Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 517.911+517.922

О НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. А. Щеглова

Аннотация. Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенная относительно производной искомой вектор-функции и тождественно вырожденная в области определения. Доказана теорема о неограниченной продолжимости решений такой системы. Допускается произвольно высокий индекс неразрешенности относительно производной.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическое уравнение, неограниченная продолжимость решения, глобальная структурная форма.

1. Введение

Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty), \tag{1.1}$$

где $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — искомая функция; $F(t, x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Здесь и далее использованы следующие обозначения:

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\phi(t), \quad \phi^{(i)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^i \phi(t), \quad \phi(t) \in \mathbb{C}^i(\mathbb{R}).$$

Предполагается, что $F(t, x, y)$ имеет достаточное число непрерывных частных производных по своим аргументам и $\det \frac{\partial F(t,x,y)}{\partial y} \equiv 0$. Системы такого рода называются *алгебро-дифференциальными* (АДС). В статье под мерой неразрешенности АДС (1.1) относительно производной понимается индекс по дифференцированию [1–4].

Вопрос о продолжимости решений нелинейных АДС вида (1.1) индекса неразрешенности больше единицы в настоящее время остается открытым. Это объясняется двумя основными причинами.

Для анализа нелинейных АДС высокого индекса успешно используются так называемые продолженные системы (см., в частности, [4–6]). Под продолженной системой можно понимать совокупность АДС (1.1) и ее r полных производных по t, рассматриваемую в качестве системы конечных уравнений с

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президиума РАН (проект № 17.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–00287).

независимыми переменными $t, x, x', x'', \ldots, x^{(r+1)}$. Такой подход позволяет исследовать широкие классы нелинейных АДС с регулярным поведением решений в общих предположениях.

Определение 1. Система уравнений

$$\mathcal{F}_r(t,x,y,z_1,\ldots,z_r) = \begin{pmatrix} F(t,x,y) \\ F_1(t,x,y,z_1) \\ \ldots \\ F_r(t,x,y,z_1,\ldots,z_r) \end{pmatrix} = 0, \tag{1.2}$$

в которой $x, y, z_j \in \mathbb{R}^n$, а функции $F_j(t,x,y,z_1,\ldots,z_j)$ $(j=\overline{1,r})$ обладают свойством: для любой достаточно гладкой n-мерной вектор-функции ϕ

$$F_j(t,\phi(t),\phi'(t),\phi''(t),\ldots,\phi^{(j+1)}(t)) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j F(t,\phi(t),\phi'(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

называется *r-продолженной системой* по отношению к АДС (1.1).

Для доказательства локальной теоремы о существовании решений (что само по себе является в общем случае весьма нетривиальной задачей) строится АДС вида

$$x_2'(t) = \varphi_0(t, x_2(t)), \quad x_1(t) = f_0(t, x_2(t)) \tag{1.4}$$

(либо система, разрешенная относительно $x'(t)$) такая, что все решения АДС (1.1) на некотором интервале $T \subseteq \mathbb{R}$ являются решениями системы (1.4). Соответствующая (1.1) система вида (1.4) получается как часть компонент неявной вектор-функции, удовлетворяющей r-продолженной системе.

Одна из упомянутых причин обусловлена тем, что классическая теорема [7, с. 68] гарантирует существование неявной функции лишь в некоторой окрестности начальной точки. Кроме того, для исследования проблемы неограниченной продолжимости решений необходимо по крайней мере, чтобы функции φ_0 и f_0 в (1.4) были определены при любых значениях аргументов. Таким образом, для построения системы вида (1.4) необходимо использовать для r-продолженной системы глобальные варианты теоремы о неявной функции.

Другая причина связана с тем, что часть компонент неявной функции, обращающей в тождество систему (1.2), заведомо должна удовлетворять некоторой оценке. Для пояснения характера этой оценки приведем одну из известных теорем о неограниченной продолжимости решений нелинейной системы, разрешенной относительно производной:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Теорема 1 [8, с. 327]. *Пусть в (1.5) функция $f(t,x)$ определена и непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по переменной x в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Кроме того, существует непрерывная скалярная функция $\omega(s) : \mathbb{R}_+ = [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, обладающая свойством*

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\omega(s)} = \infty.$$

Если для всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\|f(t,x)\| \le \omega(\|x\|), \tag{1.6}$$

то каждое решение уравнения (1.5) *неограниченно продолжимо.*

Таким образом, некоторые компоненты неявной функции, удовлетворяющей r-продолженной системе, должны подчиняться оценке вида (1.6), так ограничивающей скорость изменения (производную) любого решения АДС (1.1), что его норма не может стать бесконечно большой за конечное время. Здесь основные трудности связаны с нахождением условий, которым должна удовлетворять функция $\mathcal{F}_r$ из (1.2), для того чтобы гарантировать выполнение такой оценки.

В данной работе предложен один из способов решения упомянутых выше проблем и доказана теорема о неограниченной продолжимости решений нелинейной АДС (1.1) произвольно высокого индекса неразрешенности.

2. Вспомогательные утверждения о неявной функции

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(\xi,\eta)=0, \tag{2.1}$$

где $\xi\in\mathbb{R}^m$, $\eta\in\mathbb{R}^k$, $\Phi(\xi,\eta):\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$.

Для получения условий, при которых существует неявная функция $\eta = g(\xi)$ такая, что $\Phi(\xi,g(\xi))=0$ для любого $\xi\in\mathbb{R}^m$, воспользуемся следующим глобальным вариантом теоремы о неявной функции, который является прямым следствием более общего результата, полученного в [9].

Пусть A — $(p\times q)$-матрица, $\varkappa$ — q-мерный вектор. Обозначим

$$L(A)=\max_{\|\varkappa\|_{\mathbb{R}^q}=1}\|A\varkappa\|_{\mathbb{R}^p},\quad l(A)=\min_{\|\varkappa\|_{\mathbb{R}^q}=1}\|A\varkappa\|_{\mathbb{R}^p}.$$

Лемма 1. *Пусть*

1) *существует точка* $(\xi_0,\eta_0)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$ *такая, что* $\Phi(\xi_0,\eta_0)=0$;

2) $\Phi(\xi,\eta)\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k)$;

3) $l\big(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}(\xi,\eta)\big)>0,\quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$;

4) *существует непрерывная функция* $w(s):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *такая, что*

$$w(s)>0,\quad s\in(0,\infty), \tag{2.2}$$

$$\int\limits_1^\infty\frac{ds}{w(s)}=\infty \tag{2.3}$$

и

$$L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}(\xi,\eta)\right)\Big/ l\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}(\xi,\eta)\right)\le w(\|\eta\|),\quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k.$$

Тогда в $\mathbb{R}^m$ *определена единственная неявная функция* $\eta=g(\xi)\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R}^m)$ *такая, что* $g(\xi_0)=\eta_0$ *и*

$$\Phi(\xi,g(\xi))=0,\quad \xi\in\mathbb{R}^m.$$

Разобьем векторы ξ и η на подвекторы $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $\eta=(\eta_1,\eta_2)$, где $\xi_1\in\mathbb{R}^\mu$, $\xi_2\in\mathbb{R}^{\bar\mu}$, $\eta_1\in\mathbb{R}^\nu$ при некоторых фиксированных $\mu,\bar\mu:\mu+\bar\mu\le m$ и $\nu\le k$. Соответственно $\xi_0=(\xi_{0,1},\xi_{0,2},\xi_{0,3})$.

