Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 512.664.4+517.986.6

Φ–ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ДИСКРЕТНЫХ ГРУППАХ И ПЕРВЫЕ ℓ^{Φ}–КОГОМОЛОГИИ

Я. А. Копылов, Р. А. Паненко

Аннотация. Изучаются первые группы когомологий счетной дискретной группы G с коэффициентами в G-модуле $\ell^{\Phi}(G)$, где Φ есть N-функция из класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. В развитие идей и методов Палса и Мартена — Валетта для конечно порожденной группы G вводится дискретный Φ-лапласиан и доказывается теорема о разложении пространства функций с конечной Φ-суммой Дирихле в прямую сумму пространства Φ-гармонических функций и $\ell^{\Phi}(G)$ (при соответствующей факторизации). Также показано, что для конечно порожденной группы G, у которой есть конечно порожденная бесконечная аменабельная подгруппа с бесконечным централизатором, имеет место равенство $\overline{H}^1(G, \ell^{\Phi}(G)) = 0$. В завершение доказывается тривиальность первой группы когомологий для сплетения двух групп, одна из которых неаменабельна.

Ключевые слова: группа, N-функция, пространство Орлича, Δ_2-регулярность, Φ-гармоническая функция, 1-когомологии.

Академику Ю. Г. Решетняку
к 85-летнему юбилею

Введение

В последние десятилетия методы гармонического анализа на дискретных структурах широко используются как для исследования самих этих структур, так и для изучения многообразий и топологических групп. Так, в частности, изучение аменабельности и свойства (T) Каждана для локально компактной группы сводится к проверке этих свойств у произвольной решетки этой группы (см., например, [1]). Многие вопросы геометрии римановых многообразий, удовлетворяющих условию удвоения и неравенству Пуанкаре, сводятся к изучению некоторого графа, называемого *дискретизацией* данного многообразия [2].

Вопросы роста дискретных групп «на бесконечности» и наличие неподвижных точек в непрерывном изометрическом аффинном действии группы на банаховом пространстве тесно связаны с одномерными групповыми когомологиями группы с коэффициентами в соответствующем банаховом модуле (см., например, [3, 4]).

В настоящей статье изучаются достаточные условия тривиальности первой группы когомологий $H^1(G, \ell^{\Phi}(G))$ счетной дискретной группы G для Δ_2-регулярной N-функции Φ. Следует отметить, что ранее, в [5, 6], уже рассматривался Φ-лапласиан на ограниченных подобластях $\mathbb{R}^n$, а пространства Орлича

Первый автор частично поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00873–а). Оба автора частично поддержаны Государственной программой поддержки ведущих школ и молодых ученых (коды проектов НШ–921.2012.1, НШ–2263.2014.1).

в контексте дискретных групп были предметом изучения таких авторов, как Каминьска и Муселяк, в [7].

Данная работа имеет следующую структуру.

В § 1 приведены некоторые базовые понятия, относящиеся к N-функциям и теории дискретных пространств Орлича. В § 2 напоминаем определения 1-когомологий $H^1(G,V)$ и редуцированных 1-когомологий $\overline{H}^1(G,V)$ топологической группы G с коэффициентами в банаховом G-модуле V, приводим ряд известных утверждений, а также получаем достаточное условие тривиальности когомологий $H^1(G,\ell^\Phi(G))$ для Δ_2-регулярной N-функции Φ в терминах тривиальности одномерных когомологий ее неаменабельной подгруппы с некоторыми дополнительными предположениями (теорема 2.5). В § 3 по аналогии с p-лапласианом и p-гармоническими функциями на конечно порожденных группах, являющихся предметом рассмотрения в работах Палса [4], а также Мартена — Валетта [8], вводим понятия Φ-лапласиана и Φ-гармонической функции для произвольной N-функции Φ на конечно порожденной группе. Основным результатом § 3 является теорема 3.6 о разложении пространства функций с конечной Φ-суммой Дирихле, где Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N-функция, принадлежащая $\Delta_2(0)\cap\nabla_2(0)$, в сумму пространства Φ-гармонических функций и замыкания $\ell^\Phi(G)$. В § 4 мы пользуемся результатами § 3, чтобы установить достаточные условия тривиальности редуцированных одномерных когомологий $\overline{H}^1(G,\ell^\Phi(G))$ конечно порожденной бесконечной группы, а также доказываем условие тривиальности одномерных когомологий сплетения групп. Нами получены аналоги теорем 4.2, 4.3 и 4.6 из [8] для случая ℓ^Φ-когомологий (теорема 4.1, следствие 4.2, теорема 4.3).

§ 1. Пространства Орлича

Напомним некоторые понятия теории пространств Орлича, необходимые для дальнейшей работы. Далее X — счетное множество, наделенное считающей мерой.

Определение 1.1. Функцию $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ будем называть *N-функцией*, если она допускает представление

$$\Phi(x)=\int\limits_0^{|x|}\varphi(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(t)$ определена для $t\geqslant 0$, неубывающая, непрерывна справа, а также удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(t)>0$, если $t>0$; $\varphi(0)=0$; $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$. В дальнейшем будем писать Φ' вместо φ.

Таким образом, N-функция Φ обладает следующими свойствами:

- $\Phi(x)>0$, если $x>0$;
- Φ четна и выпукла;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\Phi(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=+\infty$.

Определение 1.2. Если Φ — N-функция, то функция, заданная следующим образом:

$$\Psi(x)=\int\limits_0^{x}(\Phi')^{-1}(t)\,dt,\quad \text{где } (\Phi')^{-1}(x)=\sup_{\Phi'(t)\leq x}t,$$

называется *дополнительной к* Φ.

Если Ψ — N-функция, дополнительная к N-функции Φ, то Φ дополнительная к Ψ.

Замечание. Пара дополнительных N-функций Φ, Ψ удовлетворяет *неравенству Юнга*

$$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)$$

для всех неотрицательных a и b; равенство достигается тогда и только тогда, когда $b = \Phi'(a)$.

Определение 1.3. Говорят, что N-функция Φ *удовлетворяет* Δ_2*-условию для малых* x, и пишут $\Phi \in \Delta_2(0)$, если существуют константы $x_0 > 0$, $K > 2$ такие, что $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ для $0 \leq x \leq x_0$, и говорят, что функция Φ *удовлетворяет* ∇_2*-условию для малых* x, и пишут $\Phi \in \nabla_2(0)$, если существуют константы $x_0 > 0$ и $c > 1$ такие, что $\Phi(x) \leq \frac{1}{2c}\Phi(cx)$ для $0 \leq x \leq x_0$.

