*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5*

*УДК 519.46+514.763+512.81+519.9+517.911*

# УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА НОРМАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ГРУППАХ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ СУБРИМАНОВОЙ МЕТРИКОЙ

**В. Н. Берестовский**

**Аннотация.** Получены два варианта ОДУ для управляющей функции нормальных геодезических левоинвариантных субримановых метрик на группах Ли, использующих лишь структуру алгебр Ли групп Ли. Первый вариант применим для всех групп Ли, второй — для всех матричных групп Ли; оба являются различными инвариантными формами гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для левоинвариантной задачи оптимального быстродействия на группе Ли. На основе первого варианта найдены достаточные условия для нормальности всех геодезических данной субфинслеровой метрики на группе Ли; в частности, показано, что это свойство имеют все трехмерные группы Ли. В доказательствах использована простая техника линейной алгебры.

**Ключевые слова:** алгебра Ли, группа Ли, задача быстродействия, инвариантная субриманова метрика, кратчайшая, нормальная геодезическая, принцип максимума Понтрягина, система Гамильтона, управляющая функция.

*Юрию Григорьевичу Решетняку*
*с благодарностью посвящаю*

## Введение

В работах автора [1–3] доказано, что всякое однородное, т. е. имеющее транзитивную группу движений, топологическое многообразие с внутренней метрикой изометрично некоторому однородному пространству группы Ли по ее компактной подгруппе, снабженному инвариантной (суб)финслеровой метрикой. Как следствие, любая левоинвариантная внутренняя метрика на (автоматически связной) группе Ли, совместимая с ее топологией, (суб)финслерова.

Из [3] следует, что, по существу, поиск геодезических, т. е. локально кратчайших, на однородном пространстве группы Ли с инвариантной (суб)финслеровой, в частности (суб)римановой, метрикой сводится к поиску геодезических некоторой левоинвариантной (суб)финслеровой (соответственно (суб)римановой) метрики на этой группе Ли.

В [1] показано, что кратчайшие пути левоинвариантной (суб)финслеровой метрики на группе Ли суть решения соответствующей левоинвариантной задачи оптимального быстродействия с некоторым центрально симметричным вы-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00068–а) и гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

пуклым телом на векторном подпространстве алгебры Ли группы Ли в качестве области управления; в случае (суб)римановой метрики границей области управления служит эллипсоид. Таким образом, к поиску геодезических любой левоинвариантной (суб)финслеровой метрики на группе Ли можно применить принцип максимума Понтрягина (ПМП) [4] для такой задачи оптимального быстродействия.

В [5] на основе ПМП для задачи оптимального быстродействия найдены геодезические и кратчайшие произвольно заданной субфинслеровой метрики на трехмерной группе Гейзенберга. Автору известны еще только три работы [6–8], связанные с поиском геодезических левоинвариантных субфинслеровых, но не субримановых метрик на группах Ли, хотя именно такие метрики очень естественно появляются на так называемых группах Карно в основополагающей работе М. Громова [9] как пределы словарных метрик на конечно порожденных группах полиномиального роста.

В [10] впервые, насколько известно автору, найдены ОДУ (и в некоторых случаях найдены их решения) для геодезических левоинвариантной субримановой метрики на группе сохраняющих ориентацию движений евклидовой плоскости. Метрика естественно привязана к некоторой вариационной задаче для кусочно дважды непрерывно дифференцируемых кривых на плоскости; ОДУ формулируются на языке эллиптических функций Якоби. Позже именно эта субриманова задача появилась как важная модель в робототехнике и нейрофизиологии зрения и недавно получила полное решение (ссылок на статью [10] не было).

ПМП в [4] представлен в координатном виде, и в [5] автор мог использовать его напрямую, так как экспоненциальное отображение для группы Гейзенберга является диффеоморфизмом и потому глобально определена система координат первого рода. Определение форм сфер шаров некоторых субримановых метрик на трехмерных группах Ли в [11] основано на решении изопериметрической задачи Дидоны для трех типов двумерных односвязных однородных римановых многообразий. В [10] автор использовал метод Стричартса [12]. Он отличен от подхода А. М. Вершика и В. Я. Гершковича в [13], но, по мнению автора, эквивалентен ему.

Таким образом, в упомянутых работах автор использовал различные методы. В данной работе представлены два универсальных метода поиска нормальных геодезических левоинвариантных субримановых метрик на любых группах Ли (соответственно на любых матричных группах Ли), основанных на ПМП для задачи оптимального быстродействия.

Принципиальное отличие этих методов от подходов в [12, 13] состоит в том, что сначала выделяется задача поиска управляющей функции для геодезической; поиск геодезической становится значительно проще, если эта функция найдена. При этом в обоих методах ОДУ для управляющей функции используют лишь структуру алгебры Ли рассматриваемой группы Ли и скалярное произведение на соответствующем векторном подпространстве этой алгебры Ли, которое определяет левоинвариантную субриманову метрику.