Ниже найдены условия на функцию $\Phi(\xi,\eta)$, при которых часть компонент неявной функции $\eta=g(\xi)$ (или $\eta_1=g_1(\xi)$, $\eta_2=g_2(\xi)$), обращающей уравнение (2.1) в тождество, будет удовлетворять оценке

$$\|g_1(\xi_1,\xi_2,\xi_{0,3})\|_{R^\nu}\le\Omega(\|\xi_1\|_{R^\mu}),\quad \xi_1\in\mathbb{R}^\mu,\ \xi_2\in\mathbb{R}^{\bar\mu}, \tag{2.4}$$

где $\Omega(s) : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция со свойством

$$\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\Omega(s)} = \infty. \tag{2.5}$$

Лемма 2. *Пусть*

1) *выполнены все предположения леммы* 1;

2) *существует непрерывная функция* $\Omega(s) : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ *со свойством* (2.5) *такая, что*

$$\|\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_{0,3}, 0)\| \le \|\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_{0,3}, \eta)\|$$

для всех $\xi_2 \in \mathbb{R}^{\bar\mu}$, $\eta_2 \in \mathbb{R}^{k-\nu}$ *и* $\eta_1 \in \mathbb{R}^{\nu}$, $\xi_1 \in \mathbb{R}^{\mu}$, *удовлетворяющих оценке*

$$\|\eta_1\| > \Omega(\|\xi_1\|).$$

Тогда на $\mathbb{R}^m$ *единственным образом определена непрерывно дифференцируемая неявная функция* $\eta = g(\xi)$, *удовлетворяющая при каждом* $\xi \in \mathbb{R}^m$ *уравнению* (2.1) *и условию* (2.4).

Доказательство. В соответствии с утверждением леммы 1 на $\mathbb{R}^m$ определена единственная неявная функция $\eta = (g_1(\xi), g_2(\xi))$, удовлетворяющая уравнению (2.1) и имеющая непрерывную производную при всех $\xi \in \mathbb{R}^m$.

Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{B}(\xi_1, \xi_2) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^{\mu} \times \mathbb{R}^{\bar\mu} : \|g_1(\xi_1, \xi_2, \xi_{0,3})\| \le \Omega(\|\xi_1\|)\}.$$

Очевидно, что если $\mathcal{B}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{R}^{\mu+\bar\mu}$, то утверждение леммы справедливо.

Допустим, что существует точка $(\hat\xi_1, \hat\xi_2) \in \mathbb{R}^{\mu} \times \mathbb{R}^{\bar\mu}$, для которой

$$\|g_1(\hat\xi_1, \hat\xi_2, \xi_{0,3})\| > \Omega(\|\hat\xi_1\|).$$

По непрерывности это неравенство остается справедливым и в некоторой окрестности $\overline{\mathcal{B}}(\hat\xi_1, \hat\xi_2)$ точки $(\hat\xi_1, \hat\xi_2)$.

В соответствии с предположением 2 имеет место соотношение

$$\|\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_{0,3}, 0)\| \le \|\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_{0,3}, g(\xi_1, \xi_2, \xi_{0,3}))\| = 0, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \overline{\mathcal{B}}(\hat\xi_1, \hat\xi_2).$$

Следовательно, $\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_{0,3}, 0) \equiv 0$ в $\overline{\mathcal{B}}(\hat\xi_1, \hat\xi_2)$. Поскольку неявная функция $g(\xi)$ определена в $\mathbb{R}^m$ единственным образом, $g(\xi_1, \xi_2, \xi_{0,3}) \equiv 0$ при всех $(\xi_1, \xi_2) \in \overline{\mathcal{B}}(\hat\xi_1, \hat\xi_2)$, что противоречит сделанному допущению. Поэтому функция $g_1(\xi)$ удовлетворяет условию (2.4). $\square$

3. Глобальная структурная форма и некоторые ее свойства

Рассмотрим r-продолженную систему (1.2). Обозначим $Z_r = (z_1, z_2, \dots, z_r)$. Введем в рассмотрение следующие объекты: матрицу размера $n(r+1) \times nr$

$$\Gamma_{r,z}(t, x, y, Z_r) = \left(\tfrac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial Z_r} \right),$$

квадратную матрицу порядка $n(r+1)$

$$\Gamma_{r,y}(t, x, y, Z_r) = \left(\tfrac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial y} \quad \Gamma_{r,z} \right)$$

и матрицу размера $n(r+1) \times n(r+2)$

$$\Gamma_{r,x}(t, x, y, Z_r) = \left(\tfrac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x} \quad \Gamma_{r,y} \right),$$

где $\mathcal{F}_r(t, x, y, Z_r)$ — функция, определяющая r-продолженную систему (1.2). По построению $\mathcal{F}_r$ полилинейна по переменным $z_1, z_2, \dots, z_r$ и, следовательно, определена при всех вещественных значениях этих переменных.

Лемма 3. *Пусть*

1) $F(t,x,y) \in \mathbb{C}^{r+1}(\mathbb{R}^{2n+1})$;

2) *существует точка* $a_0 \in \mathbb{R}^{n(r+2)+1}$ *такая, что* $\mathcal{F}_r(a_0) = 0$[1];

3) $\operatorname{rank} \Gamma_{r,z}(t,x,y,Z_r) = \rho = \mathrm{const}$ *для любых* $(t,x,y,Z_r) \in \mathbb{R}^{n(r+2)+1}$;

4) *в матрице* $\Gamma_{r,x}$ *существует квадратная порядка* $n(r+1)$ *подматрица* $\Delta_r(t,x,y,Z_r)$, *обратимая в точке* a_0 *и включающая в себя* ρ *столбцов матрицы* $\Gamma_{r,z}$ *и* n *первых столбцов матрицы* $\Gamma_{r,y}$:

$$\Delta_r(t,x,y,Z_r) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial Z_1} \right), \tag{3.1}$$

где

$$\mathrm{column}(x_1,\, x_2) = Q_1 x, \quad \mathrm{column}(Z_1,\, Z_2) = Q_2 Z_r; \tag{3.2}$$

$x_1 \in \mathbb{R}^d$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-d}$, $d = nr - \rho$, $Z_1 \in \mathbb{R}^\rho$, $Z_2 \in \mathbb{R}^d$; Q_1 *и* Q_2 *— матрицы перестановок строк (см., например,* [10, *с.* 127]);

5) *существует непрерывная функция* $w(s) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *со свойствами* (2.2) *и* (2.3) *такая, что для всех* $(t,x,y,Z_r) \in \mathbb{R}^{n(r+2)+1}$ *имеют место оценки*

$$l(\Delta_r) > 0, \tag{3.3}$$
$$L\left(\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial t} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial Z_2} \right) / l(\Delta_r) \le w(\|(x_1, y, Z_1)\|).$$

Тогда на прямом произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$ *определена единственная неявная функция, удовлетворяющая системе* (1.2) *и имеющая вид*

$$y = f(t, x_2), \tag{3.4}$$

$$x_1 = f_0(t, x_2), \tag{3.5}$$

$$Z_1 = f_1(t, x_2, Z_2), \tag{3.6}$$

где f, f_0, f_1 *имеют непрерывные частные производные по каждому из аргументов.*

Доказательство. Условие (3.3) означает, что матрица Δ_r обратима всюду на области определения. Предположения 1, 2, 4 и 5 обеспечивают справедливость утверждения леммы 1 в отношении r-продолженной системы (1.2). Согласно этой лемме на $\mathbb{R}^{n+1}$ определена единственная неявная функция

$$x_1 = f_0(t, x_2, Z_2), \quad y = f(t, x_2, Z_2), \quad Z_1 = f_1(t, x_2, Z_2), \tag{3.7}$$

обращающая в тождество уравнение (1.2). В (3.7) переменные x_1, x_2, Z_1, Z_2 связаны с переменными x и Z_r соотношениями (3.2), функции f, f_0, f_1 имеют непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов и

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial y}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial Z_2} \end{pmatrix} = -\Delta_r^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial Z_2} \right). \tag{3.8}$$

Найдем для системы (3.7) матрицу Якоби по переменным Z_1, Z_2:

$$J(t, x_2, Z_2) = \begin{pmatrix} O & \frac{-\partial f_0(t,x_2,Z_2)}{\partial Z_2} \\ O & \frac{-\partial f(t,x_2,Z_2)}{\partial Z_2} \\ E_\rho & \frac{-\partial f_1(t,x_2,Z_2)}{\partial Z_2} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

[1] Если функция $F(t,x,y)$ обладает свойством $F(t,0,0) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, то в силу полилинейности функции $\mathcal{F}_r$ по переменным $z_1, z_2, \dots, z_r$, точка a_0 всегда существует в виде $a_0 = (t_0, 0)$, где t_0 — некоторое значение из $\mathbb{R}$.

