусть $c : G/G' \to G$ $((G')^c = 1)$ — любая функция, выбирающая представителей смежных классов. По определению полагаем

$$(gR)^s = (gG')^c(((gG')^c)^{-1}gR)^q.$$

Корректность определения s очевидна. Покажем, что s удовлетворяет условию леммы. Действительно, пусть $(gG')^c = g_1$. Тогда $g_1 = gu$ для некоторого $u \in G'$. Отсюда $((gG')^c)^{-1}gR = g_1^{-1}gR = u^{-1}g^{-1}gR = u^{-1}R$. Значит,

$$\begin{aligned}(gR)^s([x,y]R)^s = (gG')^c(((gG')^c)^{-1}gR)^q([x,y]G')^c(((([x,y]G')^c)^{-1}[x,y]R)^q \\ = g_1(u^{-1}R)^q([x,y]R)^q = g_1(u^{-1}[x,y]R)^q.\end{aligned}$$

С другой стороны, $(g[x,y]R)^s = (gG')^c(((gG')^c)^{-1}g[x,y]R)^q = g_1(g_1^{-1}g[x,y]R)^q = g_1(u^{-1}[x,y]R)^q$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G — метабелева группа, H — циклическая группа конечного порядка или локально циклическая группа без кручения. Предположим, что $H \leq G'$, H^G разлагается в прямое произведение некоторых своих подгрупп вида H^f $(f \in G)$ и H^G выделяется в G' прямым сомножителем. Тогда H замкнута в G.*

Доказательство. Используем обозначения, введенные ранее. Согласно лемме 3 достаточно доказать, что L — метабелева группа. Выбираем функцию s, удовлетворяющую лемме 5. Проверим выполнимость условий леммы 4. Для этого сначала вычислим $f_g^{-[g_1,g_2]^{\mu\varepsilon}} f_g^{r^\nu[g_1,g_2]^{\mu\varepsilon}} f_g f_g^{-r^\nu}(ab)$. Ясно, что это выражение равно $f_g^{-1}([g_1,g_2]^\mu ab) f_g([g_1,g_2]^\mu ar^\nu b) f_g(ab) f_g^{-1}(ar^\nu b)$.

По определению

$$f_g(ab) = \prod_{1\leq i,j\leq n} h_{a_ib_j}^{k_im_j}, \quad f_g([g_1,g_2]^\mu ab) = \prod_{1\leq i,j\leq n} h_{a_ib_j}^{k'_im_j},$$

где

$$(g^\mu a)^{-s_1}g^\mu a^{s_1} = h^{k_1a_1}h^{k_2a_2}\dots h^{k_na_n},$$
$$(g^\mu[g_1,g_2]^\mu a)^{-s_1}g^\mu([g_1,g_2]^\mu a)^{s_1} = h^{k'_1a_1}h^{k'_2a_2}\dots h^{k'_na_n},$$
$$h^b = h^{m_1b_1}h^{m_2b_2}\dots h^{m_nb_n}.$$

Воспользуемся леммой 5:

$$\begin{aligned}(g^\mu[g_1,g_2]^\mu a)^{-s_1}g^\mu([g_1,g_2]^\mu a)^{s_1} = ([g_1,g_2]^{\mu\varepsilon})^{-1}(g^\mu a)^{-s_1}g^\mu a^{s_1}[g_1,g_2]^{\mu\varepsilon} \\ (\text{так как } (g^\mu a)^{-s_1}g^\mu a^{s_1} \in M \leq A') = (g^\mu a)^{-s_1}g^\mu a^{s_1}.\end{aligned}$$

Следовательно, $k_i = k_i'$ для всех i, откуда $f_g^{-1}([g_1, g_2]^\mu ab) f_g(ab) = 1$. Так же показывается, что $f_g([g_1, g_2]^\mu ar^\nu b) f_g^{-1}(ar^\nu b) = 1$. Тем самым первое равенство из формулировки леммы 5 истинно. Второе равенство из формулировки леммы 5 проверяется аналогично. По лемме 5 группа L метабелева. Применение леммы 3 завершает доказательство теоремы. Теорема доказана.

Отметим, что если в формулировке теоремы 1 опустить фразу «H^G разлагается в прямое произведение некоторых своих подгрупп вида H^f $(f \in G)$ и H^G выделяется в G' прямым сомножителем», то теорема перестанет быть верной. Соответствующий пример для бесконечной циклической группы H автору известен.