Далее мы будем называть N-функции $\Phi \in \Delta_2(0)$ ($\Phi \in \nabla_2(0)$) Δ_2*-регулярными* (∇_2*-регулярными*). Как известно, N-функция ∇_2-регулярна тогда и только тогда, когда дополнительная N-функция Δ_2-регулярна.

Определение 1.4. Функция Φ называется *равномерно выпуклой*, если для каждого $a \in (0, 1)$ существует $\beta(a) \in (0, 1)$ такое, что

$$\Phi\left(\frac{u + bu}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(1 - \beta(a))(\Phi(u) - \Phi(bu))$$

для всех $b \in [0, 1]$ и $u \geqslant 0$.

Определение 1.5. *Классом Орлича* $\tilde{\ell}^\Phi(X)$ называется множество таких вещественнозначных функций X, что

$$\rho_\Phi(f) := \sum_{x \in X} \Phi(f(x)) < \infty.$$

В дальнейшем будем пользоваться следующим обозначением:

$$\tilde{\ell}_1^\Phi(X) = \Big\{f \in \tilde{\ell}^\Phi(X) \ \mid \sum_{x \in X} \Phi(f(x)) \leq 1\Big\}$$

Определение 1.6. Линейное пространство

$$\ell^\Phi(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \,:\, \rho_\Phi(af) < \infty \text{ для \textit{некоторого} } a > 0\}$$

называется *пространством Орлича* на X.

Замечание. Известно (см., например, [9]), что множество $\tilde{\ell}^\Phi(X)$ является линейным пространством (в этом случае совпадающим с $\ell^\Phi(X)$) тогда и только тогда, когда $\Phi \in \Delta_2(0)$.

Определение 1.7. Если $f \in \ell^\Phi(X)$, то *норма Орлича* функции f определяется как

$$\|f\|_\Phi := \|f\|_{\ell^\Phi(X)} := \sup_{u \in \tilde{\ell}_1^\Psi} \Big|\sum_{x \in X} f(x)u(x)\Big|.$$

Определение 1.8. *Калибровочной нормой* (или *нормой Люксембурга*) функции $f \in \ell^\Phi(X)$ называется

$$\|f\|_{(\Phi)} := \|f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} := \inf\Big\{k > 0 \,:\, \rho_\Phi\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1\Big\}.$$

Известно, что калибровочная норма и норма Орлича эквивалентны (см., например, [10, § 3.3, предложение 4]):

$$\|f\|_{(\Phi)} \le \|f\|_\Phi \le 2\|f\|_{(\Phi)}.$$

Таким образом, не теряя общности рассуждений, будем подразумевать, что пространство $\ell^\Phi(X)$ снабжено калибровочной нормой $\|\cdot\|_{(\Phi)}$.

Следующее утверждение известно для общего случая пространств с мерой (см. [10, § 3.4, предложение 8]). Мы сформулируем и докажем его «счетную» версию для удобства читателя.

Предложение 1.9. *Пусть $\Phi \in \Delta_2(0)$, и пусть Ψ — дополнительная к Φ N-функция. Если $f \in \widetilde{\ell}^\Phi(X)$, то $\Phi'(|f|) \in \widetilde{\ell}^\Psi(X)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \ell^\Phi(X)$. Применяя равенство в неравенстве Юнга к функциям $|f|$ и $\Phi'(|f|)$, получим

$$\Phi(|f|) + \Psi(\Phi'(|f|)) = |f|\Phi'(|f|). \tag{1}$$

Оценим $x\Phi(x)$ в подходящей окрестности нуля. По определению

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt.$$

Далее,

$$x\Phi'(x) = \int_x^{2x} \varphi(x)\,dt \le \int_x^{2x} \varphi(t)\,dt \le \int_0^{2x} \varphi(t)\,dt = \Phi(2x),$$

но $\Phi(2x) \le K\Phi(x)$ в силу $\Delta_2(0)$-условия. Следовательно, $x\Phi'(x) \le K\Phi(x)$ в подходящей окрестности нуля. Воспользовавшись (1), получим $\Psi(\Phi'(|f|)) \le (K-1)\Phi(|f|)$. Подбирая ε такое, что $x\Phi'(x) \le K\Phi(x)$ для всех $x \in [0,\ \varepsilon]$, имеем

$$\sum_{x\in X} \Psi(\Phi'(|f(x)|)) = \sum_{|f(x)|\le\varepsilon} \Psi(\Phi'(|f(x)|)) + \sum_{|f(x)|>\varepsilon} \Psi(\Phi'(|f(x)|))$$
$$= \sum_{|f(x)|\le\varepsilon} \Psi(\Phi'(|f(x)|)) + C \le \sum_{|f(x)|\le\varepsilon} (K-1)\Phi(|f(x)|) + C < \infty. \quad \square$$

§ 2. 1-Когомологии

Пусть G — топологическая группа, а V — топологический G-модуль, т. е. вещественное или комплексное топологическое векторное пространство, снабженное линейным представлением $\pi : G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \pi(g)v$. Такое пространство V называется *банаховым G-модулем*, если V — банахово пространство, а π — представление G изометриями V. Введем следующие обозначения:

$$Z^1(G, V) := \{b : G \to V \text{ непрерывно } \mid b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h)\} \quad (1\text{-}\textit{коциклы});$$

$$B^1(G, V) = \{b \in Z^1(G, V) \mid (\exists v \in V)\,(\forall g \in G)\ b(g) = \pi(g)v - v\} \quad (1\text{-}\textit{кограницы});$$

$$H^1(G, V) = Z^1(G, V)/B^1(G, V) \quad (1\text{-}\textit{когомологии с коэффициентами в } V).$$

Снабдим $Z^1(G, V)$ топологией равномерной сходимости на компактных множествах в G. Будем обозначать символом $\overline{B}^1(G, V)$ замыкание $B^1(G, V)$ в данной топологии. Фактор-пространство $\overline{H}^1(G,V) = Z^1(G,V)/\overline{B}^1(G,V)$ называется *редуцированным* 1*-когомологиями* G с коэффициентами в G-модуле V.