Умножим $\Gamma_{r,z}(t,x,y,Z_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial Z_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial Z_2} \end{pmatrix} Q_2$ слева на матрицу Δ_r^{-1}. С учетом (3.8) имеем

$$\Delta_r^{-1}\Gamma_{r,z} = \begin{pmatrix} O & \frac{-\partial x_1}{\partial Z_2} \\ O & \frac{-\partial y}{\partial Z_2} \\ E_\rho & \frac{-\partial Z_1}{\partial Z_2} \end{pmatrix} Q_2.$$

В результате подстановки в полученное выражение функций (3.7) и умножения справа на матрицу Q_2^{-1} для матрицы J получим представление

$$J(t,x_2,Z_2) = H(t,x_2,Z_2)G(t,x_2,Z_2)Q_2^{-1}, \tag{3.10}$$

где $H(t,x_2,Z_2)$ и $G(t,x_2,Z_2)$ — матрицы Δ_r^{-1} и $\Gamma_{r,z}$, в которые подставлены функции (3.7).

По построению матрица $H(t,x_2,Z_2)$ обратима всюду на $\mathbb{R}^{n+1}$. В силу связи (3.10) условие 3 леммы влечет тождество

$$\operatorname{rank} J(t,x_2,Z_2) \equiv \rho.$$

Ввиду последнего обстоятельства из представления (3.9) следует, что

$$\frac{\partial f(t,x_2,Z_2)}{\partial Z_2} \equiv O, \quad \frac{\partial f_0(t,x_2,Z_2)}{\partial Z_2} \equiv O.$$

Это означает, что в (3.7) функции f и f_0 не зависят от переменной Z_2. $\square$

Замечание 1. Наименьшее значение r $(0 \le r \le n)$, при котором выполняются условия 3 и 4 леммы 3, совпадает с индексом по дифференцированию АДС (1.1).

Уравнение (3.4) умножим слева на матрицу перестановок строк Q_1 из (3.2). В обозначениях $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Q_1 y$, $\begin{pmatrix} \varphi_1(t,x_2) \\ \varphi_0(t,x_2) \end{pmatrix} = Q_1 f(t,x_2)$ полученную систему можно представить в виде

$$y_1 = \varphi_1(t,x_2), \tag{3.11}$$

$$y_2 = \varphi_0(t,x_2). \tag{3.12}$$

Размерности векторов y_1 и y_2 совпадают соответственно с размерностями векторов x_1 и x_2 из (3.2).

Лемма 4. *Пусть*

1) *выполнены все предположения леммы* 3;

2) *существует непрерывная функция* $\Omega(s) : \mathbb{R}_+ \to (0,+\infty)$ *со свойством* (2.5) *такая, что*

$$\|\mathcal{F}_r(t,x_2,Z_{0,2},0,0,0)\| \le \|\mathcal{F}_r(t,x_2,Z_{0,2},x_1,y,Z_1)\|$$

($Z_{0,2}$ — *соответствующая часть компонент вектора* a_0 *из условия* 2 *леммы* 3) *при любых* $t \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-d}$, $x_1 \in \mathbb{R}^d$, $y_1 \in \mathbb{R}^d$, $Z_1 \in \mathbb{R}^\rho$ *и всех* $y_2 \in \mathbb{R}^{n-d}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-d}$ *таких, что*

$$\|y_2\| > \Omega(\|x_2\|).$$

Тогда на прямом произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$ *определена единственная неявная функция, удовлетворяющая системе* (1.2) *и имеющая вид* (3.11), (3.12), (3.5), (3.6), *где функции* φ_1, φ_0, f_0, f_1 *имеют непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов, и справедлива оценка*

$$\|\varphi_0(t,x_2)\| \le \Omega(\|x_2\|), \quad (t,x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-d}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Существование глобально определенной неявной функции вида (3.11), (3.12), (3.5), (3.6), удовлетворяющей уравнению (1.2), следует непосредственно из леммы 3.

Обратимся к лемме 2. Положим $\Phi(\xi,\eta) = \mathcal{F}_r(t,x,y,Z_1,Z_2)$, $\xi = (t,x_2,Z_2)$, $\xi_1 = x_2$, $\xi_2 = t$, $\xi_{0,3} = Z_{0,2}$, $\eta = (x_1,y,Z_1)$, $\eta_1 = y_2$, $\eta_2 = (x_1,y_1,Z_1)$. Тогда из утверждения этой леммы следует справедливость условия (3.13) с учетом того, что функция $\varphi_0(t,x_2)$ из (3.12) не зависит от переменной Z_2. $\square$

Вспомогательный результат, полученный ниже, необходим при доказательстве теоремы о существовании и продолжимости решений из следующего раздела.

Пусть $F(t,x,y) \in \mathbb{C}^{r+2}(\mathbb{R}^{2n+1})$. Построим для АДС (1.1) $(r+1)$-продолженную систему

$$\mathcal{F}_{r+1}(t,x,y,Z_r,z_{r+1}) = 0. \tag{3.14}$$

Предположим, что выполнены условия 3, 4 леммы 3 и в $n(r+2)\times(n+d)$-матрице $\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_2} & \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial z_{r+1}} \end{pmatrix}$ имеется подматрица S размера $n(r+2)\times n$ такая, что при всех вещественных значениях аргументов

$$\operatorname{rank}\Gamma_{r+1,z} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_1} & S \end{pmatrix} = \rho + n \tag{3.15}$$

(переменные Z_1 и Z_2 определены в (3.2)). Пусть

$$S = \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_3}(t,x,y,Z_1,Z_3,Z_4), \tag{3.16}$$

где $\operatorname{column}(Z_3,Z_4) = Q_3\operatorname{column}(Z_2,z_{r+1})$, $Z_3 \in \mathbb{R}^n$, $Z_4 \in \mathbb{R}^d$, Q_3 — матрица перестановок строк.