Вторая, завершающая, часть задачи для всех существующих подходов одинакова и состоит в решении ОДУ (3), являющегося следствием левой инвариантности метрики. Задача выделения кратчайших путей из геодезических существенно зависит от рассматриваемых субримановых многообразий и в этой статье не исследуется.

Оба варианта ОДУ являются бескоординатными инвариантными формами гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для левоинвариантной задачи оптимального быстродействия на группе Ли. Заметим, что сами по себе эти инвариантные виды (формы) системы Гамильтона зависят лишь от структуры алгебры Ли группы Ли и не зависят от метрики, но затем адаптируются к ней. Сначала ОДУ выводятся для группы Ли $GL(n)$ невырожденных вещественных $(n \times n)$-матриц, допускающей глобальную систему координат, а затем распространяются на общий случай. При этом для первого варианта на основе теоремы Адо [14] и теоремы Фробениуса о вполне интегрируемости инволютивных распределений [15] приходится доказывать третью теорему Ли.

При выводе первого варианта вектор-функция $\psi$ из координатной записи гамильтоновой системы в [4] для случая группы Ли $GL(n)$ интерпретируется как некоторая левоинвариантная дифференциальная 1-форма на группе Ли, а при выводе второго ее компоненты интерпретируются как элементы $(n \times n)$-матрицы.

На основе первого варианта найдены достаточные условия для нормальности всех геодезических данной субфинслеровой метрики на группе Ли; в частности показано, что это свойство имеют все трехмерные группы Ли. Заметим, что на некоторых группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой могут существовать анормальные геодезические [16–18]; они требуют особых методов изучения; методы, применимые к любым группам Ли с левоинвариантной субримановой метрикой, автору неизвестны.

В разд. 1 приведены некоторые предварительные сведения, в разд. 2 введены необходимые понятия и обоснованы существование кратчайших левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли и применимость ПМП для задачи оптимального быстродействия к их поиску.

Профессор А. А. Аграчев после завершения основной части этой статьи обратил внимание автора на гл. 18 книги [19]. Оказалось, что гамильтонову систему (6), (7) из леммы 1 и теоремы 2 можно записать в том же виде, что гамильтонову систему (18.15) из [19] или первое уравнение из доказательства теоремы 5 гл. 12 книги Джурджевича [20]. Но с учетом левой инвариантности «функция Понтрягина — Гамильтона» в настоящей статье определена на прямом произведении алгебры Ли группы Ли и дуального к алгебре Ли пространства, в то время как гамильтонианы в [19, 20] — на дуальном пространстве к алгебре Ли. Кроме того, в нашей статье использована существенно более простая техника линейной алгебры.

Автор благодарит профессора А. А. Аграчева за полезные дискуссии и особо лабораторию геометрической теории управления Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и профессора С. К. Водопьянова за гостеприимство и предоставленную возможность чтения лекций в ИМ на тему «Однородные пространства с внутренней метрикой и субфинслеровы многообразия». Второй метод из этой статьи был представлен во время чтения этих лекций; несколько методический характер этого введения связан именно с их чтением.

## 1. Некоторые предварительные сведения

Напомним, что группа Ли $Gl(n)$ состоит из всех вещественных $(n \times n)$-матриц $g = (g_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, таких, что $\det g \neq 0$, а ее связная компонента единицы $e$, подгруппа Ли $Gl_0(n)$, определяется условием $\det g > 0$. Поэтому множества $g_{ij} \in \mathbb{R}^{n^2}$, где $g \in Gl(n)$ или $g \in Gl_0(n)$, открыты в $\mathbb{R}^{n^2}$; если

$f = gh^{-1}$, то элементы матрицы $f$ являются рациональными функциями от элементов матриц $g$ и $h$. Следовательно, естественно рассматривать $Gl(n)$ и $Gl_0(n)$ как открытые гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Их алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n) = Gl(n)_e := Gl_0(n)_e$, касательное пространство к группам в единице $e$, есть множество всех вещественных $(n \times n)$-матриц с обычной структурой вещественного векторного пространства и скобкой Ли

$$[a,b] = ab - ba, \quad a,b \in \mathfrak{gl}(n). \tag{1}$$

Группа Ли $SO(n) = O(n) \cap Gl_0(n)$ всех ортогональных матриц с определителем 1 — связная подгруппа Ли в $Gl_0(n)$. Ее алгебра Ли $(\mathfrak{so}(n), [\cdot,\cdot])$ есть подалгебра Ли алгебры Ли $(\mathfrak{gl}(n), [\cdot,\cdot])$, состоящая из всех кососимметричных матриц.