Пусть V — банахов G-модуль. Будем говорить, что V *имеет почти инвариантные векторы* или *почти имеет инвариантные векторы*, если для каждого компактного подмножества $F \subset G$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется единичный вектор $v \in V$ такой, что $\|\pi(g)v - v\| \le \varepsilon$ для всех $g \in F$.

Предположим, что заданы замкнутая нормальная подгруппа N группы G и G-модуль V, тогда группа G действует на $H^1(N, V|_N)$ следующим образом (см. [11, 12]): на $Z^1(N, V|_N)$ действие определяется формулой

$$(g \cdot b)(n) = \pi(g)(b(g^{-1}ng))$$

($b \in Z^1(N, V|_N)$, $g \in G$, $n \in N$). Поскольку это действие оставляет пространство $B^1(N, V|_N)$ инвариантным, получаем определенное таким образом действие G на $H^1(N, V|_N)$. В силу того, что для $m \in N$

$$(m \cdot b)(n) = b(n) + (\pi(n)b(m) - b(m)),$$

действие N на $H^1(N, V|_N)$ тривиально, действие G на $H^1(N, V|_N)$ пропускается через G/N. Доказательство следующего утверждения можно найти в [11, следствие 6.4; 12, п. 8.1].

Предложение 2.1. (1) *Существует точная последовательность*

$$0 \to H^1(G/N, V^N) \xrightarrow{i_*} H^1(G,V) \xrightarrow{\mathrm{Rest}_G^N} H^1(N, V|_N)^{G/N} \to \dots,$$

где $i : V^N \to V$ *— вложение, а* $\mathrm{Rest}_G^N : H^1(G,V) \to H^1(N, V|_N)^{G/N}$ *— сужение.*

(2) *Если* $V^N = 0$, *то* $\mathrm{Rest}_G^N : H^1(G,V) \to H^1(N, V|_N)^{G/N}$ *— изоморфизм.*

В [13] получены аналоги следствия 2.4 из [8] и предложения 2 из [14] в контексте локально компактных групп. Приведем здесь дискретную форму результатов [13]:

Предложение 2.2 [13, предложение 2]. *Пусть* Φ *—* N*-функция класса* $\Delta_2(0)$. *Если* G *— счетная группа, то следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $H^1(G, \ell^\Phi(G)) = \overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G))$;

(ii) G *— неаменабельная группа.*

Предложение 2.3 [13, теорема 1]. *Предположим, что* Φ *—* N*-функция класса* $\Delta_2(0)$, G *— счетная группа,* H *— бесконечная подгруппа группы* G. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *подстановочное представление* H *в* $\ell^\Phi(G)$ *имеет почти инвариантные векторы;*

(ii) H *— аменабельная группа.*

Для $H = G$ данное предложение доказано Рао (см. [15, предложение 2]).

Лемма 2.4. *Пусть* Φ *—* N*-функция класса* $\Delta_2(0)$, *и пусть* H *— подгруппа счетной дискретной группы* G. *Рассмотрим ряд свойств:*

(i) $\overline{H}^1(H, \ell^\Phi(H)) = 0$;

(ii) $\overline{H}^1(H, \ell^\Phi(G)|_H) = 0$;

(i$'$) $H^1(H, \ell^\Phi(H)) = 0$;

(ii$'$) $H^1(H, \ell^\Phi(G)|_H) = 0$.

Имеют место следующие эквивалентности: (i)$\Leftrightarrow$(ii) *и* (i$'$)$\Leftrightarrow$(ii$'$).

Доказательство. Воспользуемся общей схемой доказательства из [8], где обсуждается ℓ^p-случай. Поскольку функция Φ Δ_2-регулярна, пространство Орлича $\ell^{\Phi}(X)$ на счетном множестве состоит из тех последовательностей (x_n), для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Phi(x_n)<\infty$. Таким образом, $\ell^{\Phi}(G)|_H$ можно отождествить с ℓ^{Φ}-прямой суммой $[G:H]$ копий $\ell^{\Phi}(H)$.

Импликации (ii)$\Longrightarrow$(i) и (ii$'$)$\Longrightarrow$(i$'$) следуют из вложений $H^1(H,\ell^{\Phi}(H))\to H^1(H,\ell^{\Phi}(G)|_H)$ и $\overline{H}^1(H,\ell^{\Phi}(H))\to\overline{H}^1(H,\ell^{\Phi}(G)|_H)$, индуцированных отображением $\iota: Z^1(H,\ell^{\Phi}(H))\to Z^1(H,\ell^{\Phi}(G)|_H)$, $b\mapsto(b,0,0,\dots)$.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Для случая $[G:H]<\infty$ утверждение тривиально, и потому предположим, что $[G:H]=\infty$. Возьмем некоторый коцикл $b\in Z^1(H,\ell^{\Phi}(G)|_H)$. Пусть $b_n\in Z^1(H,\ell^{\Phi}(H)$ — его n-я «компонента», лежащая в $\ell^{\Phi}(Hs_n)$. Возьмем некоторое конечное подмножество K множества H и $\varepsilon>0$. Хорошо известно (см. [10, § 3.4, теорема 12]; здесь рассматривается случай глобальной Δ_2-регулярности, но не составляет большого труда подправить его для наших целей), что если N-функция Φ Δ_2-регулярна, то

$$\lim_{\rho_{\Phi}(v)\to 0}\|v\|_{L_{(\Phi)}(G)}=0.$$

Это означает, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что

$$\rho_{\Phi}(f)<\delta \text{ влечет } \|f\|_{L^{(\Phi)}(G)}<\varepsilon.$$

Подберем δ_0 такое, что если $\rho_{\Phi}(v)<\delta_0$, то $\|v\|_{L_{(\Phi)}(G)}<\frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем $\overline{N}>0$ такое, что $\sum\limits_{n=\overline{N}+1}^{\infty}\Phi(b_n(h))<\delta_0$ для всех $h\in K$. Другими словами, для последовательности

$$b_{>\overline{N}}(h)=(0,\dots,0,\Phi(b_{\overline{N}+1}(h)),\Phi(b_{\overline{N}+2})(h),\dots),\quad h\in K,$$