Обозначим

$$\Delta_{r+1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial y} & \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_1} & \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_3} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial t} & \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_4} \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. *Пусть*

1) $F(t,x,y) \in \mathbb{C}^{r+2}(\mathbb{R}^{2n+1})$;

2) *существует точка* $b_0 \in \mathbb{R}^{n(r+3)+1}$ *такая, что* $\mathcal{F}_{r+1}(b_0) = 0$;

3) $\operatorname{rank}\Gamma_{r,z}(t,x,y,Z_r) = \rho = \mathrm{const}$ *для любых* $(t,x,y,Z_r) \in \mathbb{R}^{n(r+2)+1}$;

4) *в матрице* $\Gamma_{r,x}$ *имеется квадратная порядка* $n(r+1)$ *подматрица* (3.1), *обратимая в* $\mathbb{R}^{n(r+2)+1}$ *и включающая в себя* ρ *столбцов матрицы* $\Gamma_{r,z}$ *и* n *первых столбцов матрицы* $\Gamma_{r,y}$;

5) *в матрице* $\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_2} & \frac{\partial\mathcal{F}_{r+1}}{\partial z_{r+1}} \end{pmatrix}$ *имеется* $(n(r+2)\times n)$-*подматрица* (3.16) *такая, что для любых* $(t,x,y,Z_r,z_{r+1}) \in \mathbb{R}^{n(r+3)+1}$ *имеют место равенства* (3.15);

6) *существует непрерывная функция* $v(s) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *со свойствами*

$$v(s) > 0,\ s \in (0,\infty), \quad \int_1^\infty \frac{ds}{v(s)} = \infty$$

такая, что при любых вещественных значениях переменных t,x,y,Z_1,Z_3,Z_4 *справедливы оценки*

$$l(\Delta_{r+1}) > 0, \quad L(\widehat{\Delta})/l(\Delta_{r+1}) \le v(\|(x_1,y,Z_1,Z_3)\|).$$

Тогда на прямом произведении $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-d}\times\mathbb{R}^{d}$ *единственным образом определена и имеет непрерывные частные производные по своим аргументам неявная функция вида* (3.4), (3.5),

$$Z_1 = \phi_0(t, x_2, Z_4), \tag{3.17}$$

$$Z_3 = \phi_1(t, x_2, Z_4), \tag{3.18}$$

удовлетворяющая системе (3.14) *при всех* $(t, x_2, Z_4) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. В предположениях 1–4 в некоторой окрестности начальной точки определена неявная функция (3.4)–(3.6), обращающая в тождество первые $n(r+1)$ уравнений системы (3.14). Рассмотрим оставшиеся n уравнений

$$F_{r+1}(t, x, y, Z_r, z_{r+1}) = 0, \tag{3.19}$$

где функция F_{r+1} определяется по правилу (1.3).

Подставим в (3.19) функции (3.4)–(3.6), в результате получим систему

$$\widetilde{F}_{r+1}(t, x_2, Z_3, Z_4) = 0, \tag{3.20}$$

в которой в силу предположения 5 матрица $\frac{\partial \widetilde{F}_{r+1}}{\partial Z_3}$ обратима на своей области определения.

В условиях леммы для системы (3.20) выполняются все предположения теоремы о неявной функции, согласно которой в некоторой окрестности начальной точки определена единственная непрерывно дифференцируемая функция (3.18), удовлетворяющая уравнению (3.20). Подстановка (3.18) в функцию (3.6) преобразует последнюю к виду (3.17).

Таким образом, найдена единственная неявная функция (3.4), (3.5), (3.17), (3.18), определенная в некоторой окрестности начальной точки и имеющая там непрерывные частные производные по своим аргументам. Эта функция при подстановке обращает систему (3.14) в тождество.

С другой стороны, в сделанных предположениях для системы (3.14) выполняются все предположения леммы 1, в соответствии с утверждением которой при любых вещественных значениях аргументов определена единственная непрерывно дифференцируемая неявная функция

$$\operatorname{column}(x_1, y, Z_1, Z_3) = \Theta(t, x_2, Z_4), \tag{3.21}$$

удовлетворяющая системе (3.14). В силу единственности эта функция совпадает с неявной функцией (3.4), (3.5), (3.17), (3.18) на области определения последней. Таким образом, неявная функция (3.21) является продолжением функции (3.4), (3.5), (3.17), (3.18) на все пространство. Предположения 3–5 леммы гарантируют, что функция (3.21) будет иметь вид (3.4), (3.5), (3.17), (3.18). □

Замечание 2. Несложно получить оценку

$$l(\Delta_{r+1}) = \min_{\|\varkappa\|=1} \|\Delta_{r+1}\varkappa\| \geq \frac{1}{\|\Delta_{r+1}^{-1}\|}.$$

Иногда функцию $v(s)$, фигурирующую в условии 6 леммы 5, легче найти из неравенства

$$L(\widehat{\Delta})\|\Delta_{r+1}^{-1}\| \leq v(\|(x_1, y, Z_1, Z_3)\|).$$

4. Теорема о неограниченной продолжимости решений

Определение 2. *Решением* системы (1.1) на интервале $T \subseteq \mathbb{R}$ называется n-мерная вектор-функция $x(t) \in \mathbb{C}^1(T)$, обращающая уравнение (1.1) в тождество на T при подстановке.

Положив в (3.12), (3.5)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = Q_1 x'(t), \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q_1 x(t), \tag{4.1}$$

поставим в соответствие уравнениям (3.12), (3.5) АДС

$$x_2'(t) = \varphi_0(t, x_2(t)), \quad x_1(t) = f_0(t, x_2(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

В процессе доказательства приведенной ниже теоремы будет показано, что при некоторых предположениях любое решение системы (4.2) является решением системы (1.1), и наоборот. Очевидно, что в этом случае если для первого из уравнений (4.2) справедлива теорема 1 и функция $f_0(t, x_2(t))$ определена всюду в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-d}$, то каждое решение АДС (1.1) неограниченно продолжимо.

Теорема 2. *Пусть*

1) *выполнены все предположения леммы* 5;

2) *выполнено предположение* 2 *леммы* 4.

Тогда любое решение системы (1.1) *неограниченно продолжимо.*

Доказательство. В сделанных предположениях справедлива лемма 3, согласно которой на $\mathbb{R}^{n+1}$ определена неявная функция (3.4)–(3.6), удовлетворяющая r-продолженной системе (1.2). Другими словами, существует преобразование, позволяющее из системы (1.2) получить функцию (3.4)–(3.6). Действие этого преобразования можно описать вектор-функцией вида

$$P(t, x_2, Z_2, F(t, x, y), F_1(t, x, y, z_1), \dots, F_r(t, x, y, z_1, \dots, z_r)) = \begin{pmatrix} y - f(t, x_2) \\ x_1 - f_0(t, x_2) \\ Z_1 - f_1(t, x_2, Z_2) \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

где переменные x_1, x_2, Z_1, Z_2 определены в (3.2).

В силу единственности неявной функции (3.4)–(3.6) $(n+d+\rho)$-мерная функция P обладает свойством

$$P(t, x_2, Z_2, 0, \dots, 0) = 0, \quad (t, x_2, Z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^d.$$

При выполнении условия 1 леммы 5 функция P имеет непрерывные частные производные по своим аргументам $t, x_2, Z_2, F, F_1, \dots, F_r$ до второго порядка включительно.

Рассмотрим n-мерную вектор-функцию

$$R(t, x_2, Z_2, F, F_1, \dots, F_r) = (\, O_d \quad E_n \quad O_\rho \,)\, (\, Q_1 \quad E_{nr} \,)\, P(t, x_2, Z_2, F, F_1, \dots, F_r), \tag{4.4}$$

где Q_1 — матрица перестановок строк из (3.2).

Из (4.3), (4.4) следует, что для любых $(t, x_2, Z_2) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$R(t, x_2, Z_2, F(t, x, y), F_1(t, x, y, z_1), \dots, F_r(t, x, y, z_1, \dots, z_r)) = \begin{pmatrix} y_2 - \varphi_0(t, x_2) \\ x_1 - f_0(t, x_2) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

(см. (3.5), (3.12)). Так же, как и P, функция R имеет на своей области определения непрерывные частные производные второго порядка по своим аргументам, и

$$R(t,x_2,Z_2,0,\dots,0)\equiv 0. \tag{4.6}$$

Пользуясь определением частной производной, нетрудно показать, что аналогичным свойством обладают и частные производные функции R по переменным t,x_2,Z_2, а именно в точках $(t,x_2,Z_2,0,\dots,0)$

$$\frac{\partial}{\partial t}R=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_2}R=0,\quad \frac{\partial}{\partial Z_2}R=0,\quad (t,x_2,Z_2)\in\mathbb{R}^{n+1}. \tag{4.7}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned}R_1(t,x,y,z_1,\dots,z_{r+1},F,F_1,\dots,F_{r+1})&=\frac{\partial R}{\partial t}+\begin{pmatrix}\frac{\partial R}{\partial x_2} & \frac{\partial R}{\partial Z_2}\end{pmatrix}\operatorname{column}(y_2,\widehat{Z})\\&+\begin{pmatrix}O_n & \frac{\partial R}{\partial F} & \frac{\partial R}{\partial F_1} & \dots & \frac{\partial R}{\partial F_r}\end{pmatrix}\mathcal{F}_{r+1}(t,x,y,z_1,\dots,z_{r+1}),\end{aligned} \tag{4.8}$$

где y_2 определена в (3.2), $\widehat{Z}$ — соответствующий d-мерный подвектор вектора $\operatorname{column}(Z_r,z_{r+1})$, явный вид которого неважен.