По определению евклидово пространство $E^n$ есть $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $(x,x) = x^T x$, где $x \in \mathbb{R}^n$ понимается как вектор-столбец, а $^T$ здесь и далее обозначает транспонирование матриц. В статье как вспомогательное средство будет использоваться стандартное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$.

## 2. Принцип максимума Понтрягина для кратчайших на группах Ли с левоинвариантной субфинслеровой метрикой

В начале этого раздела мы следуем [1]. Пусть $G$ — группа Ли и $g \in G$. Тогда определены *операция левого сдвига* $l_g(h) = gh$, $h \in G$, и ее дифференциал $dl_g$. Векторное поле $X$ на $G$ называется *левоинвариантным*, если $X(gh) = dl_g(X(h))$ для любых элементов $g,h \in G$. *Левоинвариантное распределение $D$ на группе Ли $G$* есть векторное подрасслоение касательного расслоения $TG$ группы Ли $G$ такое, что существует конечный набор $X_1,\dots,X_n$ левоинвариантных векторных полей на $G$, для которого $D(g)$, $g \in G$, есть линейная оболочка векторов $X_1(g),\dots,X_n(g)$, при этом можно считать, что $X_1,\dots,X_n$ линейно независимы над полем $\mathbb{R}$. Левоинвариантное распределение $D$ на $G$ называется *вполне неголономным*, если наименьшая подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $G$, содержащая $D(e)$, совпадает с $\mathfrak{g}$.

Вследствие теоремы Рашевского — Чжоу [21, 22] если группа Ли связна, а $D$ — вполне неголономное левоинвариантное распределение на $G$, то для любых двух элементов $g,h \in G$ существует кусочно непрерывно дифференцируемый путь $c = c(t)$, $0 \le t \le a$, в $G$, касающийся распределения $D$ и соединяющий точки $g$ и $h$, т. е. $\dot c(t) \in D(c(t))$, $0 \le t \le a$, причем $c(0) = g$ и $c(a) = h$. Пусть $F$ — левоинвариантная норма на $D$, т. е. $F(g)$ — норма на $D(g)$ для каждого $g \in G$ и $F(g)(dl_g(v)) = F(e)(v)$ для любого вектора $v \in D(e)$. Тогда на $G \times G$ определена метрика $d = d_F$: $d_F(g,h)$ определяется как точная нижняя граница длин $L(c)$ путей $c$ указанного выше вида, где

$$L(c) = \int_0^a F(\dot c(t))\,dt. \tag{2}$$

В результате получаем $(G, d_F)$ — группу Ли $G$ с левоинвариантной субфинслеровой метрикой $d_F$, определяемой левоинвариантными вполне неголономным распределением $D$ на $G$ и нормой $F$ на $D$. Метрика $d = d_F$ называется *субримановой*, если

$$F(e)(v) = \sqrt{\langle v,v\rangle}, \quad v \in \mathfrak{g},$$

для некоторого скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $D(e)$.

Замечание 1. Обычно приставка «суб» применяется, только если $D(e)\neq\mathfrak{g}$, иначе она опускается. Автор следует этой традиции. Нетрудно найти левоинвариантную риманову метрику на $G$, меньшую метрики $d_F$. Как следствие, топология метрического пространства $(G,d_F)$ совпадает с исходной топологией группы Ли $G$, метрическое пространство $(G,d_F)$ локально компактно, а потому и полно, так как метрика $d_F$ левоинвариантна. По определению метрика $d_F$ внутренняя. Тогда на основании теоремы Кон-Фоссена [23] для любых $g,h\in G$ нижняя граница величин (2) всегда достигается, т. е. существует кратчайший путь $c$, соединяющий $g$ и $h$. Кроме того, можно и будем считать, что кратчайший путь $c$ параметризован длиной дуги.

Пусть

$$U=\{u\in D(e):F(u)\leq 1\},\quad \partial U=\{u\in D(e):F(u)=1\}.$$

Ясно, что всякий спрямляемый путь $c=c(t)$, $0\leq t\leq a$, на $(G,d_F)$, параметризованный длиной дуги $t$, удовлетворяет почти всюду ОДУ (системе управления)

$$\dot{c}(t)=dl_{c(t)}(u(t)),\quad u(t)\in\partial U,\ 0\leq t\leq a \tag{3}$$

(линейной по управлению!), с измеримой (вообще говоря, разрывной) функцией управления $u(t)$ и областью управления $U$.