имеем $\rho_{\Phi}(b_{>\overline{N}}(h))<\delta_0$. Таким образом, выбирая δ_0, можно добиться выполнения неравенства $\|b_{>\overline{N}}(h)\|_{(\Phi)}<\frac{\varepsilon}{2}$. Для каждого $i=1,2,\dots,\overline{N}$ найдем функцию $v_i\in\ell^{\Phi}(H)$ такую, что $\|b_i(h)-(\lambda_H(h)v_i-v_i)\|_{(\Phi)}<\frac{\varepsilon}{2^{\overline{N}}}$ для всех $h\in K$. Возьмем $v=(v_1,\dots,v_{\overline{N}},0,0,\dots)\in\ell^{\Phi}(G)$. Получим

$$\|b(h)-(\lambda_G(h)v-v)\|_{(\Phi)}\le\sum_{i=1}^{\overline{N}}\|b_i(h)-(\lambda_H(h)v_i-v_i)\|_{(\Phi)}+\|b_{>\overline{N}}(h)\|_{(\Phi)}<\varepsilon$$

для всех $h\in K$. Следовательно, $b\in\overline{B}^1(H,\ell^{\Phi}(G)|_H)$, и поэтому $\overline{H}^1(H,\ell^{\Phi}(G)|_H)=0$.

(i$'$) $\Rightarrow$ (ii$'$)

(a) Если H конечна, то $H^1(H,\ell^{\Phi}(H))=H^1(H,\ell^{\Phi}(G)|_H)=0$.

(b) Допустим, что H бесконечна. Тогда предложение 2.2 влечет неаменабельность H. Поэтому, воспользовавшись предложением 2.3, заключаем, что $\ell^{\Phi}(G)|_H$ не имеет почти инвариантных векторов. Обращаясь к предложению 2.2 и вспоминая, что (i)$\Longrightarrow$(ii), имеем

$$\overline{H}^1(H,\ell^{\Phi}(G)|_H)=H^1(H,\ell^{\Phi}(G)|_H)=H^1(H,\ell^{\Phi}(H))=0.\quad\square$$

Следующая теорема известна для ℓ^p-когомологий (см. [14, теорема 1]).

Теорема 2.5. *Предположим, что Φ — N-функция класса $\Delta_2(0)$. Пусть $N \le H \le G$ — цепочка счетных дискретных групп такая, что N — бесконечная нормальная подгруппа G, а H неаменабельна. Если $\overline{H}^1(H, \ell^\Phi(H)) = 0$, то $H^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$.*

Доказательство. Поскольку H неаменабельна, в силу предложения 2.2 имеем $H^1(H, \ell^\Phi(H)) = 0$. Так как N бесконечна, то $\ell^\Phi(G)^N = 0$. Таким образом, по предложению 2.1(2) ограничение $\mathrm{Rest}_G^N : H^1(G, \ell^\Phi(G)) \to H^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)$ инъективно. В последовательности

$$H^1(G, \ell^\Phi(G)) \xrightarrow{\mathrm{Rest}_G^H} H^1(H, \ell^\Phi(G)|_H) \xrightarrow{\mathrm{Rest}_H^N} H^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)$$

композиция $\mathrm{Rest}_G^N = \mathrm{Rest}_G^H \circ \mathrm{Rest}_H^N$ инъективна. Но $H^1(H, \ell^\Phi(G)|_H) = 0$ по лемме 2.4, и, следовательно, $\mathrm{Rest}_G^H = 0$. Таким образом, $H^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$. $\square$

Следствие 2.6. *В условиях теоремы* 2.5 $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$.

§ 3. Ф-гармонические функции

Пусть G — конечно порожденная группа с конечным порождающим множеством S, действующая на счетном множестве X. Если A — абелева группа, то будем обозначать символом A^X абелеву группу всех функций $f : X \to A$. Пусть $\lambda_X : G \to A^X$ — *подстановочное представление G на A^X*:

$$\lambda_X(g)f(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in A^X,\ g \in G.$$

Таким образом, A^X есть G-модуль. В случае, когда $X = G$, указанное представление называют *левым регулярным представлением* группы G в A^G.

Хорошо известно следующее утверждение (см., например, [8, лемма 2.1]).

Предложение 3.1. *Предположим, что (дискретная) группа G действует свободно на множестве X. Тогда $H^1(G, A^X) = 0$.*

Далее будем писать $\mathcal{F}(X)$ вместо $\mathbb{R}^X$.

Введем понятие пространства *функций с конечной Φ-суммой Дирихле*:

$$\begin{aligned} D^\Phi(X) &= \{f \in \mathcal{F}(X) \mid \|\lambda_X(g)f - f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} < \infty \text{ для всех } g \in G\} \\ &= \{f \in \mathcal{F}(X) \mid \|\lambda_X(s)f - f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} < \infty \text{ для всех } s \in S\}. \end{aligned}$$

Пусть $D^\Phi(X)^G$ — пространство функций из $D^\Phi(X)$, постоянных на G-орбитах множества X. Соответственно $\ell^\Phi(X)^G$ — ℓ^Φ-функции, постоянные на G-орбитах. Введем на пространстве $\mathscr{D}^\Phi(X) = D^\Phi(X)/D^\Phi(X)^G$ норму вида

$$\|f\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} = \sum_{s \in S} \|\lambda_X(s)f - f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)}.$$

Очевидно, что $D^\Phi(X)^G$ — ядро отображения

$$\|\cdot\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} : D^\Phi(X) \to \mathbb{R}.$$

Определим линейное отображение $\alpha : D^\Phi(X) \to Z^1(G,\ \ell^\Phi(X))$, полагая

$$\alpha(f)(g) = \lambda_X(g)f - f.$$

Отображение, индуцируемое α на $\mathscr{D}^\Phi(X)$, инъективно, поскольку $D^\Phi(X)^G$ — ядро α.

Положим $\ell_G^\Phi(X) = \ell^\Phi(X)/\ell^\Phi(X)^G$.

Теорема 3.2. *Предположим, что конечно порожденная группа G действует свободно на счетном множестве X. Тогда $\alpha : \mathscr{D}^{\Phi}(X) \to Z^1(G, \ell^{\Phi}(X))$ — топологический изоморфизм и, следовательно,*

(1) $H^1(G, \ell^{\Phi}(X)) \cong \mathscr{D}^{\Phi}(X)/\ell_G^{\Phi}(X)$;

(2) $\overline{H}^1(G, \ell^{\Phi}(X)) \cong \mathscr{D}^{\Phi}(X)/\overline{\ell_G^{\Phi}(X)}$.