Функция R_1 построена по правилу: для любой достаточно гладкой n-мерной вектор-функции $\chi(t)\in\mathbb{C}^{r+2}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}&R_1(t,\chi(t),\chi'(t),\dots,\chi^{(r+2)}(t),F(t,\chi(t),\chi'(t)),\\&\qquad\dots,F_{r+1}(t,\chi(t),\chi'(t),\dots,\chi^{(r+2)}(t)))\\&=\frac{d}{dt}R(t,\chi(t),\chi'(t),\dots,\chi^{(r+1)}(t),F(t,\chi(t),\chi'(t)),\\&\qquad\dots,F_r(t,\chi(t),\chi'(t),\dots,\chi^{(r+1)}(t))).\end{aligned}$$

Поэтому с учетом (4.5)

$$R_1(t,x,y,z_1,\dots,z_{r+1},F,F_1,\dots,F_{r+1})=\begin{pmatrix}z_{1,2}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}y_2\\ y_1-\frac{\partial f_0}{\partial t}-\frac{\partial f_0}{\partial x_2}y_2\end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

где $\operatorname{column}(z_{1,1},z_{1,2})=Q_1z_1$.

Поскольку функция R обладает свойствами (4.6), (4.7), из представления (4.8) следует, что функция (3.4), (3.5), (3.17), (3.18), удовлетворяющая системе (3.14), обращает в тождественный нуль и левые части равенств (4.5), (4.9), а следовательно, удовлетворяет системе

$$y_2=\varphi_0(t,x_2),\quad x_1=f_0(t,x_2), \tag{4.10}$$

$$z_{1,2}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}y_2,\quad y_1=\frac{\partial f_0}{\partial t}+\frac{\partial f_0}{\partial x_2}y_2. \tag{4.11}$$

Подставляя выражение для y_2 из (4.10) в последнее из уравнений (4.11), получим

$$y_1=\frac{\partial f_0(t,x_2)}{\partial t}+\frac{\partial f_0(t,x_2)}{\partial x_2}\varphi_0(t,x_2). \tag{4.12}$$

Таким образом, функция (3.11) как часть функции (3.4) должна удовлетворять уравнению (4.12). Следовательно, уравнения (3.11) и (4.12) суть одно и то же.

Поставим в соответствие системе (4.10) АДС (4.2). В предположениях леммы 5 функции $\varphi_0(t, x_2)$ и $f_0(t, x_2)$ в (4.2) определены всюду на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-d}$. Согласно лемме 4 для дифференциальной подсистемы $x_2'(t) = \varphi_0(t, x_2(t))$ справедливо утверждение теоремы 1, в соответствии с которым каждое решение этой системы неограниченно продолжимо. Следовательно, неограниченно продолжимо и каждое решение $x_*(t)$ системы (4.2), кроме того, $x_*(t) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$.

Покажем, что любое решение системы (4.2) является решением АДС (1.1). Будем понимать в уравнениях (4.10)–(4.12), (3.11) переменные в смысле (4.1) и положим $z_{1,2} = x_2''(t)$.

Очевидно, что при подстановке решение системы (4.2) $x_*(t)$ обращает уравнения (4.10), (4.11) в тождества на $\mathbb{R}$. Следовательно, эта функция удовлетворяет уравнению (4.12). Это означает, что $x_*(t)$ обращает в тождество и уравнение (3.11). Ввиду того, что неявная функция (4.10), (3.11) удовлетворяет уравнению $F(t, x, y) = 0$, отсюда следует, что функция $x_*(t)$ обращает АДС (1.1) в тождество. Таким образом, каждое решение системы (4.2) является решением системы (1.1).

Покажем, что АДС (1.1) не может иметь других решений (в частности, менее гладких), кроме тех, которые являются также решениями системы (4.2).

Допустим, что система (1.1) имеет в окрестности $\mathcal{B}_0$ точки t_0 решение $\bar{x}_*(t) \in \mathbb{C}^1(\mathcal{B}_0)$. В силу предположения 4 леммы 5 матрица $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x'} \end{pmatrix}$ имеет полный ранг по строкам всюду в области определения. Следовательно, в ней найдется квадратная подматрица порядка n, обратимая в точке $\alpha_0 = (t_0, \bar{x}_*(t_0), \bar{x}_*'(t_0))$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{1,0}^{[0]}} & \frac{\partial F}{\partial \left(x_{1,1}^{[0]}\right)'} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{1,0}^{[0]} \\ x_{2,0}^{[0]} \end{pmatrix} = P_0^{[0]} x, \quad \begin{pmatrix} \left(x_{1,1}^{[0]}\right)' \\ \left(x_{2,1}^{[0]}\right)' \end{pmatrix} = P_1^{[0]} x',$$

$P_0^{[0]}, P_1^{[0]}$ — матрицы перестановок строк. Поэтому в окрестности соответствующей точки определена неявная функция

$$x_{1,0}^{[0]} = f_0^{[0]}\big(t, x_{2,0}^{[0]}, \big(x_{2,1}^{[0]}\big)'\big), \tag{4.13}$$

$$\big(x_{1,1}^{[0]}\big)' = f_{1,1}^{[0]}\big(t, x_{2,0}^{[0]}, \big(x_{2,1}^{[0]}\big)'\big), \tag{4.14}$$

удовлетворяющая системе $F(t, x, x') = 0$, рассматриваемой как система конечных уравнений с независимыми переменными x и x'. Если трактовать (4.13), (4.14) как систему алгебро-дифференциальных уравнений, то очевидно, что функция $\bar{x}_*(t)$ обращает ее в тождество в некоторой окрестности точки t_0. Поскольку $\bar{x}_*(t)$ непрерывно дифференцируема в этой окрестности, то она будет удовлетворять и уравнению, представляющему собой полную производную по t для уравнения (4.13):

$$\big(x_{1,0}^{[0]}\big)' = \hat{f}_0^{[0]}\big(t, x_{2,0}^{[0]}, \big(x_{2,0}^{[0]}\big)', \big(x_{2,1}^{[0]}\big)', \big(x_{2,1}^{[0]}\big)''\big). \tag{4.15}$$

Найдем также полную производную по t для уравнения (4.14):

$$\big(x_{1,1}^{[0]}\big)'' = \hat{f}_1^{[0]}\big(t, x_{2,0}^{[0]}, \big(x_{2,0}^{[0]}\big)', \big(x_{2,1}^{[0]}\big)', \big(x_{2,1}^{[0]}\big)''\big). \tag{4.16}$$

Матрица $\Gamma_{1,x}^{[0]}$ частных производных по переменным x, x', x'' системы конечных уравнений (4.13)–(4.16) связана с матрицей

$$\Gamma_{1,x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x'} & O \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial x'} & \frac{\partial F_1}{\partial x''} \end{pmatrix}$$

(функция F_1 определена в (1.2), (1.3)) невырожденным преобразованием

$$\Gamma_{1,x}^{[0]} = \begin{pmatrix} A^{[0]} & O \\ \frac{d}{dt}A^{[0]} & A^{[0]} \end{pmatrix} \Gamma_{1,x},$$

где $A^{[0]} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{1,0}^{[0]}} & \frac{\partial F}{\partial (x_{1,1}^{[0]})'} \end{pmatrix}^{-1}$. Поэтому в силу предположения 4 леммы 5 матрица $\Gamma_{1,x}^{[0]}$ имеет полный ранг по строкам в области определения.