Длина такого пути $c=c(t)$ есть время движения. Поэтому кратчайший путь $\gamma=\gamma(t)$ в $(G,d_F)$, соединяющий точки $g,h$, должен быть оптимальной по быстродействию траекторией системы управления и необходимо удовлетворять принципу максимума Понтрягина ПМП [4]. В общем случае этот принцип утверждает, что для оптимальной по быстродействию траектории $c=c(t)$ системы управления с областью управления $U$ должно существовать некоторое ненулевое непрерывное ковекторное поле $\psi=\psi(t)$ вдоль $c=c(t)$ такое, что для функции Гамильтона $H=H(\psi,c,t,u)=\psi(\dot{c}(t))$ при п. в. $t$

$$H(\psi(t),c(t),t,u(t)):=\max_{u\in U}H(\psi(t),c(t),t,u)=M(t)\equiv M_0\geq 0; \tag{4}$$

при этом $\dot{c}(t)=\mathscr{L}(c(t),t)(u(t))$, где $u\in U$ — некоторый вектор, а $\mathscr{L}(c(t),t)$ — некоторое невырожденное линейное отображение; кроме того, $\psi=\psi(t)$ определяется гамильтоновой системой дифференциальных уравнений, определяемой функцией Гамильтона.

Замечание 2. ПМП формулируется в [4] в терминах локальных координат на многообразии, но $\psi=\psi(t)$ и $H$, следовательно, и $M_0$ не зависят от координат.

## 3. Инвариантные формы функции и системы Гамильтона для левоинвариантных задач быстродействия на группах Ли

В случае группы Ли $G$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ с помощью левоинвариантных дифференциальных 1-форм $\psi$ можно записать функцию Гамильтона $H=H(\psi,g,u)$ $=H(\psi,u)$ для левоинвариантной задачи быстродействия с областью управления $U\subset\mathfrak{g}$ в следующем инвариантном виде, не зависящем от $U$:

$$H=\psi(dl_g(u))=\psi(u),\quad \text{где } g\in G,\ u\in\mathfrak{g}. \tag{5}$$

Следующая наша цель — получить инвариантную форму для системы Гамильтона, определяемой функцией $H$. Начнем со случая группы Ли $Gl(n)$.

**Лемма 1.** *Гамильтонова система для функции* (5) *на группе Ли* $G = Gl(n)$ *с алгеброй Ли* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ *имеет вид*

$$\dot{g}_t(\psi, g, u) = dl_g(u), \quad g \in G,\ u \in \mathfrak{g}, \tag{6}$$

$$(\psi(v))'_t(\psi, g, u) = \psi([u, v]), \quad g \in G,\ u, v \in \mathfrak{g}. \tag{7}$$

Доказательство. Вследствие (5) и формул в [4, с. 73] получаем

$$H(\psi, g, t, u) = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(\psi, g)\left(\sum_{l=1}^{n} g_{il}u_{lj}\right) = \sum_{l,j=1}^{n} (g^T\psi)_{lj}u_{lj}. \tag{8}$$

Переменные (в данном случае матричные элементы) $g_{ij}$, $\psi_{ij}$ должны удовлетворять гамильтоновой системе уравнений

$$(g_{ij})'_t(\psi, g, u) = \frac{\partial H}{\partial \psi_{ij}}(\psi, g, u) = \sum_{l=1}^{n} g_{il}u_{lj} = (gu)_{ij}, \tag{9}$$

$$(\psi_{ij})'_t(\psi, g, u) = -\frac{\partial H}{\partial g_{ij}} = -\sum_{m=1}^{n} \psi_{im}u_{jm} = -(\psi u^T)_{ij}. \tag{10}$$

Формула (9) — частный случай формулы (6). Ясно, что

$$\psi(v)(\psi, g, u) = \psi(v) = \psi(gv) = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(\psi, g, u)\left(\sum_{l=1}^{n} g_{il}(\psi, g, u)v_{lj}\right).$$

Отсюда на основании формул (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned}
(\psi(v))'_t(\psi, g, u) = {} & \sum_{i,j=1}^{n} (\psi_{ij})'_t(\psi, g, u)\left(\sum_{l=1}^{n} g_{il}(\psi, g, u)v_{lj}\right) \\
& + \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(\psi, g, u)\left(\sum_{l=1}^{n} (g_{il})'_t(\psi, g, u)v_{lj}\right) \\
& = -\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n} \psi_{im}(\psi, g, u)u_{jm}\sum_{l=1}^{n} g_{il}(\psi, g, u)v_{lj}\right) \\
+ \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(\psi, g, u)&\left(\sum_{l,m=1}^{n} g_{im}u_{ml}v_{lj}\right) = -\sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(\psi, g, u)\left(\sum_{l=1}^{n} g_{il}(vu)_{lj}\right) \\
+ \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(\psi, g, u)&\left(\sum_{l=1}^{n} g_{il}(uv)_{lj}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij}(\psi, g, u)(g[u, v])_{ij} = \psi([u, v]),
\end{aligned}$$

что доказывает формулу (7).