Доказательство. В силу изложенного выше, отображение α непрерывно и инъективно. Докажем его сюръективность. По предложению 3.1 $H^1(G, \mathcal{F}(X)) = 0$. Следовательно, для каждого $b \in Z^1(G, \ell^{\Phi}(X))$ существует функция $f \in \mathcal{F}(X)$ такая, что $b(g) = \lambda_X(g)f - f$ для всех $g \in G$. Очевидно, что $f \in D^{\Phi}(X)$. Поэтому $\alpha(f) = b$. Легко видеть, что α^{-1} непрерывно. Обратившись к определению α, нетрудно заметить, что $\alpha(\ell_G^{\Phi}(X)) = B^1(G, \ell^{\Phi}(X))$. Теорема доказана. $\square$

Далее будем считать, что Φ — *непрерывно дифференцируемая функция.*

Определение 3.3. Пусть G — конечно порожденная группа, S — (конечное) множество ее порождающих элементов, и пусть G действует на счетном множестве X. Определим Φ-*лапласиан* $\Delta_\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ следующим образом:

$$(\Delta_\Phi f)(x) := \sum_{s\in S} \Phi'(f(s^{-1}x) - f(x)) \quad \text{для } f \in \mathcal{F}(X) \text{ и } x \in X.$$

Функция $f \in D^{\Phi}(X)$ называется Φ-*гармонической*, если $(\Delta_\Phi f)(x) = 0$ для всех $x \in X$. Будем обозначать множество Φ-гармонических функций на X символом $HD^{\Phi}(X)$.

Необходимо ввести еще один оператор $\langle \Delta_\Phi *, *\rangle : D^{\Phi}(X) \times D^{\Phi}(X) \to \mathbb{R}$, действие которого определяется следующей формулой:

$$\langle \Delta_\Phi h,\, f\rangle := \sum_{x\in X}\sum_{s\in S} \Phi'(h(s^{-1}x) - h(x))(f(s^{-1}x) - f(x)).$$

Данная сумма конечна в силу предложения 1.9.

Заметим, что Φ-лапласиан и форма $\langle \Delta_\Phi \cdot, \cdot\rangle$ корректно определены на элементах $\mathscr{D}^{\Phi}(X)$. Сохраним их обозначения для этого пространства.

Напомним (см. [16]), что если V — вещественное векторное пространство, то функционал $\rho : V \to [0, \infty]$ называется *модуляром* на V в том случае, когда для всех $x, y \in V$ выполняются следующие свойства:

(1) $\rho(0) = 0$;

(2) $\rho(-x) = \rho(x)$;

(3) $\rho(\alpha x + \beta y) \le \rho(x) + \rho(y)$ для $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$;

(4) $\rho(x) = 0$ влечет $x = 0$.

Снабдим пространство $\mathscr{D}^{\Phi}(X)$ модуляром $\rho : \mathscr{D}^{\Phi}(X) \to \mathbb{R}^+$ вида

$$\rho(f) = \sum_{s\in S}\sum_{x\in X} \Phi(f(s^{-1}x) - f(x)).$$

Напомним, что *дифференциал Гато* отображения ρ в точке $f \in \mathscr{D}^{\Phi}(X)$ определяется как

$$\rho'_f(g) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\rho(f + tg) - \rho(f)}{t}.$$

Несложно проверить, что $\rho'_f(g) = \langle \Delta_\Phi f,\, g\rangle$.

Предложение 3.4. *Пусть Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N-функция. Допустим, что $f_1,\, f_2 \in D^\Phi(X)$. В этом случае $f_1 - f_2 \in D^\Phi(X)^G$ тогда и только тогда, когда*

$$\langle \Delta_\Phi f_1,\, f_1 - f_2\rangle = \langle \Delta_\Phi f_2,\, f_1 - f_2\rangle.$$

Доказательство. Предположим, что $f_1 - f_2 \in D^\Phi(X)^G$. Несложно заметить, что $\langle \Delta_\Phi f, *\rangle$ отображает $D^\Phi(X)^G$ в $\{0\}$ для всех $f \in D^\Phi(X)$ и, следовательно, $\langle \Delta_\Phi f_1,\, f_1 - f_2\rangle = 0 = \langle \Delta_\Phi f_2,\, f_1 - f_2\rangle$. Обратно, предположим, что $f_1 - f_2 \notin D^\Phi(X)^G$. Тогда f_1 и f_2 задают различные элементы в $D^\Phi(X)/D^\Phi(X)^G$. Воспользовавшись предложением 5.4 из [17], можем заключить, что

$$\rho(f_1) > \rho(f_2) + \rho'_{f_2}(f_1 - f_2) = \rho(f_2) + \langle \Delta_\Phi f_2,\, f_1 - f_2\rangle.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\rho(f_2) > \rho(f_1) + \rho'_{f_1}(f_2 - f_1) = \rho(f_1) - \langle \Delta_\Phi f_1,\, f_1 - f_2\rangle.$$

Таким образом, $\langle \Delta_\Phi f_1,\, f_1 - f_2\rangle > \langle \Delta_\Phi f_2,\, f_1 - f_2\rangle$. $\square$

Для каждого $x \in X$ определим функцию $\delta_x : X \to \mathbb{R}$:

$$\delta_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = x, \\ 0, & \text{если } t \neq x. \end{cases}$$

Лемма 3.5. *Для $h \in D^\Phi(X)$ следующие утверждения эквивалентны:*
(1) $h \in HD^\Phi(X)$;
(2) $\langle \Delta_\Phi h,\, \delta_x\rangle = 0$ *для всех* $x \in X$;
(3) $\langle \Delta_\Phi h,\, f\rangle = 0$ *для всех* $f \in (\overline{\ell_G^\Phi(X)})_{\mathscr{D}^\Phi(X)}$.