В результате подстановки в (4.15), (4.16) выражения (4.14) для $\bigl(x_{1,1}^{[0]}\bigr)'$ получим уравнения

$$f_0^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[0]}, \bigl(x_{2,1}^{[0]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[0]}\bigr)''\bigr) = 0, \tag{4.17}$$

$$\bigl(x_{1,1}^{[0]}\bigr)'' = \bar{f}_1^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[0]}, \bigl(x_{2,1}^{[0]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[0]}\bigr)''\bigr). \tag{4.18}$$

По построению функция $\bar{x}_*(t)$ удовлетворяет уравнению (4.17). Вследствие полноты ранга матрицы $\Gamma_{1,x}^{[0]}$ матрица Якоби функции $f_0^{[1]}$ по переменным $x_{2,0}^{[0]}$, $\bigl(x_{2,1}^{[0]}\bigr)'$, $\bigl(x_{2,1}^{[0]}\bigr)''$ также имеет полный ранг по строкам в соответствующей области. Поэтому существует локально определенная неявная функция, удовлетворяющая системе конечных уравнений (4.17):

$$x_{1,0}^{[1]} = f_0^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[1]}, \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)''\bigr), \tag{4.19}$$

$$\bigl(x_{1,1}^{[1]}\bigr)' = f_1^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[1]}, \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)''\bigr), \tag{4.20}$$

$$\bigl(x_{1,2}^{[1]}\bigr)'' = f_2^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[1]}, \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)''\bigr), \tag{4.21}$$

где

$$\begin{pmatrix} x_{1,0}^{[1]} \\ x_{2,0}^{[1]} \end{pmatrix} = P_0^{[1]} x_{2,0}^{[0]}, \quad \begin{pmatrix} \bigl(x_{1,1}^{[1]}\bigr)' \\ \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)' \end{pmatrix} = P_1^{[1]} \bigl(x_{2,1}^{[0]}\bigr)', \quad \begin{pmatrix} \bigl(x_{1,2}^{[1]}\bigr)'' \\ \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)'' \end{pmatrix} = P_2^{[1]} \bigl(x_{2,1}^{[0]}\bigr)'',$$

$P_0^{[1]}$, $P_1^{[1]}$, $P_2^{[1]}$ — матрицы перестановок строк. Подставив (4.19)–(4.21) в правую часть равенства (4.18), получим функцию

$$\bigl(x_{1,1}^{[0]}\bigr)'' = f_{1,1}^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[1]}, \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)''\bigr). \tag{4.22}$$

Найдем полные производные по t для дифференциальных уравнений (4.19)–(4.22):

$$\bigl(x_{1,0}^{[1]}\bigr)' = \hat{f}_0^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[1]}, \bigl(x_{2,0}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)'', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)'', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)'''\bigr), \tag{4.23}$$

$$\bigl(x_{1,1}^{[1]}\bigr)'' = \hat{f}_1^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[1]}, \bigl(x_{2,0}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)'', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)'', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)'''\bigr), \tag{4.24}$$

$$\bigl(x_{1,2}^{[1]}\bigr)''' = \hat{f}_2^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[1]}, \bigl(x_{2,0}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)'', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)'', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)'''\bigr), \tag{4.25}$$

$$\bigl(x_{1,1}^{[0]}\bigr)''' = \hat{f}_1^{[1]}\bigl(t, x_{2,0}^{[1]}, \bigl(x_{2,0}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)', \bigl(x_{2,1}^{[1]}\bigr)'', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)'', \bigl(x_{2,2}^{[1]}\bigr)'''\bigr). \tag{4.26}$$

Непрерывно дифференцируемая функция $x_*(t)$ удовлетворяет уравнению (4.19), следовательно, она должна удовлетворять и уравнению (4.23).

Пусть $\widehat{\Gamma}_{1,x}^{[1]}$ — матрица Якоби по переменным x, x', x'' для системы (4.13), (4.14), (4.19)–(4.22). Тогда по построению

$$\widehat{\Gamma}_{1,x}^{[1]} = \begin{pmatrix} A_1^{[1]} & O \\ A_3^{[1]} & A_2^{[1]} \end{pmatrix} \Gamma_{1,x},$$

где $A_1^{[1]}, A_2^{[1]}$ — некоторые обратимые $(n \times n)$-матрицы. Несложно убедиться в справедливости соотношения

$$\Gamma_{2,x}^{[1]} = \begin{pmatrix} A_1^{[1]} & O & O \\ A_3^{[1]} & A_2^{[1]} & O \\ \frac{d}{dt}A_3^{[1]} & A_3^{[1]} + \frac{d}{dt}A_2^{[1]} & A_2^{[1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x'} & O & O \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial x'} & \frac{\partial F_1}{\partial x''} & O \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial x'} & \frac{\partial F_2}{\partial x''} & \frac{\partial F_2}{\partial x'''} \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

где функция F_2 определена в (1.2), (1.3), $\Gamma_{2,x}^{[1]}$ — матрица Якоби по переменным x, x', x'', x''' для системы (4.13), (4.14), (4.19)–(4.26). Поэтому по предположению 4 леммы 5 матрица $\Gamma_{2,x}^{[1]}$ будет иметь полный ранг по строкам.

Аналогичным образом продолжаем процесс преобразований. Подставим функции (4.14), (4.18), (4.20), (4.21) в систему (4.23)–(4.26), в результате получим АДС

$$f_0^{[2]}\big(t, x_{2,0}^{[1]}, (x_{2,1}^{[1]})', (x_{2,2}^{[1]})'', (x_{2,2}^{[1]})'''\big) = 0, \tag{4.28}$$

$$\big(x_{1,1}^{[1]}\big)'' = f_1^{[2]}\big(t, x_{2,0}^{[1]}, (x_{2,1}^{[1]})', (x_{2,2}^{[1]})'', (x_{2,2}^{[1]})'''\big), \tag{4.29}$$

$$\big(x_{1,2}^{[1]}\big)''' = f_2^{[2]}\big(t, x_{2,0}^{[1]}, (x_{2,1}^{[1]})', (x_{2,2}^{[1]})'', (x_{2,2}^{[1]})'''\big), \tag{4.30}$$

$$\big(x_{1,1}^{[0]}\big)''' = f_{1,1}^{[2]}\big(t, x_{2,0}^{[1]}, (x_{2,1}^{[1]})', (x_{2,2}^{[1]})'', (x_{2,2}^{[1]})'''\big). \tag{4.31}$$

Используем для уравнения (4.28) теорему о неявной функции, выпишем вид этой функции, подставим ее в уравнения (4.29)–(4.31), затем продифференцируем полученную систему и т. д.