Нетрудно видеть из проведенных вычислений, что системы (6), (7) и (9), (10) эквивалентны. □

Следующая теорема известна как третья теорема Ли, но мы доказываем ее, так как далее будет нужен и метод доказательства.

**Теорема 1.** *Для каждой алгебры Ли существует группа Ли с изоморфной ей алгеброй Ли.*

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ — произвольная алгебра Ли. По теореме Адо [14] для некоторого натурального $n$ существует ее реализация в виде подалгебры Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$.

Пусть $\Gamma$ — левоинвариантное распределение на группе Ли $Gl(n)$ с условием $\Gamma(e) = \mathfrak{g}$. Это распределение инволютивно и, стало быть, вполне интегрируемо по теореме Фробениуса. Эта теорема является следствием предложения 1.59 и теоремы 1.60 в книге Уорнера [15]. Тем самым существует слоение $\mathfrak{F}$ на $Gl(n)$, касательное к распределению $\Gamma$; его слоями являются интегральные многообразия распределения $\Gamma$. В индуцированной топологии условие замкнутости слоев эквивалентно их локальной связности. Это условие может нарушаться, тогда слои не являются подмногообразиями и многообразиями в обычном смысле (в терминологии, принятой в книге [24], они все же являются гладкими подмногообразиями в $Gl(n)$). Но и в этом случае каждый слой превратится в гладкое многообразие, если в качестве базы так называемой топологии слоя на нем взять компоненты связности (в индуцированной топологии) пересечений открытых подмножеств из $Gl(n)$ со слоем; при этом относительно слоевой топологии слой должен быть связным. Кроме того, для каждой точки слоя $S \in \mathfrak{F}$ некоторая окрестность этой точки в $S$ относительно слоевой топологии является гладким подмногообразием в $Gl(n)$ в обычном смысле. Ясно, что слой слоения $\mathfrak{F}$, проходящий через $e$ и снабженный слоевой топологией, — связная группа Ли $\widetilde{G}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$; в нестандартном случае ее называют виртуальной подгруппой Ли группы Ли $Gl(n)$. $\square$

Замечание 3. В [25] некоторый вариант этой теоремы сформулирован как теорема 2.9 и дан набросок ее доказательства. Короткое доказательство теоремы Адо с использованием обертывающих алгебр Ли получил Ю. А. Неретин в [26].

**Теорема 2.** *Гамильтонова система для функции* (5) *на произвольной группе Ли $G$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид* (6), (7).

Доказательство. Пусть $\widetilde{G} \subset Gl(n)$ — группа Ли (со слоевой топологией) из теоремы 1 с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Ясно, что тождественный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ индуцирует посредством экспоненциальных отображений локальный изоморфизм некоторых окрестностей единиц групп Ли $(G, d)$ и $\widetilde{G}$, теорема 2 — следствие леммы 1. $\square$

## 4. Уравнения нормальных геодезических для левоинвариантных субфинслеровых метрик на группах Ли

Определение 1. Далее *геодезической в* $(G, d_F)$ называется кривая $\gamma = \gamma(t)$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, параметризованная длиной дуги и удовлетворяющая ПМП для задачи быстродействия. Геодезическая называется *нормальной*, если $M_0 > 0$ в (4) для $H$ из (5).

**Теорема 3.** *Пусть $(G, d_F)$ — связная группа Ли с алгеброй Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ и левоинвариантной субфинслеровой метрикой, определяемой левоинвариантными вполне неголономным распределением $D$ на $G$ и нормой $F$ на $D$. Если $\mathfrak{g} = [u, D(e)] + D(e)$ для каждого ненулевого вектора $u \in D(e)$, не являющегося* *центральным в $\mathfrak{g}$, то каждая геодезическая в $(G, d_F)$ нормальна. В частности, каждая геодезическая в $(G, d_F)$ нормальна, если* $\dim \mathfrak{g} = 3$.

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем, когда $D(e)$ не содержит ненулевых центральных элементов из $\mathfrak{g}$. Пусть $\gamma = \gamma(t)$, $t \in (a, b)$, — геодезическая в $(G, d_F)$ с условием (6) с $u = u(t)$ для п. в. $t \in (a, b)$. Тогда вследствие ПМП и (5) существует ненулевая непрерывная функция $\psi = \psi(t)$, $t \in (a, b)$, где $\psi(t)$ — левоинвариантные дифференциальные 1-формы на $G$, такие, что для п. в. $t \in (a, b)$

$$\psi(t)(u(t)) := \max_{u \in U} \psi(t)(u) = M(t) \equiv M_0 \geq 0.$$

Если $M_0 = 0$, т. е. геодезическая $\gamma$ *анормальная*, то $\psi(t)(D(e)) \equiv 0$. Возьмем $t_0 \in (a, b)$, для которого выполняется (6) с $u = u(t_0)$. Тогда $0 \neq u(t_0) \in D(e)$ и вследствие условия теоремы, существует $v \in D(e)$ такое, что $\psi(t_0)([u(t_0), v]) \neq 0$. Тем самым на основании (7) $(\psi(t)(v))'(t_0) = \psi(t_0)([u(t_0), v]) \neq 0$; противоречие. $\square$