Доказательство. (1)$\Leftrightarrow$(2). Имеем

$$\begin{aligned}\langle \Delta_\Phi h,\, \delta_x\rangle &= \sum_{t\in X}\sum_{s\in S}\Phi'(h(s^{-1}t) - h(t))(\delta_x(s^{-1}t) - \delta_x(t)) \\ &= \sum_{s\in S}(\Phi'(h(x) - h(sx)) - \Phi'(h(s^{-1}x) - h(x))) \\ &= -\sum_{s\in S}\Phi'(h(sx) - h(x)) - \sum_{s\in S}\Phi'(h(s^{-1}x) - h(x)) \\ &= -2\sum_{s\in S}\Phi'(h(s^{-1}x) - h(x)) = -2\Delta_\Phi h(x).\end{aligned}$$

Это влечет наличие равенства $\Delta_\Phi h(x) = 0$ для всех $x \in X$ тогда и только тогда, когда $\langle \Delta_\Phi h,\, \delta_x\rangle = 0$ для всех $x \in X$.

Импликация (3)$\Rightarrow$(2) тривиальна.

(1)$\Rightarrow$(3) Поскольку $\left(\overline{\ell_G^\Phi(X)}\right)_{\mathscr{D}^\Phi(X)}$ совпадает с замыканием линейной оболочки Δ множества $\{\, \delta_x \mid x \in X \,\}$ в $\mathscr{D}^\Phi(X)$, для каждого элемента $f \in \ell_G^\Phi(X)$ существует последовательность $\{f_n\} \subset \Delta$ такая, что $\|f - f_n\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} \to 0$ при $n \to \infty$. Предположим, что $h \in HD^\Phi(X)$ и $m = \max\limits_{s\in S}\sum\limits_{x\in X}\Psi(\Phi'(h(s^{-1}x) - h(x)))$. Тогда $m < \infty$ по предложению 1.9, следовательно, $\Phi'(\lambda_X(s)h - h)/m \in \tilde{\ell}_1^\Psi(X)$

для всех s. Отсюда заключаем, что

$$0 \le |\langle \Delta_\Phi h,\, f\rangle| = |\langle \Delta_\Phi h,\, f - f_n\rangle|$$
$$= \left| m \sum_{s\in S}\sum_{x\in X} \frac{\Phi'((\lambda_X(s)h - h)(x))}{m} (\lambda_X(s)(f-f_n) - (f-f_n))(x)\right|$$
$$\le |m| \sum_{s\in S} \|(\lambda_X(s)(f-f_n) - (f-f_n))\|_{\ell^\Phi(X)}$$
$$\le 2|m| \sum_{s\in S} \|(\lambda_X(s)(f-f_n) - (f-f_n))\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} = 2|m|\, \|f - f_n\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} \to 0$$

при $n\to\infty$. $\square$

Теорема 3.6. *Предположим, что Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N-функция, лежащая в $\Delta_2(0)\cap\nabla_2(0)$. Пусть G — конечно порожденная группа, действующая на счетном множестве X. Тогда для любой функции $f\in D^\Phi(X)$ существует разложение $f = u + h$, где $u \in (\overline{\ell^\Phi(X)})_{D^\Phi(X)}$ и $h \in HD^\Phi(X)$. Такое разложение единственно с точностью до элемента из $D^\Phi(X)^G$.*

Доказательство. Так как $\Phi\in\Delta_2(0)\cap\nabla_2(0)$, пространство $\ell^\Phi(X)$ рефлексивно (см. [9]). То же верно для $\mathscr{D}^\Phi(X)$.

Зафиксируем некоторое конечное множество S порождающих для G.

Пусть $f\in D^\Phi(X)$, соответствующий элемент из $\mathscr{D}^\Phi(X) = D^\Phi(X)/D^\Phi(X)^G$ будем обозначать тем же символом f.

Пусть

$$d = \inf_{g\in(\overline{\ell^\Phi_G(X)})_{\mathscr{D}^\Phi(X)}} \rho(f-g), \quad B = \bigl\{g \in \bigl(\overline{\ell^\Phi_G(X)}\bigr)_{\mathscr{D}^\Phi(X)} \mid \rho(f-g)\le d+1\bigr\}.$$

Очевидно, что множество B ограничено, так как в силу свойств пространств Орлича для всех $f\in\mathscr{D}^\Phi(X)$ имеем $\|f\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} \le \rho(f) + k$, где k — число порождающих в системе S. Докажем, что B замкнуто. Пусть $\|f - f_n\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)}\to 0$ при $n\to\infty$, где $f, f_n \in \bigl(\overline{\ell^\Phi_G(X)}\bigr)_{\mathscr{D}^\Phi(X)}$. Поскольку функция Φ Δ_2-регулярна, сходимость в $\ell^\Phi(X)$ по норме эквивалентна сходимости по модуляру ρ_Φ (см. [18, теорема 9.4]). Следовательно, в пространстве $\mathscr{D}^\Phi(X)$ сходимость по норме $\|\cdot\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)}$ эквивалентна сходимости по ρ. Воспользуемся следствием 15 из § 3.4 в [10], в силу которого $\rho(g_n)\to 0$ при $n\to\infty$ влечет $\rho(g+g_n)\to\rho(g)$ при $n\to\infty$. Следовательно,

$$\rho(f_n) = \rho((f_n - f) + f) \to \rho(f),$$

и, таким образом, условие $f_n\in B$ для всех n влечет, что $f\in B$. Следовательно, B — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства $\mathscr{D}^\Phi(X)$. Поэтому, как следует из теоремы Какутани (см., например, [19, следствие 10.6.2]), B компактно в слабой топологии. Стало быть, слабо полунепрерывный снизу функционал

$$F(g) = \rho(f-g), \quad g\in\bigl(\overline{\ell^\Phi_G(X)}\bigr)_{\mathscr{D}^\Phi(X)},$$

достигает своего минимума d на B. Пусть $F(u) = d$ и $h = f - u$. Для $v\in\ell^\Phi_G(X)$ рассмотрим гладкую функцию

$$F_v(t) = \rho(f - (u - tv)), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Очевидно, что минимум F достигается при $t=0$, что означает

$$\left.\frac{dF_v(t)}{dt}\right|_{t=0} = \rho_h'(v) = \langle \Delta_\Phi h,\, v\rangle = 0 \ \text{ для всех } v \in \ell^\Phi_G(X).$$

Таким образом, $\langle \Delta_\Phi h,\, \delta_x\rangle = 0$ для всех $x \in X$, и, следовательно, $h \in HD^\Phi(X)$ по лемме 3.5.