Наконец, на r-м шаге придем к уравнениям вида

$$x_{1,0}^{[r]} = f_0^{[r]}\big(t, x_{2,0}^{[r]}, (x_{2,1}^{[r]})', (x_{2,2}^{[r]})'', \dots, (x_{2,r}^{[r]})^{(r)}, (x_{2,r+1}^{[r]})^{(r+1)}\big), \tag{4.32}$$

$$\big(x_{1,1}^{[r]}\big)' = f_1^{[r]}\big(t, x_{2,0}^{[r]}, (x_{2,1}^{[r]})', (x_{2,2}^{[r]})'', \dots, (x_{2,r}^{[r]})^{(r)}, (x_{2,r+1}^{[r]})^{(r+1)}\big), \tag{4.33}$$

$$\vdots$$

$$\big(x_{1,r+1}^{[r]}\big)^{(r+1)} = f_r^{[r]}\big(t, x_{2,0}^{[r]}, (x_{2,1}^{[r]})', (x_{2,2}^{[r]})'', \dots, (x_{2,r}^{[r]})^{(r)}, (x_{2,r+1}^{[r]})^{(r+1)}\big), \tag{4.34}$$

$$\big(x_{1,1}^{[0]}\big)^{(r+1)} = f_{1,1}^{[r]}\big(t, x_{2,0}^{[r]}, (x_{2,1}^{[r]})', (x_{2,2}^{[r]})'', \dots, (x_{2,r}^{[r]})^{(r)}, (x_{2,r+1}^{[r]})^{(r+1)}\big). \tag{4.35}$$

Итак, построена система локально определенных функций (4.13), (4.14), (4.19)–(4.22), … , (4.32)–(4.35), где

$$\mathrm{column}\big(x_{1,0}^{[0]}, x_{1,0}^{[1]}, \dots, x_{1,0}^{[r]}, x_{2,0}^{[r]}\big) = P_0^{[r]}x,$$

$$\mathrm{column}\big((x_{1,1}^{[0]})', (x_{1,1}^{[1]})', \dots, (x_{1,1}^{[r]})', (x_{2,1}^{[r]})'\big) = P_1^{[r]}x', \dots,$$

$$\mathrm{column}\big((x_{1,1}^{[0]})^{(r)}, (x_{1,r-1}^{[r-1]})^{(r)}, (x_{1,r}^{[r]})^{(r)}, (x_{2,r}^{[r]})^{(r)}\big) = P_r^{[r]}x^{(r)},$$

$$\mathrm{column}\big((x_{1,1}^{[0]})^{(r+1)}, (x_{1,r+1}^{[r]})^{(r+1)}, (x_{2,r+1}^{[r]})^{(r+1)}\big) = P_{r+1}^{[r]}x^{(r+1)},$$

$P_j^{[i]}$ — матрицы перестановок строк. Назовем эту систему функций *системой* (A).

По построению матрица Якоби по переменным $x, x', \dots, x^{(r+1)}$ системы (A) связана с матрицей $\Gamma_{r,x}$ обратимым преобразованием. Поэтому при подстановке функции системы (A) обращают в тождество все уравнения АДС (1.2) в окрестности $\mathcal{B}_r$ соответствующей точки $\alpha_r = (t_0, \bar{x}_*(t_0), \bar{x}'_*(t_0), \dots)$. Поскольку

АДС (1.2) эквивалентна системе (3.4)–(3.6), функции системы (A) удовлетворяют также уравнениям (3.4)–(3.6) в области $\mathcal{B}_r$. Подстановку функций (A) как в уравнения (1.2), так и в систему (3.4)–(3.6) нужно осуществлять в следующем порядке. Сначала подставляем функции (4.13), (4.14), после этого — функции (4.19)–(4.22) и т. д. В последнюю очередь подставляются функции (4.32)–(4.35). Это обусловлено тем, что часть переменных, от которых зависят функции системы (A), найденные на $0, 1, \dots, j-1$-м шаге, получают свое представление как явные функции системы (A) на последующем j-м шаге ($j = 1, 2, \dots, r$).

С другой стороны, функция $\bar{x}_*(t)$ является решением части уравнений системы (A) (если последнюю рассматривать как АДС) в некоторой окрестности точки t_0. Вычеркнем эти уравнения из системы (A), а в правые части оставшихся уравнений (это обязательно будут уравнения, в которых слева от знака равенства стоят производные порядка выше первого) подставим $\bar{x}_*(t)$ и $\bar{x}_*(t)'$. Тогда полученные функции вместе с $\bar{x}_*(t)$ должны обращать в тождество АДС (3.4)–(3.6) в $\mathcal{B}_r$. При подстановке в уравнения (3.4), (3.5) функции, описывающие производные высших порядков, не участвуют. Поэтому $\bar{x}_*(t)$ является решением АДС (3.4), (3.5) в некоторой окрестности точки t_0, т. е. является решением АДС (4.2), следовательно, дважды непрерывно дифференцируема в указанной окрестности. Таким образом, системы (1.1) и (4.2) имеют одни и те же решения. По доказанному выше каждое решение АДС (1.1) неограниченно продолжимо. $\square$

Пример. Проверим выполнение предположений теоремы 2 для АДС:

$$(\chi_3'(t))^2+\chi_2(t)=0, \quad \chi_1(t)+\chi_3(t)=0, \quad \chi_1'(t)+2\chi_3'(t)+\chi_1(t)=0, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{4.36}$$

с неизвестной функцией $x(t) = \mathrm{column}(\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t))$, $\chi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Индекс по дифференцированию АДС (4.36) равен двум, эта система нелинейна по x', а матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial x'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\chi_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ имеет переменный ранг.

Покажем, что предположения леммы 5 выполняются при $r = 2$. Для этого построим три дифференциальных продолжения:

$$2\chi_3'\chi_3''+\chi_2'=0, \quad \chi_1'+\chi_3'=0, \quad \chi_1''+2\chi_3''+\chi_1'=0, \tag{4.37}$$

$$2(\chi_3'')^2+2\chi_3'\chi_3'''+\chi_2''=0, \quad \chi_1''+\chi_3''=0, \quad \chi_1'''+2\chi_3'''+\chi_1''=0, \tag{4.38}$$

$$6\chi_3''\chi_3'''+2\chi_3'\chi_3^{IV}+\chi_2'''=0, \quad \chi_1'''+\chi_3'''=0, \quad \chi_1^{IV}+2\chi_3^{IV}+\chi_1'''=0, \tag{4.39}$$

и матрицу

Очевидно, что условия 1 и 2 имеют место, в качестве начальной точки, удовлетворяющей системе (4.36)–(4.39), можно взять $b_0 = 0$. Легко увидеть, что

$$\operatorname{rank}\Gamma_{1,z} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\chi_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \chi_3' = 0, \\ 2, & \chi_3' \neq 0, \end{cases}$$

но

$$\operatorname{rank}\Gamma_{2,z} = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2\chi_3' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4\chi_3'' & 0 & 0 & 2\chi_3' \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) = \rho = 4$$

при любых значениях переменных.

Двойной чертой матрица $\Gamma_{3,x}$ разделена на четыре блока, при этом левый верхний блок представляет собой матрицу $\Gamma_{2,x}$. Фигурирующая в условии 4 матрица Δ_2 (см. (3.1)) существует, ее столбцы в матрице $\Gamma_{2,x}$ выделены рамками. Таким образом, предположения 3 и 4 леммы 5 также выполнены, при этом $d = nr - \rho = 2$ и в (3.2)

$$x_1 = (\chi_2, \chi_3), \quad x_2 = \chi_1, \quad Z_1 = (\chi_1'', \chi_2'', \chi_3'', \chi_3'''), \quad Z_2 = (\chi_1''', \chi_2'''),$$

так что $y_1 = (\chi_2', \chi_3'), y_2 = \chi_1'$.

Проверим условие 5. В матрице

столбцы матрицы S из (3.16) заключены в рамку. Нетрудно убедиться, что $\operatorname{rank}\Gamma_{3,z} = \rho + n = 7$ и

Таким образом, условие (3.15), а следовательно, и предположение 5 леммы 5, выполнено, при этом $Z_3 = \operatorname{column}(\chi_1''', \chi_2''', \chi_3^{IV})$, $Z_4 = \operatorname{column}(\chi_1^{IV}, \chi_2^{IV})$.