Введем на $G$ какое-нибудь вспомогательное левоинвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда каждую левоинвариантную дифференциальную 1-форму $\psi$ на $G$ можно отождествить с левоинвариантным векторным полем $\psi^*$ на $G$ или его значением $\psi^*(e)$ по формуле

$$\psi(w) = \langle \psi^*(e), w \rangle, \quad w \in \mathfrak{g},$$

при этом сохраним за $\psi^*$ и $\psi^*(e)$ обозначение $\psi$.

Тогда равенства (5), (7) можно переписать в виде

$$H(\psi, g, u) = \langle \psi, u \rangle, \quad g \in G,\ \psi, u \in \mathfrak{g}, \tag{11}$$

$$\langle \psi_t'(\psi, g, u), v \rangle = \langle \psi, [u, v] \rangle, \quad g \in G,\ \psi, u, v \in \mathfrak{g}. \tag{12}$$

Если $\gamma = \gamma(t)$ — нормальная геодезическая, параметризованная длиной дуги, то вследствие ПМП для соответствующих функций $u = u(t)$ и $\psi = \psi(t)$ должно быть

$$\langle \psi(t), u(t) \rangle = \langle \mathrm{pr}_{D(e)}(\psi(t)), u(t) \rangle = \max_{u \in U} \langle \mathrm{pr}_{D(e)}(\psi(t)), u \rangle,$$

где $\mathrm{pr}_{D(e)}$ — ортогональное проектирование на $D(e)$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Заметим, что для $v \in D(e)$ функция $h_U(v) := \max\limits_{u \in U} \langle v, u \rangle$ известна как опорная функция выпуклого тела $U$. Таким образом, условие ПМП для $u(t)$ можно переписать в виде

$$0 < M_0 \equiv M(t) = h_U(\mathrm{pr}_{D(e)}(\psi(t))) = \langle \mathrm{pr}_{D(e)}(\psi(t), u(t) \rangle. \tag{13}$$

Рассмотрим частный случай матричной группы Ли $G \subset Gl_0(n)$. Так как $u \in U \subset D(e) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, равенство (8) можно переписать в виде

$$H(\psi, g, u) = (g^T \psi, u) = (\mathrm{pr}_{D(e)}(g^T \psi), u), \tag{14}$$

где $\mathrm{pr}_{D(e)}$ — ортогональное проектирование на $D(e)$ относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$. Вследствие ПМП для функций $\gamma(t), \psi(t)$ должно быть

$$(\mathrm{pr}_{D(e)}(\gamma(t)^T \psi(t)), u(t)) = \max_{u \in U} (\mathrm{pr}_{D(e)}(\gamma(t)^T \psi(t)), u).$$

Таким образом, условие ПМП для $u(t)$ можно переписать в виде

$$0 < M_0 \equiv h_U(\mathrm{pr}_{D(e)}(\gamma(t)^T\psi(t))) = (\mathrm{pr}_{D(e)}(\gamma(t)^T\psi(t)), u(t)). \tag{15}$$

Замечание 4. Если геодезическая $\gamma = \gamma(t)$ *анормальна*, то условия (13), (15) не выделяют никаких управляющих функций $u = u(t)$. Если геодезическая $\gamma = \gamma(t)$ нормальна, то, взяв, если необходимо, функцию $\bar{\psi} = \frac{\psi(t)}{M_0}$ вместо $\psi = \psi(t)$, можно и будем считать, что $M_0 = 1$; при этом формулы (7) и (13) сохраняются.

**Теорема 4.** *Пусть $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(0) = e$, — нормальная геодезическая на связной группе Ли $(G, d)$ с левоинвариантной субримановой метрикой, определяемой распределением $D$ и скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $D(e)$; скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{g}$ выбрано так, что его ограничение на $D(e)$ совпадает с $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тогда $\gamma = \gamma(t)$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\dot{\gamma}(t) = dl_{\gamma(t)}(u(t)), \quad u(t) \in D(e),\ (u(t), u(t)) \equiv 1, \tag{16}$$

$$\psi = \psi(t) = u(t) + v(t), \quad v = v(t) \in \mathfrak{g} \cap D(e)^{\perp}, \tag{17}$$

$$\dot{\psi}(t) = \sum_{l=1}^{n}(\dot{\psi}(t), b_l)b_l = \sum_{l=1}^{n}(\psi(t), [u(t), b_l])b_l \tag{18}$$