Докажем единственность. Предположим, что $f = u_1 + h_1 = u_2 + h_2$. Воспользовавшись леммой 3.5, заключаем, что $\langle \Delta_\Phi h_1,\, h_1 - h_2\rangle = \langle \Delta_\Phi h_1,\, u_1 - u_2\rangle = 0$, и аналогично $\langle \Delta_\Phi h_2,\, h_1 - h_2\rangle = 0$. В силу предложения 3.4 имеем $h_1 - h_2 = u_1 - u_2 \in D^\Phi(X)^G$. □

Следствие 3.7. *Если действие группы G на X свободно, то пространство $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(X))$ может быть естественным образом отождествлено с пространством $HD^\Phi(X)/D^\Phi(X)^G$.*

Доказательство непосредственно следует из рассуждений, изложенных в ходе доказательств теорем 3.2 и 3.6. □

§ 4. Нормальные подгруппы с большим централизатором

Теорема 4.1. *Пусть Φ — N-функция из $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$, и пусть N — бесконечная конечно порожденная нормальная подгруппа конечно порожденной группы G. Если N неаменабельна, а ее централизатор $Z_G(N)$ бесконечен, то $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$.*

Доказательство. Известно, что каждое пространство Орлича $\ell^\Phi(G)$ топологически изоморфно пространству $\ell^{\widetilde{\Phi}}(G)$, где $\widetilde{\Phi}$ — некоторая непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N-функция такая, что

$$\Phi(u) \le \widetilde{\Phi}(u) \le 2\Phi(u) \tag{2}$$

(см. [18, 20]). Таким образом, имеем топологические изоморфизмы

$$H^1(G, \ell^\Phi(G)) \cong H^1(G, \ell^{\tilde{\Phi}}(G)), \quad \overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G)) \cong \overline{H}^1(G, \ell^{\tilde{\Phi}}(G)).$$

Неравенства (2) влекут эквивалентность N-функций Φ и $\widetilde{\Phi}$ [10, 18]. Поэтому если $\Phi \in \Delta_2(0)$, то $\widetilde{\Phi} \in \Delta_2(0)$ (см., например, [10, § 2.3]); кроме того, для функций Ψ и $\widetilde{\Psi}$, дополнительных к Φ и $\widetilde{\Phi}$ соответственно, обращаясь к (2), имеем

$$\Psi\left(\frac{v}{2}\right) \le \widetilde{\Psi}(v) \le \Psi(v).$$

Стало быть, ∇_2-регулярность также сохраняется при переходе от Φ к $\widetilde{\Phi}$, и, таким образом, можно утверждать, что $\ell^{\widetilde{\Phi}}$ рефлексивно. Как следствие можно без ограничения общности полагать, что сама Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N-функция.

Сначала заметим, что $\mathscr{D}_\Phi(G)^{Z_G(N)} = 0$. В самом деле, пусть $[f] \in \mathscr{D}_\Phi(G)^{Z_G(N)}$ — класс эквивалентности, содержащий элемент f. Тогда $\lambda_G(g)f - f \in D^\Phi(G)^N$ для всех $g \in Z_G(N)$; другими словами, $\lambda_G(n)(\lambda_G(g)f - f) = \lambda_G(g)f - f$ для всех $n \in N$. Это эквивалентно тому, что $\lambda_G(g)(\lambda_G(n)f - f) = \lambda_G(n)f - f$, поскольку $n,\, g \in Z_G(N)$. Так как $[f] \in \mathscr{D}_\Phi(G)^{Z_G(N)}$, имеем $\lambda_G(n)f - f \in \ell^\Phi(G)$, что влечет $\lambda_G(n)f - f \in \ell^\Phi(G)^{Z_G(N)}$. Вспоминая, что централизатор $Z_G(N)$

бесконечен, заключаем, что функция $\lambda_G(n)f - f$ тождественно равна нулю, т. е. $f \in D^\Phi(G)^N$. Таким образом, $[f] = 0$.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $\alpha : \mathscr{D}^\Phi(G) \to Z^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)$ — отображение из теоремы 3.2. Как упоминалось выше, действие группы G на $\mathscr{D}^\Phi(G)$ индуцирует действие на $Z^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)$, определяемое формулой

$$(g \cdot b)(n) = \lambda(g)(b(g^{-1}ng)), \quad b \in Z^1(N, \ell^\Phi(G)|_N), \quad g \in G, \ n \in N.$$

Поскольку это действие оставляет пространство $B^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)$ инвариантным, оно корректно определено на $H^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)$. Несложные вычисления дают

$$(m \cdot b)(n) = b(n) + (\lambda(n)b(m) - b(m)) \quad \text{для } m \in N.$$

В силу вышеизложенного действие N на $H^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)$ тривиально. Несложно проверить, что α G-эквивариантно. Поэтому по следствию 3.7 существует $Z_G(N)$-эквивариантная биекция между $HD^\Phi(G)/D^\Phi(G)^N$ и $\overline{H}^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)$. Рассмотрим отдельно случаи конечного и бесконечного пересечения $N \cap Z_G(N)$.

Сначала допустим, что оно бесконечно. Индуцированное действие N оставляет элементы $HD^\Phi(G)/D^\Phi(G)^N$ неподвижными, потому что оно тривиально. Повторив приведенные рассуждения, заключаем, что $\mathscr{D}_\Phi(G)^{N \cap Z_G(N)} = 0$ и, следовательно, $HD^\Phi(G)/D^\Phi(G)^N = 0$. Отсюда вытекает, что $\overline{H}^1(N, \ell^\Phi(G)|_N) = 0$ и по лемме 2.4 $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$.

Пусть пересечение конечно. Для неаменабельной группы N имеем

$$\overline{H}^1(N, \ell^\Phi(G)|_N) = H^1(N, \ell^\Phi(G)|_N).$$

Аналогично предыдущему заключаем, что

$$H^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)^{Z_G(N)/(N \cap Z_G(N))} = 0,$$

поэтому $H^1(N, \ell^\Phi(G)|_N)^{G/N} = 0$. Отсюда, воспользовавшись леммой 2.4, заключаем, что $H^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0 = \overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G))$. $\square$

Аналогично теореме 4.1 может быть доказано следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Если $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$, а конечно порожденная группа G имеет бесконечный центр, то $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$.*

Так же, как в [8] для ℓ^p-когомологий, установим достаточные условия тривиальности первой группы ℓ^Φ-когомологий сплетения счетных дискретных групп.