Заметим, что если H изоморфна аддитивной группе рациональных чисел, $H \leq G'$ и H^G не имеет кручения, то H^G как векторное пространство над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел порождается множеством элементов $\{h^g \mid g \in G\}$. По лемме Цорна это множество содержит максимальную линейно независимую над $\mathbf{Q}$ подсистему $\{h^g \mid g \in I\}$ (это базис векторного пространства H^G). Отсюда следует, что H^G разлагается в прямое произведение некоторых своих подгрупп вида H^g $(g \in I)$. Кроме того, поскольку H^G — полная абелева группа, то, как хорошо известно, она выделяется в G' прямым сомножителем. Применяя теорему 1, получаем

Следствие 1. *Пусть G — метабелева группа, $H \leq G'$, H изоморфна аддитивной группе рациональных чисел и H^G не имеет кручения. Тогда H замкнута в G.*

Заметим, что если H — циклическая группа простого порядка, содержащаяся в G', то H^G разлагается в прямое произведение своих подгрупп вида H^f $(f \in G)$. Если еще p-примарная компонента группы G' имеет экспоненту p, то H^G выделяется в G' прямым сомножителем. Отсюда и из теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Пусть G — метабелева группа, $H \leq G'$ и H — циклическая группа простого порядка. Предположим, что p-примарная компонента группы G' имеет экспоненту p. Тогда $\mathrm{dom}_G^{\mathscr{A}^2}(H) = H$.*

Заметим, что если G — метабелева группа, H — ее периодическая локально циклическая группа, то теорема 1 справедлива и в этом случае. Доказательство этого факта практически повторяет доказательство теоремы 1. Не будем его приводить полностью, отметим только некоторые изменения, которые нужно внести в доказательство теоремы 1. Считаем, что H задана следующим представлением:

$$H = \mathrm{gr}(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}, \dots \| (h^{(1)})^{t_1} = 1, (h^{(2)})^{t_2} = h^{(1)}, \dots, (h^{(i)})^{t_i} = h^{(i-1)}, \dots),$$

V — множество натуральных чисел. Учитывая, что порядок каждого сомножителя в разложении элементов $(h^{(w)})^b$, $(h^{(w)})^a$ в виде произведения элементов из разных подгрупп прямого произведения делит порядок $h^{(w)}$, заметим, что все эти сомножители содержатся в подгруппах вида $((h^{(w)})^{b_i})$, $((h^{(w)})^{a_i})$. Элементы $f_g(ab), l_r(ab)$ определяем так:

если

$$(g^\mu a)^{-s_1} g^\mu a^{s_1} = (h^{(w)})^{k_1 a_1} \dots (h^{(w)})^{k_n a_n}, \quad (h^{(w)})^b = (h^{(w)})^{m_1 b_1} \dots (h^{(w)})^{m_n b_n},$$

то

$$f_g(ab) = \prod_{1 \leq i,j \leq n} \left(h^{(w)}_{a_i b_j}\right)^{k_i m_j};$$

если

$$(r^\nu b)^{-s_2} r^\nu b^{s_2} = (h^{(w)})^{m_1 b_1} \dots (h^{(w)})^{m_n b_n}, \quad (h^{(w)})^a = (h^{(w)})^{k_1 a_1} \dots (h^{(w)})^{k_n a_n},$$

то

$$l_r(ab) = \prod_{1 \le i,j \le n} \left(h^{(w)}_{a_i b_j}\right)^{k_i m_j}.$$

В результате получим

Следствие 3. *Пусть G — метабелева группа, H — периодическая локально циклическая группа. Предположим, что H^G разлагается в прямое произведение некоторых своих подгрупп вида H^f $(f \in G)$ и H^G выделяется в G' прямым сомножителем. Тогда H замкнута в G.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isbell J. R.* Epimorphisms and dominions // Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, 1965). New York: Lange and Springer, 1966. P. 232–246.
2. *Higgins P. M.* Epimorphisms and amalgams // Colloq. Math. 1988. V. 56. P. 1–17.
3. *Budkin A. I.* Dominions in quasivarieties of universal algebras // Stud. Log. 2004. V. 78, N 1/2. P. 107–127.
4. *Будкин А. И.* Решетки доминионов универсальных алгебр // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 26–45.
5. *Шахова С. А.* О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 2. С. 238–251.
6. *Мальцев А. И.* Квазипримитивные классы абстрактных алгебр // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, № 2. С. 187–189.
7. *Шахова С. А.* Условия дистрибутивности решеток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 484–499.
8. *Шахова С. А.* Об одном свойстве операции пересечения в решетках доминионов квазимногообразий абелевых групп // Изв. АлтГУ. 2010. Т. 65, № 1. С. 41–43.
9. *Шахова С. А.* О существовании решетки доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Изв. АлтГУ. 2011. Т. 69, № 1. С. 31–33.
10. *Magidin A.* Dominions in varieties of nilpotent groups // Comm. Algebra. 2000. V. 28. P. 1241–1270.
11. *Magidin A.* Absolutely closed nil-2 groups // Algebra Univers. 1999. V. 42. P. 61–77.
12. *Будкин А. И.* О доминионах в квазимногообразиях метабелевых групп // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 498–505.
13. *Будкин А. И.* О доминионе полной подгруппы метабелевой группы // Изв. АлтГУ. 2010. Т. 65, № 2. С. 15–19.
14. *Будкин А. И.* О доминионах абелевых подгрупп метабелевых групп // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 5. С. 608-622.
15. *Будкин А. И.* Квазимногообразия групп. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002.
16. *Будкин А. И., Горбунов В. А.* К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 2. С. 123–142.
17. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий.. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
18. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
19. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

Статья поступила 28 февраля 2014 г.

Будкин Александр Иванович
Алтайский гос. университет,
пр. Ленина, 61, Барнаул 656049
budkin@math.asu.ru