*с некоторыми начальными данными*

$$\psi(0) = \psi_0, \quad \gamma(0) = e, \quad \dot{\gamma}(0) = u(0) \in D(e),$$

*где $u = u(t)$, $v = v(t)$ — вещественно-аналитические вектор-функции, $\{b_1, \dots, b_n\}$ — ортонормированный базис в $(\mathfrak{g}, (\cdot,\cdot))$, согласованный с ортогональным разложением $\mathfrak{g} = D(e) \oplus D(e)^{\perp}$.*

Доказательство. Все утверждения этой теоремы являются следствиями теоремы 2, замечания 4, уравнения (13) при $M_0 = 1$ и вещественной аналитичности правых частей гамильтоновой системы из теоремы 2. $\square$

## 5. Уравнения нормальных геодезических для левоинвариантных субримановых метрик на матричных группах Ли

В этом разделе дается другой метод поиска нормальных геодезических для левоинвариантных субримановых метрик на подгруппах Ли $G \subset Gl_0(n)$ с левоинвариантной субримановой метрикой.

**Предложение 1.** *Пусть $d$ — левоинвариантная субриманова метрика на группе Ли $G$, определяемая левоинвариантными вполне неголономным распределением $D$ и скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $D$. Тогда*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = (A\cdot,\cdot) = (A^{1/2}\cdot, A^{1/2}\cdot), \tag{19}$$

*где $A : D(e) \to D(e)$ — некоторый положительно определенный симметрический (линейный) оператор относительно $(\cdot,\cdot)$. Если $\gamma = \gamma(t)$ — параметризованная длиной дуги нормальная геодезическая на $(G, d)$ с началом $e$, то соблюдаются равенства*

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)u(t), \tag{20}$$

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)(u(t))^T, \tag{21}$$

$$\mathrm{pr}_{D(e)}(\gamma(t)^T\psi(t)) = A(u(t)), \quad \langle u(t), u(t)\rangle \equiv 1, \tag{22}$$

*где* $\mathrm{pr}_{D(e)}$ *— ортогональное проектирование на* $D(e)$ *относительно* $(\cdot,\cdot)$, *с некоторыми начальными данными*

$$\psi(0) = \psi_0, \quad \gamma(0) = e, \quad \dot\gamma(0) = u(0) \in D(e).$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. ОДУ (20), (21) — сокращенная запись ОДУ (9), (10). Второе равенство в (22) следует из того, что геодезическая $\gamma = \gamma(t)$ параметризована длиной дуги; докажем первое.

Из формулы (19) следует, что $A^{1/2}u(t) = w(t)$, где $w(t) \in D(e)$, $(w(t), w(t)) = 1$. Тогда первое равенство в (22) эквивалентно равенству

$$\mathrm{pr}_{D(e)}(\gamma(t)^T\psi(t)) = A^{1/2}(w(t)). \tag{23}$$

На основании формулы (13) для доказательства этого равенства достаточно доказать, что

$$1 = h_U(A^{1/2}(w(t))) = (A^{1/2}(w(t)), u(t)). \tag{24}$$

Пусть $u \in U$. Тогда вследствие (19) $u = (A^{1/2})^{-1}(w)$, где $w \in D(e)$, $(w, w) \le 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}(A^{1/2}(w(t)), u) &= (A^{1/2}(w(t)), (A^{1/2})^{-1}(w))\\ &= ((A^{1/2})^{-1}A^{1/2}(w(t)), w) = (w(t), w) \le |w(t)||w| \le 1\\ &= (w(t), w(t)) = ((A^{1/2})^{-1}A^{1/2}(w(t)), w(t))\\ &= (A^{1/2}(w(t)), (A^{1/2})^{-1}(w(t))) = (A^{1/2}w(t), u(t)). \quad \square\end{aligned}$$

**Теорема 5.** *Нормальные, параметризованные длиной дуги геодезические* $\gamma = \gamma(t)$ *на* $(G, d)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\dot\gamma(t) = \gamma(t)u(t), \quad u(t) \in D(e) \subset \mathfrak{g}, \quad \langle u(t), u(t)\rangle = 1, \tag{25}$$

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}}([u(t)^T, A(u(t))] + [u(t)^T, v(t)]) = A(\dot u(t)) + \dot v(t), \tag{26}$$