Теорема 4.3. *Предположим, что G_1, G_2 — нетривиальные счетные дискретные группы, $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$ и $G = G_1 \wr G_2$. Если G_1 неаменабельна, то $H^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$.*

Доказательство. Пусть $N = G_1 \times (\oplus_{G_2} G_1)$. Тогда N неаменабельна. Представим N как $N = G_1 \times G_0$, где $G_0 = \oplus_{G_2 \setminus \{e\}} G_1$. В силу теоремы 2 из [10, § 7.3] можно заменить нашу N-функцию $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$ эквивалентной N-функцией $\Phi_1 \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$ такой, что пространства $\ell^\Phi(N)$ и $\ell^{\Phi_1}(N)$ изоморфны, а $\ell^{\Phi_1}(N)$ равномерно выпукло. Заметим, что пространство $\ell^{\Phi_1}(N)$ также рефлексивно. Замена Φ на Φ_1 не затрагивает когомологии, и, следовательно, не теряя общности рассуждений, можно полагать, что $\ell^\Phi(N)$ равномерно выпукло. Левое регулярное представление λ_N группы N на $\ell^\Phi(N)$ таково, что $\lambda_N|_{G_1}$ и $\lambda_N|_{G_0}$ не имеют инвариантных векторов (поскольку G_1 бесконечна), а λ_N не имеет почти инвариантных векторов (из-за неаменабельности N, см. предложение 2 из [15, § 5]). Предположим, что

$$H^1(N, \ell^\Phi(N)) \neq 0. \tag{3}$$

Как известно (см. леммы 2.2.1 и 2.2.6 в [3], заметим, что формулировки в [3] приводятся для действий на гильбертовых модулях, но все сказанное сохраняет силу и для банаховых модулей), если G — топологическая группа, а V — G-модуль, то существует соответствие между $Z^1(G, V)$ и непрерывными действиями G аффинными изометриями на V; кроме того, аффинное действие, соответствующее коциклу, имеет неподвижную точку тогда и только тогда, когда он является кограницей. Следовательно, предположение (3) влечет существование действия группы N аффинными изометриями на $\ell^\Phi(N)$, не имеющего неподвижных точек. Тогда в силу теоремы 7.1 из [21], поскольку $\ell^\Phi(N)$ — равномерно выпуклый N-модуль и левое регулярное представление N на $\ell^\Phi(N)$ не имеет почти инвариантных векторов, должен существовать ненулевой инвариантный вектор для $\lambda_N|_{G_1}$ и $\lambda_N|_{G_0}$. Это противоречит сказанному выше. Таким образом, (3) не выполняется, и $H^1(N, \ell^\Phi(N)) = 0$. Следовательно, по лемме 2.4, $H^1(N, \ell^\Phi(G)|_N) = 0$. Тогда ввиду предложения 2.1 $H^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$. Теорема доказана. □

Авторы выражают благодарность профессору Анне Каминьской, любезно приславшей свои работы по дискретным пространствам Орлича, а также доктору Виорике Монтряну за подборку статей, затрагивающих тему Ф-лапласиана в «непрерывном» случае. Авторы также весьма признательны рецензенту за полезные замечания, которые способствовали улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lubotzky A.* Discrete groups, expanding graphs and invariant measures. Basel: Birkhauser, 2010.
2. *Coulhon T., Saloff-Coste L.* Variétés riemanniennes isométriques à l'infini // Rev. Mat. Iberoam. 1995. V. 11, N 3. P. 687–726.
3. *Bekka B., de la Harpe P., Valette A.* Kazhdan's property (T). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.
4. *Puls M.* The first L^p-cohomology of some finitely generated groups and p-harmonic functions // J. Funct. Anal. 2006. V. 237, N 2. P. 391–401.
5. *Le V. K, Montreanu D.* On nontrivial solutions of variational-hemivariational inequalities with slowly growing principal parts // Z. Anal. Anwend. 2009. Bd 28, Heft 3. S. 277–293.
6. *Le V. K, Montreanu D., Motreanu V. V.* On a non-smooth eigenvalue problem in Orlicz–Sobolev spaces // Appl. Anal. 2010. V. 89, N 2. P. 229–242.
7. *Kamińska A., Musielak J.* On convolution operator in Orlicz spaces // Rev. Mat. Univ. Complutense Madr. 1989. V. 2 (Suppl). P. 157–178.
8. *Martin F., Valette A.* On the first L^p-cohomology of discrete groups // Groups Geom. Dyn. 2007. V. 1, N 1. P. 81–100.
9. *Rao M. M., Ren Z. D.* Applications of Orlicz spaces. New York: Marcel Dekker, 2002. (Pure Appl. Math.; V. 250).
10. *Rao M. M., Ren Z. D.* Theory of Orlicz spaces. New York etc.: Marcel Dekker, Inc., 1991. (Pure Appl. Math.; V. 146).
11. *Brown K.* Cohomology of groups. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1982.
12. *Guichardet A.* Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie. Paris: Cedic/Nathan, 1980.
13. *Kopylov Ya.* Amenability of closed subgroups and Orlicz spaces, // Sib. Élektron. Mat. Izv. 2013. V. 10. P. 183–190.
14. *Bourdon M., Martin F., Valette A.* Vanishing and non-vanishing for the first L^p-cohomology of groups // Comm. Math. Helv. 2005. V. 80, N 2. P. 377–389.

15. *Rao M. M.* Convolutions of vector fields. III: Amenability and spectral properties // Real and Stochastic Analysis. New Perspectives. Boston, MA: Birkhäuser, 2004. P. 375–401.
16. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1983. (Lect. Notes Math.; V. 1034).
17. *Ekeland I., Témam R.* Convex analysis and variational problems. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. (Classics Appl. Math.; V. 28).
18. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: ГИФМЛ, 1958.
19. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1995.
20. *Rao M. M.* Almost every Orlicz space is isomorphic to a strictly convex Orlicz space // Proc. Am. Math. Soc. 1968. V. 19. P. 377–379.
21. *Bader U., Furman A., Gelander T., Monod N.* Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces // Acta Math. 2007. V. 198, N 1. P. 57–105.

Статья поступила 11 ноября 2013 г.

Копылов Ярослав Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
yakop@math.nsc.ru

Паненко Роман Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
panenkora@gmail.com