Для проверки предположения 6 достаточно получить оценку снизу для величины $l(\Delta_3) = \min\limits_{\|\varkappa\|_{\mathbb{R}^{12}}=1} \|\Delta_3\varkappa\|_{\mathbb{R}^{12}}$ и оценку сверху для $L(\widehat{\Delta}) = \max\limits_{\|\hat{\varkappa}\|_{\mathbb{R}^4}=1} \|\widehat{\Delta}\hat{\varkappa}\|_{\mathbb{R}^{12}}$.

Для удобства выберем норму вектора $\|\varkappa\|_{\mathbb{R}^n} = \sum\limits_{j=1}^{n} |\varkappa_j|$ ($\varkappa_j$ — компоненты вектора $\varkappa$), которая индуцирует матричную норму $\|A\| = \max\limits_{1\le k\le n} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{jk}|$.

Из-за громоздкости матрицы Δ_3 и $\widehat{\Delta}$ выписывать не будем, их легко получить с использованием представления (4.40). Поскольку $\|\widehat{\Delta}\hat{\varkappa}\|_{\mathbb{R}^{12}} = 2|\hat{\varkappa}_2| + |\hat{\varkappa}_3|$ и $|\hat{\varkappa}_2| \le 1$, $|\hat{\varkappa}_3| \le 1$, имеем $L(\widehat{\Delta}) \le 3$. Справедливость неравенства $l(\Delta_3) > 0$ следует из обратимости матрицы Δ_3 при всех вещественных значениях аргументов.

Согласно замечанию 2 $l(\Delta_3) \ge \frac{1}{\|\Delta_3^{-1}\|}$, матрица Δ_3^{-1} легко находится с использованием пакета MATLAB:

$$\Delta_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\chi_3' & 0 & 2\chi_3' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{1,1} & 1 & \alpha_{2,1} & -2\chi_3' & 0 & 2\chi_3' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{1,2} & 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} & 1 & \alpha_{4,2} & -2\chi_3' & 0 & 2\chi_3' & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{1,3} & 0 & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} & 0 & \alpha_{4,3} & \alpha_{5,3} & 1 & \alpha_{6,3} & -\chi_3' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{1,1} = -2\chi_3'' - 2\chi_3'$, $\alpha_{1,2} = -2\chi_3''' - 4\chi_3'' - 2\chi_3'$, $\alpha_{1,3} = -2\chi_3^{IV} - 6\chi_3''' - 6\chi_3'' - \chi_3'$, $\alpha_{2,1} = 2\chi_3'' + 4\chi_3'$, $\alpha_{2,2} = 2\chi_3''' + 8\chi_3'' + 4\chi_3'$, $\alpha_{2,3} = 2\chi_3^{IV} + 12\chi_3''' + 12\chi_3'' + 2\chi_3'$, $\alpha_{3,2} = -4\chi_3'' - 2\chi_3'$, $\alpha_{3,3} = -6\chi_3''' - 6\chi_3'' - \chi_3'$, $\alpha_{4,2} = 4\chi_3'' + 4\chi_3'$, $\alpha_{4,3} = 6\chi_3''' + 12\chi_3'' + 2\chi_3'$, $\alpha_{5,3} = -6\chi_3'' - \chi_3'$, $\alpha_{6,3} = 6\chi_3'' + 2\chi_3'$.

Легко получить оценку

$$\left\|\Delta_3^{-1}\right\| \le 2(6 + 6|\chi_3'| + 11|\chi_3''| + 7|\chi_3'''| + |\chi_3^{IV}|) \le 2(6 + 11\|(x_1, y, Z_1, Z_2)\|).$$

Таким образом, $L(\widehat{\Delta})/l(\Delta_3) \le L(\widehat{\Delta})\left\|\Delta_3^{-1}\right\| \le 6(6+11\|(x_1, y, Z_1, Z_2)\|)$. Очевидно, что функция $v(s) = 6(6 + 11s)$ обладает всеми свойствами, обеспечивающими выполнение последнего из предположений леммы 5.

Остается удостовериться в справедливости условия 2 леммы 4.

Поскольку в качестве начальной точки выбрана $b_0 = 0$, имеем $Z_{0,2} = 0$ или, что то же, $\chi_{0,1}''' = \chi_{0,2}''' = 0$. В этом случае

$$\|\mathcal{F}_r(t, x_2, Z_{0,2}, 0, 0, 0)\| = 2|\chi_1| \le 2|\chi_1| + 1.$$

В свою очередь,

$$\begin{gathered} \|\mathcal{F}_r(t, x_2, Z_{0,2}, x_1, y, Z_1)\| = |\,(\chi_3')^2 + \chi_2| + |\chi_1 + \chi_3| + |\chi_1' + 2\chi_3' + \chi_1| + |2\chi_3'\chi_3'' + \chi_2'| \\ + |\chi_1' + \chi_3'| + |\chi_1'' + 2\chi_3'' + \chi_1'| + |2\,(\chi_3'')^2 + 2\chi_3'\chi_3''' + \chi_2''| + + |\chi_1'' + \chi_3''| + |2\chi_3''' + \chi_1''| \\ \ge |\chi_1' + 2\chi_3' + \chi_1| + |\chi_1' + \chi_3'| \ge \left|-\frac{1}{2}\chi_1' - \chi_3' - \frac{1}{2}\chi_1\right| + |\chi_1' + \chi_3'| \end{gathered}$$

$$\geq \frac{1}{2}|\chi_1' - \chi_1| \geq \frac{1}{2}|\chi_1'| - \frac{1}{2}|\chi_1|.$$

Следовательно, неравенство $\|\mathcal{F}_r(t, x_2, Z_{0,2}, 0, 0, 0)\| \leq \|\mathcal{F}_r(t, x_2, Z_{0,2}, x_1, y, Z_1)\|$ имеет место, если $\frac{1}{2}|\chi_1'| - \frac{1}{2}|\chi_1| \geq 2|\chi_1| + 1$ или, что то же, $|\chi_1'| > 5|\chi_1| + 2$. Функция $\Omega(s)$, фигурирующая в условии 2 леммы 4, в данном случае имеет вид $\Omega(s) = 5s + 1$ и, очевидно, обладает свойством (2.5).

Таким образом, все предположения теоремы 2 выполнены, и любое решение системы (4.36) неограниченно продолжимо.

Для проверки нетрудно найти вид уравнений (4.2)

$$\chi_2 = -\chi_1^2, \quad \chi_3 = -\chi_1, \quad \chi_1' = \chi_1,$$

что позволяет получить представление для общего решения системы (4.36):

$$\chi_1(t) = ce^t, \quad \chi_2(t) = -c^2e^{2t}, \quad \chi_3(t) = -ce^t,$$

где $c \in \mathbb{R}$ — произвольная константа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R.* Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. Philadelphia: SIAM, 1996.
2. *Campbell S. L., Gear C. W.* The index of general nonlinear DAEs // Numer. Math. 1995. V. 72, N 2. P. 173–196.
3. *Ascher U. M., Petzold L. R.* Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations. Philadelphia: SIAM, 1998.
4. *Campbell S. L., Griepentrog E.* Solvability of general differential algebraic equations // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1995. V. 16, N 2. P. 257–270.
5. *Kunkel P., Mehrmann V.* Regular solutions of nonlinear differential-algebraic equations and their numerical determination // Numer. Math. 1998. V. 79, N 4. P. 581–600.
6. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). М.: Наука, 1972.
8. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Изд-во Института математики НАН Беларуси, 1999.
9. *Cristea M.* A note on global implicit function theorem // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2007. V. 8, N 4. Article 100.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 4 февраля 2013 г., окончательный вариант — 10 февраля 2014 г.

Щеглова Алла Аркадьевна
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
shchegl@icc.ru