*где*

$$A(u(t)) + v(t) \in \mathfrak{g}, \tag{27}$$

$\mathrm{pr}_{\mathfrak{g}}$ *— ортогональное проектирование на* $\mathfrak{g}$ *относительно* $(\cdot,\cdot)$, *а* $v(t)$ *из ортогонального дополнения к* $D(e)$ *в* $\mathfrak{g}$. *Если* $G$ *— подгруппа Ли группы Ли* $SO(n)$ *и* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *пропорционально ограничению скалярного произведения* $(\cdot,\cdot)$ *на* $D(e)$, *то формула* (26) *принимает вид*

$$\dot u(t) + \dot v(t) = -[u(t), v(t)]. \tag{28}$$

Доказательство. Вследствие формулы (22)

$$\gamma(t)^T\psi(t) = A(u(t)) + w(t) \tag{29}$$

для некоторой матрицы $w(t)$ из ортогонального дополнения $D(e)^{\perp}$ к $D(e)$ в $\mathfrak{gl}(n)$. Продифференцируем (29), используя ОДУ (20), (21):

$$\begin{aligned}(\gamma(t)^T\psi(t))^{\cdot} &= (\gamma(t)^T)^{\cdot}\psi(t) + \gamma(t)^T\dot\psi(t)\\ &= u(t)^T\gamma(t)^T\psi(t) - \gamma(t)^T\psi(t)u(t)^T = u(t)^T(A(u(t)) + w(t)) - (A(u(t)) + w(t))u(t)^T\\ &= [u(t)^T, A(u(t))] + [u(t)^T, w(t)] = A(\dot u(t)) + \dot w(t). \end{aligned} \tag{30}$$

Из формулы (8) следует, что функция Гамильтона $H$ на $G$ не зависит от компоненты матрицы $\gamma^T\psi$, ортогональной к $\mathfrak{g}$. При этом решение системы Гамильтона на $G$ полностью определяется функцией $H$ и в силу формулы (12) ортогональная к $\mathfrak{g}$ компонента от $\psi=\psi(t)$ не изменяется вдоль $\gamma=\gamma(t)$. Значит, можно равенство (29) заменить равенством (27), где $v(t)$ из ортогонального дополнения к $D(e)$ в $\mathfrak{g}$. Отсюда и из (30) вытекает (26). Последнее утверждение следует из аналога замечания 4 для соответствующим образом выбранного значения $M_0>0$. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Берестовский В. Н.* Однородные пространства с внутренней метрикой // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 2. С. 268–271.

**2.** *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой. I // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 6. С. 17–29.

**3.** *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой. II // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 2. С. 14–28.

**4.** *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

**5.** *Берестовский В. Н.* Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 3–11.

**6.** *Кириллова Л. С.* Неримановы метрики и принцип максимума // Докл. АН УзбССР. 1986. № 7. С. 9–11.

**7.** *Вершик А. М., Граничина О. А.* Редукция неголономных вариационных задач к изопериметрическим и связности в главных расслоениях // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 37–44.

**8.** *Носков Г. А.* Геодезические на группе Гейзенберга: элементарный подход // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 177–188.

**9.** *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1981. V. 53. P. 53–78.

**10.** *Берестовский В. Н.* Геодезические левоинвариантной неголономной римановой метрики на группе движений евклидовой плоскости // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1223–1229.

**11.** *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных метрик на некоторых группах Ли // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 731–748.

**12.** *Strichartz R. S.* Sub-Riemannian geometry // J. Differ. Geom. 1986. V. 24, N 2. P. 221–263. Corrections: J. Differ. Geom. 1989. V. 30, N 2. P. 595–596.

**13.** *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 16. С. 5–85. (Итоги науки и техники).

**14.** *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. I–III. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1976.

**15.** *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.

**16.** *Liu W., Sussman H.* Shortest paths for sub-Riemannian metrics of rank-two distributions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 118, N 564).

**17.** *Montgomery R.* Abnormal minimizers // SIAM J. Control Optim. 1994. V. 32, N 6. P. 1605–1620.

**18.** *Montgomery R.* A tour of sub-Riemannian geometries, their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Math. Surveys Monogr.; V. 91).

**19.** *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.

**20.** *Jurdjevic V.* Geometric control theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 52).

**21.** *Рашевский П. К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ. мат. наук. 1938. № 2. С. 83–94.

**22.** *Chow W. L.* Über Systeme von linearen partiellen Differential-gleichungen erster Ordnung // Math. Ann. 1939. V. 117. P. 98–105.

**23.** *Кон-Фоссен С. Э.* О существовании кратчайших путей // Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М.: Физматгиз, 1959. С. 288–303.

**24.** *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.

**25.** *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Римановы многообразия и однородные геодезические. Владикавказ: Владикавказ. науч. центр, 2012. (Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 4).

**26.** *Neretin Yu. A.* A construction of finite-dimensional faithful representation of Lie algebra // Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 2003. V. 71. P. 159–161.

*Статья поступила 19 февраля 2014 г.*

Берестовский Валерий Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
berestov@ofim.oscsbras.ru